Université de Monastir
Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Mahdia
Chargé du cours : Mr. Kais Feki

A.U. : 2021-2022
Module : Math I
☞ Section : L1 Gestion

✍ Série de révision pour l'examen final en Mathématiques I

➠ Exercice 1

Soient les fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x \quad , \quad g(x) = f(x) - 2x \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) + 1 + \tfrac{x^2}{2}.$$

(1) (a) Montrer que $f'(x) = (x-1)(x^2 - x - 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  (b) Déduire que f admet exactement trois points critiques sur $\mathbb{R}$.
  (c) Déterminer les extremums locaux de f.
  (d) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
(2) Déterminer avec justification $\min\limits_{x\in[0,3]} f(x)$ et $\max\limits_{x\in[0,3]} f(x)$.
(3) La fonction g admet t-elle au point d'absisse 0 un extremum local ? justifier votre réponse.
(4) (a) Écrire l'équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_h$ de h en $x = 0$.
  (b) Déduire que h admet au point d'absisse 0 un point d'inflexion.
(5) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[f(x)]^4}{(e^{-x}-1)^2(\cos x - 1)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 4f(x)\ln(1+\frac{1}{x^2})\sin(\frac{1}{1+x})$.

➠ Exercice 2

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = 2x^2y + x^2 + y^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha \in \mathbb{R} & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) (a) Déterminer $\nabla f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  (b) Chercher tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
(2) (a) Calculer la matrice hessienne $\mathcal{H}_f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  (b) En déduire la nature de chaque point critique de f.
(3) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.
(4) Chercher les extremums locaux de f sous la contrainte $y = x^2$.
(5) Montrer que l'équation $f(x,y) = 9$ permet de définir une fonction implicite φ au voisinage de $(1,2)$ vérifiant $\varphi(1) = 2$ puis calculer $\varphi'(1)$.
(6) Soit $h(x,y) = f(x,y) - 2x^2y + 4xy$. Étudier l'homogénéité des fonctions h et f sur $\mathbb{R}^2$.
(7) (a) Écrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ tangent à la surface $\mathcal{S}_f$ de f au point $A(1,-2,f(1,-2))$.
  (b) Préciser la position relative de $\mathcal{S}_f$ par rapport à $\mathcal{P}$ au voisinage du point $(1,-2)$.
(8) Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage du point $(1,0)$ de la fonction f.
(9) (a) Pour quelle valeur de α, g est continue en $(0,0)$.
  (b) Supposons que $\alpha = 1$. g est t-elle dérivable en $(0,0)$? justifier votre réponse.

➠ Exercice 3

Soient les fonctions suivantes : $f(x,y) = x^2 + 4xy - 4x$ et $g(x,y) = x - 2y + 1$. On se propose à déterminer le(s) extremum(s) locaux de la fonction f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

(1) Déterminer le Lagrangien L associé à ce problème.
(2) Déterminer le ou les points critiques de L.
(3) Déterminer $\mathcal{H}_L(x,y,\lambda)$ la matrice Hessienne de L en tout point $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$.
(4) Déterminer alors le(s) extremum(s) locaux de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ en précisant leur(s) nature(s) (min local, max local).

➠ Exercice 4

Soit la fonction réelle suivante : $f(x) = \sqrt{1+e^x}$.

(1) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

(3) (a) On admet qu'au voisinage de 0, on a : $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$.

(b) Déduire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f.

(4) (a) Écrire l'équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $x = 0$.

(b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 au voisinage de 0.

(5) (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

(6) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a, b]$.

➠ Exercice 5

Soient les fonctions suivates

$$f(x) = x\ln(1-x) + 2 \quad , \quad g(x) = (1-x)^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{(1-x)^{-x} - 1}{x^2}.$$

(1) Montrer que $f \in C^2(]-\infty, 1[)$.

(2) (a) Montrer que f est concave sur $]-\infty, 1[$.

(b) Déduire que pour tout $a, b \in]-\infty, 1[$, on a

$$\left(\frac{2-a-b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}} \geq \sqrt{(1-a)^a(1-b)^b}.$$

(c) Montrer que f admet en $x = 0$ un maximum global puis calculer $\max\limits_{x \in]-\infty,1[} f(x)$.

(3) (a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction g.

(b) Déduire les valeurs de $g'(0)$, $g''(0)$ et $g^{(3)}(0)$.

(c) g admet t-elle en $x = 0$ un extremum local ? justifier votre réponse.

(4) (a) Déterminer D_h le domaine de définition de h.

(b) Montrer que h est prolongeable par continuité en 0 puis déterminer $\widetilde{h}$ la fonction prolongement par continuité de h en 0.

(c) Montrer que $\widetilde{h}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

Développements limités et équivalents usuels à apprendre

Les formules suivantes sont valables **uniquement au voisinage de** 0.

	Les développements limités usuels en 0		Les équivalents usuels en 0
(1)	$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$	(1)	$e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$
(2)	$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$	(2)	$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$
(3)	$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$	(3)	$\sin u \underset{0}{\sim} u$
(4)	$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$	(4)	$1 - \cos u \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$
(5)	$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$	(5)	$(1+u)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha u, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
(6)	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^3(0)}{6}x^3 + o(x^3)$		En particulier on a : $\sqrt{1+u} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{u}{2}$
	(vrai si f est 3-fois dérivable en 0)	(6)	$\tan u \underset{0}{\sim} u$

Bon travail !

✍ Mr. Feki Kais

Corrigé détaillé de la série de révision pour l'examen final en Math I préparé par Mr. Kais Feki

EX 1 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$

1)a) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

or $(x-1)(x^2-x-2) = x^3 - x^2 - 2x - x^2 + x + 2$
$= x^3 - 2x^2 - x + 2$

$\Rightarrow f'(x) = (x-1)(x^2-x-2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $x \in \mathbb{R}$ est un point critique de f sur $\mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$f'(x) = 0$

or $f'(x) = 0 \iff (x-1)(x^2-x-2) = 0$ (d'après 1)a))

$\iff x-1=0$ ou $x^2-x-2=0$

$\iff x=1$ ou $x=-1$ ou $x=2$

Rappel $ax^2+bx+c=0$

si $a+b+c=0 \Rightarrow x'=1$ et $x''=\frac{c}{a}$

si $a-b+c=0 \Rightarrow x'=-1$ et $x''=-\frac{c}{a}$

$\Rightarrow f$ admet trois points critiques sur $\mathbb{R}$: $1; -1$ et 2.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) = 3x^2 - 4x - 1$

- $f''(1) = 3-4-1 = -2 < 0 \Rightarrow f$ admet en $x=1$ un maximum local

- $f''(-1) = 3+4-1 = 6 > 0 \Rightarrow f$ admet en $x=-1$ un minimum local.

iii) $f''(2) = 3\times 4 - 8 - 1 = 12 - 9 = 3 > 0 \Rightarrow f$ admet en $x = 2$ un minimum local.

d) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$f''(x) = 0 \iff 3x^2 - 4x - 1 = 0$

$\Delta' = 4 - (-3) = 7 \Rightarrow x' = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$; $x'' = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$

$f''(x)$

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$3x^2-4x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité		Convexe		Concave		Convexe	

f est convexe sur $\left]-\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right]$ et $\left[\frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$

f est concave sur $\left[\frac{2-\sqrt{7}}{3} ; \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right]$.

(!) Remarque f admet en $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ et $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ des points d'inflexion car la courbe change de convexité.

2)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{13}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{15}{4}$
		$\simeq 1{,}08$	$\simeq 0{,}66$	$= 3{,}75$

"les points où on a des extremums locaux sur $]0,3[$"

$\Rightarrow \min_{x\in[0,3]} f(x) = 0$ et $\max_{x\in[0,3]} f(x) = \frac{15}{4}$

$f(0)$ $f(3)$

3) $g(x) = f(x) - 2x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2x$

$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

"le terme en x est nul" $\neq 0$ pair

② puisque 0 est un point critique deg car le terme en x est nul dans le DL de g en 0.

(on rappelle que DL de g en 0 est
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$)

de plus $-\frac{1}{2}$ est le premier coefficient non nul dans le DL de g en 0 qui correspond à x^2 avec 2 pair

D'où g admet en 0 un extremum local (il s'agit d'un max local car $-\frac{1}{2} < 0$)

Rappel si f est p fois dérivable en 0 et

$f(x) = a_0 + a_p x^p + o(x^p)$ ($p \geq 2$ et $a_p \neq 0$)

→ p est pair ⟹ en 0 on a extremum local → min local si $a_p > 0$; → max local si $a_p < 0$

→ p est impair ⟹ en 0 on a un point d'inflexion.

2ème méthode $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = x^3 - 2x^2 - x$

$\Rightarrow g'(0) = 0 \Rightarrow 0$ est un point critique de g.

$g''(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow g''(0) = -1 < 0$.

$\left.\begin{array}{l} g'(0) = 0 \\ g''(0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ en $x = 0$ on a max local.

4) a) $h(x) = f(x) + 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \cancel{-\frac{1}{2}x^2} + 2x + 1 \cancel{+\frac{x^2}{2}}$

$= 1 + 2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$

$\Rightarrow$ le DL de h en 0 est

$h(x) = \underbrace{1 + 2x}_{} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$

$\Rightarrow T_0 : y = 1 + 2x$.

2ème méthode : $T_0 : y = h'(0) \times (x - 0) + h(0)$
$= 2x + 1$

b) $h(x) = \underbrace{1+2x}_{y} - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

$\Rightarrow h(x) - y = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3 \begin{cases} >0 & \text{si } x<0 \\ <0 & \text{si } x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_h$ est au dessus de T_0 au $\mathcal{V}(0)$ si $x<0$

et au dessous de T_0 au $\mathcal{V}(0)$ si $x>0$

$\Rightarrow \mathcal{C}_h$ traverse T_0 au $\mathcal{V}(0)$ $\Rightarrow h$ admet en $x=0$ un point d'inflexion.

5) $f(x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $f(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{4}x^4$

$$\frac{[f(x)]^4}{(e^{-x}-1)^2(\cos x - 1)} \underset{0}{\sim} \frac{(2x)^4}{(-x)^2 \times -\frac{x^2}{2}} = \frac{16x^4}{-\frac{1}{2}x^4} = -32$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{[f(x)]^4}{(e^{-x}-1)^2(\cos x-1)} = \ell_0 - 32 = -32$$

$\boxed{\begin{array}{l} ⚠ \; e^U - 1 \underset{0}{\sim} U \\ 1 - \cos U \underset{0}{\sim} \frac{U^2}{2} \end{array}}$

* $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ $\quad \left(\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} 0\right)$

$\sin\left(\frac{1}{1+x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ $\quad \left(\frac{1}{1+x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0\right)$

$4f(x) \underset{+\infty}{\sim} 4 \times \frac{1}{4}x^4 = x^4$

$\Rightarrow 4f(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{1+x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x} \times x^4 = x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 4f(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ell_{+\infty}\, x = +\infty$$

⚠ avant de faire l'N il faut vérifier s'il s'agit d'un F.I ou non. Dans notre cas c'est une F.I : "$0 \times \infty$"

Ex 2 $\quad f(x,y) = 2x^2y + x^2 + y^2$

1) a) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \,;\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= (4xy + 2x \,;\, 2x^2 + 2y)$$

b) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de $f \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4xy + 2x = 0 \\ 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + x = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + x = 0 & (1) \\ y = -x^2 & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) donne $2x \times (-x^2) + x = 0 \Rightarrow -2x^3 + x = 0$

$$\Rightarrow x(-2x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } -2x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) donne
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\,;\, \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{2}\right) \text{ et } \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{2}\right) \text{ sont les points critiques de } f.$$

2) a) $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. De plus $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla f(x,y) = (4xy + 2x \,;\, 2x^2 + 2y)$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y+2 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$

b) on calcule $\det(H_f(\cdot,\cdot))$ en chaque point critique de f.

*) $\det(H_f(0,0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$
$\mathrm{tr}(H_f(0,0)) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$
$\Big\}$ en $(0,0)$ on a un minimum **local**

**) $\det\left(H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{16}{2} = -8 < 0$

$\Rightarrow$ f admet en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ un <u>point selle</u> (ou col)

***) $\det\left(H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)\right) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{16}{2} = -8 < 0$

$\Rightarrow$ f admet en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ un point selle (ni maximum ni minimum).

<u>Cl</u> f possède un unique extremum (qui est un minimum **local** en $(0,0)$).

3) $\det(H_f(x,y)) = \begin{vmatrix} 4y+2 & 4x \\ 4x & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(4y+2) - 16x^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \det(H_f(\mathbf{1},\mathbf{0})) = 4 - 16 = -12 < 0$

$\Rightarrow$ f est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^2$

⚠ c'est pas l'unique choix

4) On veut chercher les extremums locaux de $f(x,y) = 2x^2y + x^2 + y^2$ sous la contrainte $\boxed{y = x^2}$ (*)

$f(x,y) = f(x, x^2) = 2x^2x^2 + x^2 + (x^2)^2$
$= 2x^4 + x^2 + x^4 = 3x^4 + x^2 := h(x)$

Cherchons les extremums de h

$h \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $h'(x) = 12x^3 + 2x$

$h'(x) = 0 \iff 2x(6x^2+1) = 0$
$\iff 2x = 0$ ou $6x^2+1=0$
$\iff x = 0$ ou $6x^2 = -1$ impossible

$\Rightarrow h$ possède un unique point critique $x = 0$

$h''(x) = 36x^2 + 2 \Rightarrow h''(0) = 2 > 0$

$\Rightarrow h$ admet en $x = 0$ un minimum local

Les extremums de f sous la contrainte $y = x^2$

$x = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} y = 0$

Comme h admet en $x=0$ un minimum local alors f admet en $(0,0)$ un minimum local sous la contrainte $y = x^2$.

Remarque puisque h est convexe sur $\mathbb{R}$ et 0 est un point critique de $h \Rightarrow h$ admet en $x = 0$ un minimum global. D'où f admet en $(0,0)$ un minimum global sous la contrainte $y = x^2$

$\min\{f(x,y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $y = x^2\} = f(0,0) = 0$

5) Soit $k(x,y) = f(x,y) - 9 = 2x^2y + x^2 + y^2 - 9$

(i) $k(1,2) = 4+1+4-9 = 0$

(ii) $k \in C^1(\mathbb{R}^2)$ $\left((1,2) \in \mathbb{R}^2\right)$

(iii) $\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial y}(1,2) = 2+4 = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$ d'aprés le théorème des fonctions implicites

$\exists\, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fction $\in C^1(I)$

où I est un intervalle ouvert contenant 1 tel que

$\varphi(1) = 2$ et $k(x, \varphi(x)) = 0 \ \forall x \in I$

$\varphi'(1) = ??$

D'aprés le théorème des fonctions implicites on a

$$\varphi'(1) = \frac{-\frac{\partial k}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial k}{\partial y}(1,2)} = \frac{-\frac{\partial k}{\partial x}(1,2)}{6}$$

or $\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = 4xy + 2x \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial x}(1,2) = 10$

$\Rightarrow \varphi'(1) = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$

6) $h(x,y) = f(x,y) - 2x^2y + 4xy$

$= \cancel{2x^2y} + x^2 + y^2 - \cancel{2x^2y} + 4xy$

$= x^2 + y^2 + 4xy$

soit $t > 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$h(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 + 4(tx)\times(ty)$

$= t^2x^2 + t^2y^2 + 4t^2xy = t^2(x^2+y^2+4xy)$

$= t^2 h(x,y).$

$\Rightarrow$ h est homogène sur $\mathbb{R}^2$ de degré 2.

Rappel (Théorème d'Euler)

f est homogène sur $\mathbb{R}^2$ de degré $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y) \quad \underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

On va montrer que f n'est pas homogène sur $\mathbb{R}^2$.

Supposons que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ alors d'après l'identité d'Euler on a

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow x(4xy + 2x) + y(2x^2 + 2y) = 2\alpha x^2 y + \alpha x^2 + \alpha y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 y + 2x^2 + 2x^2 y + 2y^2 = 2\alpha x^2 y + \alpha x^2 + \alpha y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

si $(x,y) = (1,0) \Rightarrow \alpha = 2$

si $(x,y) = (1,1) \Rightarrow 4 + 2 + 2 + 2 = 2\alpha + \alpha + \alpha$

$$\Rightarrow 4\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{5}{2} \quad \text{impossible}$$

D'où f n'est pas homogène sur $\mathbb{R}^2$.

7) a) (P) : $z = \nabla f(1,-2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-2) \end{pmatrix} + f(1,-2)$

$$= \nabla f(1,-2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} + f(1,-2)$$

Or $\nabla f(x,y) = (4xy + 2x \,;\, 2x^2 + 2y)$

$$\Rightarrow \nabla f(1,-2) = (-6 \,;\, -2)$$

on $f(1,-2)=1$

$$\Rightarrow (P): z=(-6,-2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}+1$$

$$=-6(x-1)-2(y+2)+1$$

$$=-6x-2y+6-4+1$$

$$\Rightarrow \boxed{P: z=-6x-2y+3}$$

b) on a $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 4y+2 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(H_f(1,-2))=\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-12-16$$

$$=-28<0$$

$\Rightarrow P$ traverse S_f au $\mathcal{V}(1,-2)$.

<u>Remarque</u> $\det(H_f(0,0))=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0$

$$\operatorname{tr}(H_f(0,0))=4>0$$

$\Rightarrow$ le plan tangent à S_f au point $(0,0,f(0,0))$ <u>est au dessous</u> à S_f au $\mathcal{V}(0,0)$. $\left(\dfrac{S_f}{P_{(0,0,f(0,0))}}\right)$

8) Donner le developpement limité de f à l'ordre 2 au voisinage du point $(1,0)$.

$$f(x,y)=f(1,0)+\nabla f(1,0)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-1,y-0)H_f(1,0)\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}+o\left((x-1)^2+(y-0)^2\right)$$

or $f(1,0)=1$; $\nabla f(1,0)=(2,2)$ et $H_f(1,0)=\begin{pmatrix}2&4\\4&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f(x,y)=1+(2,2)\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-1,y)\begin{pmatrix}2&4\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}+o\left((x-1)^2+y^2\right)$$

$$=1+2(x-1)+2y+\frac{1}{2}\left[\left(2(x-1)+4y\,;\,4(x-1)+2y\right)\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}\right]+o\left((x-1)^2+y^2\right)$$

équation du plan tangent

$$=2x+2y-1+\frac{1}{2}\left[2(x-1)^2+4y(x-1)+4y(x-1)+2y^2\right]+o\left((x-1)^2+y^2\right)$$

$$=\underbrace{2x+2y-1}+\frac{1}{2}\left[2(x-1)^2+8y(x-1)+2y^2\right]+o\left((x-1)^2+y^2\right)$$

↑ l'équation du plan tangent à S_f au pt $(1,0,f(1,0))$

$\boxed{\text{⚠ Le DL à l'ordre 1 de } f \text{ au } \vartheta(1,0) \text{ est } f(x,y)=2x+2y-1+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)}$

9) a) $g(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ $\forall (x,y)\neq(0,0)$

$$=\frac{2x^2y+x^2+y^2}{x^2+y^2}=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+1 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

$$\Rightarrow g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}+1 & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha\in\mathbb{R} & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

g est continue en $(0,0) \iff \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \alpha$

Donc pour chercher α il suffit de calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\underbrace{\frac{2x^2y}{x^2+y^2}}_{\varphi(x,y)} + 1 \right)$$

Soit $\varphi(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$

on pose $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$ $r>0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$; $x^2+y^2 = r^2$

$$|\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{|2r^2\cos^2\theta \, r\sin\theta|}{r^2}$$

$$= \frac{2r^3}{r^2} \underbrace{|\cos^2\theta|}_{\leq 1} \times \underbrace{|\sin\theta|}_{\leq 1}$$

$$\leq 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$$

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

b) g est dérivable en $(0,0)$

$\Updownarrow$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existent.

on doit étudier l'existence des limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x - 0} \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y - 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 < \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{1-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0 < \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0}$$

$\Rightarrow$ g est dérivable en $(0,0)$.

<u>Remarque</u>

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+1\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0} & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+1\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0} & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$g \in C^1(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow$ les fctions $(x,y) \to \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \to \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow$ les fctions $(x,y) \to \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \to \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ sont continues en $(0,0)$

(car l'unique problème se pose en $(0,0)$)

⚠ $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue en $(0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$

EX3 objectif les extremums locaux de $f(x,y) = x^2 + 4xy - 4x$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$
où $g(x,y) = x - 2y + 1$

1) $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \times g(x,y)$
$= x^2 + 4xy - 4x + \lambda(x - 2y + 1)$

2) $\forall (x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \,;\, \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \,;\, \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) \right)$$

$$= (2x + 4y - 4 + \lambda \,;\, 4x - 2\lambda \,;\, x - 2y + 1)$$

$$\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x + 4y + \lambda = 4 & (1) \\ 4x - 2\lambda = 0 & (2) \\ x - 2y = -1 & (3) \end{cases}$$

$2 \times (1) + (2) \Rightarrow 8x + 8y = 8 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - x}$ (4)

(4) dans (3) $\quad x - 2(1-x) = -1 \Rightarrow x - 2 + 2x = -1$
$\Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$

(4) donne $y = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}}$

(2) donne $4x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 2x = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est l'unique point critique de L

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est l'unique point critique de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$

attention : Les pts critiques de f sans contrainte
$\neq$
des pts critiques de f avec contrainte

3) on a $\nabla L(x,y,\lambda) = (2x+4y-4+\lambda\,;\,4x-2\lambda\,;\,x-2y+1)$
$\forall (x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow H_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ "c'est toujours"

4) $$\det(H_L(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right|$$

$$= (0-8-8) - (0+8+0)$$
$$= -16 - 8 = -24 < 0$$

$\Rightarrow$ f admet en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ un minimum local sous la contrainte $g(x,y) = 0$

Exo 4 $f(x) = \sqrt{1+e^x}$

1) • $x \longmapsto 1+e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$
• $1+e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$

2) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^x \times 2\sqrt{1+e^x} - e^x \times (2\sqrt{1+e^x})'}{4(1+e^x)}$$

$$= \frac{2e^x\sqrt{1+e^x} - \cancel{2}e^x \times \frac{e^x}{\cancel{2}\sqrt{1+e^x}}}{4(1+e^x)}$$

$$= \frac{\frac{2e^x(1+e^x)}{\sqrt{1+e^x}} - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}}{4(1+e^x)}$$

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2e^x(1+e^x) - e^{2x}}{4(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} = \frac{2e^x + e^{2x}}{4(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{⚠ } f \text{ strictement convexe} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f \text{ convexe}}$

3) a) $\sqrt{2+x} = \sqrt{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}$ $\boxed{\text{⚠ } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}}$

Or $\sqrt{1+U} = 1 + \frac{1}{2}U - \frac{1}{8}U^2 + o(U^2)$

$\frac{x}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \Longrightarrow \sqrt{1+\frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$

$= 1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{32}x^2 + o(x^2)$

$$\Longrightarrow \boxed{\sqrt{2+x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)}$$

b) $f(x) = \sqrt{1+e^x} = \sqrt{1+e^x-1+1} = \sqrt{2+(e^x-1)}$

$e^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ $\qquad (e^x - 1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Or d'après 3)a) on a

$\sqrt{2+U} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}U - \frac{\sqrt{2}}{32}U^2 + o(U^2)$

$e^x - 1 = \boxed{x + \frac{x^2}{2}} + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ $\qquad \boxed{\text{⚠ } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

$\Longrightarrow f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{32}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2)$

$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)$

$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)}$$

4) a) Première méthode

$T_0 : y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

or $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

De plus $f(0) = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{T_0 : y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2}}$

2ème méthode

D'après 3) b) on a $f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow T_0 : y = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x$

d) 1er méthode Puisque f est convexe sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ est au dessus de $T_0 \Rightarrow \mathcal{C}_f$ est au dessus de T_0 au $\mathcal{V}(0)$.

2ème méthode D'après 3) b) on a

$f(x) = \underbrace{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x}_{y} + \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow f(x) - y = \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)$

$\underset{0}{\sim} \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 > 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ est au dessus de T_0 au $\mathcal{V}(0)$.

5) a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$

or $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = J$

or $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[$ (car $f \nearrow$)

or $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+e^x} = \sqrt{1} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+e^x} = +\infty$

$\Rightarrow J =]1,+\infty[$

d'où $f : \mathbb{R} \longrightarrow J =]1,+\infty[$ est bij.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow J =]1,+\infty[$ bij et $5 \in]1,+\infty[$

$\Rightarrow \exists\,!\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 5$

"existe et unique"

d'où l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

2ème méthode (T.V.I). Soit $g(x) = f(x) - 5 = \sqrt{1+e^x} - 5$

- g continue sur $\mathbb{R}$
- $\left.\begin{array}{l}\lim_{-\infty} g = -4 \\ \lim_{+\infty} g = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{-\infty} g$ et $\lim_{+\infty} g$ sont de signe opposés

$\xRightarrow{T.V.I}$ l'équation $g(x) = 0$ possède au moins une solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

or g est strictement croissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow \alpha$ est unique

6) $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ $\xRightarrow{T.A.F} \exists\, c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$ or $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+e^b} - \sqrt{1+e^a} = \frac{(b-a)\,e^c}{2\sqrt{1+e^c}}$$

$$\Rightarrow (1+e^b)-(1+e^a)=\frac{(b-a)e^c\left(\sqrt{1+e^b}+\sqrt{1+e^a}\right)}{2\sqrt{1+e^c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^b-e^a=\left(\frac{b-a}{2}\right)e^c\times\frac{\left(\sqrt{1+e^b}+\sqrt{1+e^a}\right)}{\sqrt{1+e^c}}}$$

EX5 : $f(x)=x\ln(1-x)+2$

1) • $x \longrightarrow 1-x \in C^\infty(\mathbb{R})$ (en particulier $\in C^\infty(]-\infty,1[)$)
• $1-x>0 \quad \forall x\in]-\infty,1[$

$\Big\} \Rightarrow x \to \ln(1-x) \in C^\infty(]-\infty,1[)$

D'où $f\in C^\infty(]-\infty,1[) \Rightarrow f\in C^2(]-\infty,1[)$

(⚠ le produit et la somme de deux fctions C^∞ est aussi C^∞)

2) a) $f\in C^\infty(]-\infty,1[)$. De plus $\forall x\in]-\infty,1[$ on a

⚠ $(\ln U)'=\frac{U'}{U}$

$$f'(x)=1\times\ln(1-x)+x\times\frac{(-1)}{1-x}$$
$$=\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}$$

et $f''(x)=\frac{-1}{1-x}-\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{-1}{1-x}-\left[\frac{1\times(1-x)-x\times(-1)}{(1-x)^2}\right]$

$$=\frac{-1}{1-x}-\frac{(1-x+x)}{(1-x)^2}$$

$$=\underbrace{\frac{-1}{1-x}}_{<0}\underbrace{-\frac{1}{(1-x)^2}}_{<0}<0 \quad \forall x\in]-\infty,1[$$

$\Rightarrow f$ est strictement concave sur $]-\infty,1[$
$\Rightarrow f$ est concave sur $]-\infty,1[$.

b) f est concave sur $]-\infty, 1[$. Alors on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \forall\, a,b \in]-\infty, 1[$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right) \ln\left(1-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + e \geq \frac{a\ln(1-a)+2+b\ln(1-b)+e}{e}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^{\frac{a+b}{2}} + 2 \geq \frac{\ln(1-a)^a + \ln(1-b)^b}{e} + e$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2-a-b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{1}{2} \ln\left[(1-a)^a (1-b)^b\right]$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2-a-b}{2}\right)^{\frac{a+b}{e}} \geq \ln\left(\sqrt{(1-a)^a (1-b)^b}\right)$$

$$\overset{x \to e^x \nearrow}{\Longrightarrow} \left(\frac{2-a-b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}} \geq \sqrt{(1-a)^a (1-b)^b} \quad \forall a,b < 1$$

c) On a $f'(x) = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x} \Rightarrow f'(0) = 0$

$\Rightarrow 0$ est un point critique de f

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 0 \text{ est un point critique de } f \text{ sur }]-\infty,-1[\\ \bullet\ f \text{ est concave sur }]-\infty,-1[\end{array}\right\} \Rightarrow f$ admet en $x=0$ un maximum global

De plus $\max_{x \in]-\infty,1[} f(x) = f(0) = e$.

3) $g(x) = (1-x)^{-x} = e^{-x\ln(1-x)}$

Il est clair que $g \in C^\infty(]-\infty, 1[)$

$$\boxed{\underline{\text{Rappel}} \quad \text{si } \varphi(x) = [f(x)]^{g(x)} \text{ alors } \varphi(x) = e^{g(x)\ln[f(x)]} \\ \text{De plus } D\varphi = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) > 0\}}$$

3) a) On a $g(x) = (1-x)^{-x} = e^{-x\ln(1-x)}$

$$\ln(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + o(U^2)$$

or $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Rightarrow \ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$

$$= -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow -x\ln(1-x) = \boxed{+x^2 + \frac{x^3}{2}} + o(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

or $e^U = 1 + U + \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{6} + o(U^3)$

$$\Rightarrow e^{-x(1-x)} = 1 + \left(x^2 + \frac{x^3}{2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x^2+\frac{x^3}{2}\right)^3}_{\text{on dépasse le degré 3}} + o(x^3)$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = (1-x)^{-x} = 1 + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

b) On a $g \in C^\infty(]-\infty, 1[)$ et $0 \in]-\infty, 1[$

(en particulier g est 3-fois dérivable en 0)

Donc d'après le théorème de Taylor-Young on a

$$g(x) = g(0) + g'(0)\,x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

or $g(x) = 1 + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.

Comme le DL en 0 est unique. Alors

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = 0 \\ \frac{g''(0)}{2} = 1 \\ \frac{g^{(3)}(0)}{6} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = 0 \\ g''(0) = 2 \\ g^{(3)}(0) = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

c) $g'(0)=0$
$g''(0)=2>0$ $\Big\}\Rightarrow g$ admet en 0 un minimum local d'où g admet en 0 un extrêmum local.

$g(x)=1+1x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$ $\Big\}\Rightarrow g$ admet en 0 un min local

le terme en x est nul — positif — pair

A partir du D.L on peut connaitre la nature du point critique 0 si le terme en x est nul

4) a) $h(x)=\dfrac{(1-x)^{-x}-1}{x^2}=\dfrac{e^{-x\ln(1-x)}-1}{x^2}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/\ 1-x>0 \text{ et } x^2\neq 0\}$
$=]-\infty,1[\setminus\{0\}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{1}+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\cancel{-1}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0} 1+\frac{1}{2}x+o(x)=1<\infty$

$\Rightarrow h$ est prolongeable par continuité en 0

$\tilde{h}(x)=\begin{cases} h(x) & \text{si } x\in]-\infty,1[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

$=\begin{cases} \dfrac{(1-x)^{-x}-1}{x^2} & \text{si } x\in]-\infty,1[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

c) $\tilde{h}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x\ln(1-x)} - 1}{x^2} & \text{si } x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$g(x)$

Il est clair que $\tilde{h}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$.

Dérivabilité de $\tilde{h}$ en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{g(x)-1}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{g(x)-1-x^2}{x^2}}{x}$$

" $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$ "

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x)-1-x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \cancel{-1} \cancel{-x^2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2} < \infty$$

$\Rightarrow \tilde{h}$ est dérivable en 0 et $\tilde{h}'(0) = \frac{1}{2}$

d'où $\tilde{h}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

Remarque : on peut calculer $\lim_0 \tilde{h}$ par $\sim$. En effet

$$\frac{g(x)-1-x^2}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{?}{x^3}$$

on a $g(x) - 1 - x^2 = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - 1 - x^2 = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

$\underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^3$

d'où $\dfrac{g(x)-1-x^2}{x^3} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \tilde{h}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)-1-x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \infty$$