Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 23 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques T

Z1-00124
260502
Maths T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) a) * Calcul de J^2 :

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Calcul de J^3 :

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2J$$

Donc $J^3 = 2J$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1) b) On a $J^3 = 2J$

qui implique que $J^3 - 2J = O_3$

On constate que $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de J. Les racines du polynôme sont les valeurs propres possibles de J.

On a

$$X^3 - 2X = 0$$

$$X(X^2 - 2) = 0$$

On a $X = 0$ et $X^2 - 2 = 0$

$$X^2 = 2$$

$$X = \sqrt{2} \text{ ou } X = -\sqrt{2}$$

Ainsi les valeurs propres possibles de J sont 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

1) c) On vérifie que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J :

On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(*) $JV_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\, V_1$

V_1 est bien un vecteur propre de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

(*) $JV_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\, V_2$

V_2 est bien un vecteur propre de J associé à la valeur propre 0.

(*) $JV_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\, V_3$

V_3 est bien un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

1) d) * d'après 1) c) les colonnes de la matrice P sont des vecteurs de J.

Après calcul, leur produit donne la matrice P (les vecteurs propres) associés à leur valeur propres.

Or les valeurs propres de J forment une matrice diagonale après calcul.

Donc $JP = PD_1$ tel que D_1 a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de J.

* On a $JP = PD_1$

On constate que J possède des valeurs propres distinctes deux à deux dont D possède ~~par~~ D_1 dans ses coefficients diagonaux

J est donc diagonalisable tel ~~que $JP = PD_1$~~

~~$\Leftrightarrow J = PD_1P^{-1}$~~

1) e) On a J diagonalisable

et $JP = PD_1$

Par équivalence

$$JP = PD_1$$

$$\Leftrightarrow J \times JP = JPD_1$$

$$\Leftrightarrow J^2P = JPD_1 \qquad \text{Or } JP = PD_1$$

Donc $\Leftrightarrow J^2P = PD_1D_1$

$$\Leftrightarrow J^2P = PD_1^2.$$

2) a) $J^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

2) b) On montre qu'il existe des réels a, b, c tels que $A = aI + bJ + cK$.

On a $A = aI + bJ + cK$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \ ; \quad a + c = 2 \quad ; \ a = 1 \\ b = 2 \ ; \quad b = 2 \\ c = 1 \ ; \quad c = 1 \\ b = 2 \ ; \quad b = 2 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

d'où il existe bien des réels a, b, c tels que
$A = I + 2J + K$

2) c) On a $A = I + 2J + K$
Or d'après 2) a) $K = J^2 - I$
Donc $A = I + 2J + J^2 - I$
$\Leftrightarrow A = J^2 + 2J$.

On
$\cancel{AP}$ $A = J^2 + 2J$
$AP = (J^2 + 2J)P$
$AP = J^2P + 2JP$
Or $J^2P = PD_1^2$ et $JP = PD_1$

Donc $AP = PD_1^2 + 2PD_1$

$AP = P(D_1^2 + 2D_1)$
il existe bien une matrice diagonale D_2 tel que $D_2 = D_1^2 + 2D_1$

$$D_2 = \begin{pmatrix} (-\sqrt{2})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2})^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ donc $D_2 = \mathrm{diag}(2-2\sqrt{2} ; 0 ; 2+2\sqrt{2})$

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 23 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3 a n = input ('entrez une valeur pour n: ')
A = [1, 2, 1 ; 2, 2, 2 ; 1, 2, 1]

B = A ^ n
disp(B).

3 b On constate que quelque soit la valeur de n
le coefficient diagonale de la deuxième ligne est toujours
le double des deux autres coefficients diagonaux
Puisque 1312 est le double de 656
Alors pour n = 5, le script renvoiera la matrice B_1.

Exercice 2 :

1 a $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$

1 b $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Donc $E(Z) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$

1 c On constate que $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ est ~~l'intégrale~~
l'espérance de Z explicité par calcul
Donc
$$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = E(Z) = \frac{1}{\lambda}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On constate que $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$ correspond à $E(Z^2)$ explicité mathématiquement.

D'après la formule de Koening Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2$$

Or $V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$ et $E(Z) = \frac{1}{\lambda}$

Donc

$$E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2$$
$$E(Z^2) = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$
$$E(Z^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Puisque $\int_{-\infty}^{0} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$ est nulle

donc $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$

2) a) Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} dx$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$= \int_0^{+\infty} \lambda(1-p)e^{-\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} \lambda^2 p x e^{-\lambda x} dx$$
$$= (1-p)\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda p \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

Or d'après 1) a) et 1) c)

$$= (1-p) \times 1 + \lambda p \times \frac{1}{\lambda}$$

$= 1 - p + p = 1$

On constate que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

2 b ✱ Sur $]-\infty; 0[$, f est une constante (nulle), elle est donc positive tel que $f(x) = 0 \geqslant 0$.

Sur $[0; +\infty[$, f est composé de fonctions exponentielles et polynôme positives sur $[0; +\infty[$ tel que

$$f(x) = \lambda(1-p)\,e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x\, e^{-\lambda x} \geqslant 0.$$

f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

✱ Sur $]-\infty; 0[$, f est une constante (nulle), elle est donc continue sur $]-\infty; 0[$

Sur $[0; +\infty[$, f est composé de fonctions exponentielles et polynômes toutes deux continues sur leur domaine de définition. f est donc bien continue sur $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lambda(1-p)$$

f est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

✱ f est une densité si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

. f étant nulle sur $]-\infty; 0[$ alors $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$

On obtient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Or d'après 2 a $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Les 3 conditions étant réunies, f est bien une densité de probabilité.

2 c X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$ converge.

Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \ ;$$

f étant nulle sur $]-\infty ; 0[$, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx = 0$.

Donc on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x\left(\lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \lambda(1-p) x e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x^2 e^{-\lambda x}\,dx$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$= \int_{0}^{+\infty} \lambda(1-p) x e^{-\lambda x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \lambda^2 p x^2 e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= (1-p)\int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx + \lambda p \int_{0}^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx$$

Or d'après 1 c $\int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$

et $\int_{0}^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$

Donc : $= (1-p) \times \frac{1}{\lambda} + \lambda p \times \frac{2}{\lambda^2}$

$$= \frac{1-p}{\lambda} + \frac{2p}{\lambda} = \frac{2p-p+1}{\lambda} = \frac{p+1}{\lambda}$$

On constate que $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge.
X admet donc bien une espérance et vaut $\frac{p+1}{\lambda}$

tel que $E(X) = \frac{p+1}{\lambda}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 **Nombre de pages :** 23 **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3 a) On effectue une intégration par parties sur $\int_0^x t e^{-\lambda t} dt$

On a

$$\int_0^x t e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} \int_0^x -\lambda t e^{-\lambda t} dt$$

$U = t \qquad U' = 1$

$V = e^{-\lambda t} \qquad V' = -\lambda e^{-\lambda t}$

$$\int_0^x t e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}\left(\left[t e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x e^{-\lambda t} dt\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left(x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^x -\lambda e^{-\lambda t} dt\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left(x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_0^x\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left(x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda x} - 1\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\left(-1 + (1+\lambda x) e^{-\lambda x}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - (1+\lambda x) e^{-\lambda x}\right)$$

Pour tout $x \geqslant 0$, $\int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - (1+\lambda x) e^{-\lambda x}\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3 b Fonction de répartition de X :

Par définition : $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Si $x < 0$:

$F_X(x) = 0$ (f étant nulle sur $]-\infty; 0[$)

Si $x \geq 0$:

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

F_X étant continue sur $\mathbb{R}$ $= F_X(0) + \int_0^x (\lambda(1-p)e^{-\lambda t} + \lambda^2 p t e^{-\lambda t}\,dt$

Par linéarité de l'intégrale :

$= (1-p)\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt + \lambda^2 p \int_0^x t e^{-\lambda t}\,dt$

$= (p-1)\int_0^x -\lambda e^{-\lambda t}\,dt + \lambda^2 p \int_0^x t e^{-\lambda t}\,dt$

Or d'après 3 a $\int_0^x t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda^2}(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x})$

Donc $= (p-1)\left[e^{-\lambda t}\right]_0^x + \lambda^2 p \times \frac{1}{\lambda^2}(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x})$

$= (p-1)(e^{-\lambda x} - 1) + p(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x})$

$= (1-p)(1-e^{-\lambda x}) + p(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x})$

Conclusion : Pour tout x réel :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-p)(1-e^{-\lambda x}) + p(1-(1-\lambda x)e^{-\lambda x}) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 3 :

(1)(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$

car $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Par opérations sur limites

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

On a $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

On en déduit que

f est continue à droite de 0.

(1)(b). $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ puisque $\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \right)$

Par ~~quotient~~ et opérations sur les limite

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

. f est dérivable à droite de 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ admet une limite finie.

Or puisque $f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

elle admet une limite finie (0), f est bien dérivable à droite de f.

. $f'_d(0) = \left(x e^{-\frac{1}{x}}\right)' = x' e^{-\frac{1}{x}} + x \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$

$f'_d(0) = e^{-\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}}$

$f'_d(0) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

$f'_d(0) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

$f'_d(0) = e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

2)1)

- $f'_d(0) = 0$.

2) a) pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, f est la composé d'une fonction eponentielle et rationnelle, toutes deux dérivalbles sur leur domaine de définition, f est donc dérivable (voir questions précédentes).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$:

$$f'(x) = \left(x e^{-\frac{1}{x}}\right)' = x' e^{-\frac{1}{x}} + x\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

2) b) Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*_+$:

On a $e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} > 0$; $x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ (Or elle n'est pas défini en ce point)

et $x = 0$

Tableau de variations ~~de signe~~ de f :

	0		+∞
$e^{-\frac{1}{x}}$		+	
$x + 1$		+	
x		+	
signe de f'		+	
Variation de f		$\nearrow$	

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | **Nombre de pages :** 23 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2 b Étude du signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

On a

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

On a $x+1 > 0$ et $x = 0 \geqslant 0$

et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$

Donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$

f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 c • $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (d'après 1 a)

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ puisque

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variations de f :

	0	$+\infty$
Signe de f'	+	
Variations de f	0 ↗	$+\infty$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) d) Pour tout x réel, on calcul la dérivée seconde :

$$f''(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)'$$

$$f''(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \times \frac{x+1}{x} + e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{\cancel{x}}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{x+1}{x} + e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{(x+1)'x - (x+1)x'}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{x+1}{x} + e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x - x - 1}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{x+1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left[\frac{x+1}{x} - 1\right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x+1-x}{x}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$$

$e^{-\frac{1}{x}}$ étant positive et $\frac{1}{x^3}$ définit sur $\mathbb{R}_+^*$ alors

$f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) $\lim\limits_{U \to 0^+} \frac{e^{-U} - 1}{U}$:

On pose

$-U = x$

Donc

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x} - 1}{-x} = \lim_{x \to 0^+} - \frac{e^{x} - 1}{x}$$

Or on constate que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$

car c'est une limite usuelle.

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} - \dfrac{e^{x} - 1}{x} = -1$

~~$\lim\limits_{U \to -1} \dfrac{e^{-U}}{U}$~~ Ainsi $\lim\limits_{U \to 0^+} \dfrac{e^{-U} - 1}{U} = -1$

3) b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-\frac{1}{x}} - x + 1$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + 1$

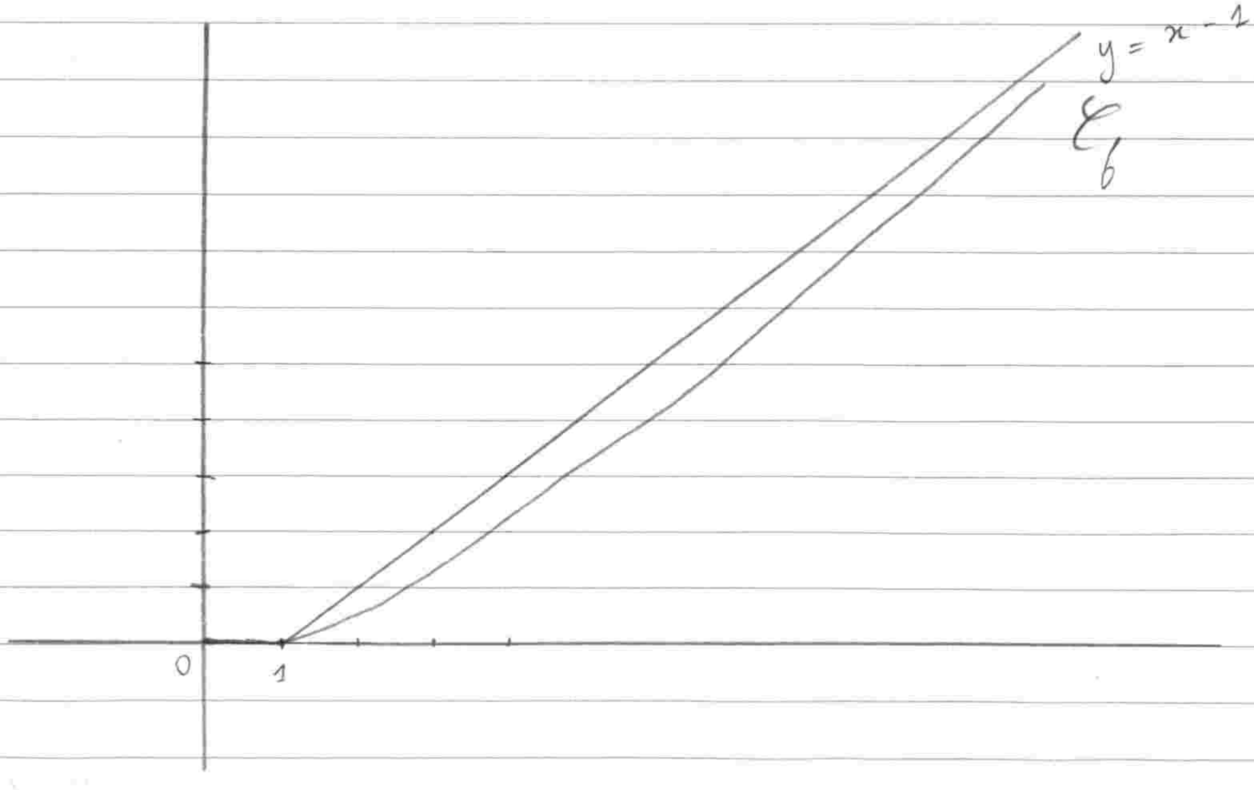
en posant $U = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{x}$

On obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-U} - 1}{U} + 1$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-U} - 1}{U} = -1$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$

3) c) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$; $\mathcal{C}_f$ admet bien une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ au voisinage de $+\infty$.



4) a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$:
Initialisation : pour $n=0$

On a $U_0 = 1$ Or $1 > 0$
Donc $U_0 > 0$
La proposition est ainsi vérifiée pour $n=0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$.

On a $U_n > 0$
Or f étant croissante
$f(U_n) > f(0)$
Or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(0) = 0$

Donc $U_{n+1} > 0$
Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

4) b) On montre que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante par récurrence ($U_n \geq U_{n+1}$) :
Initialisation : pour $n=0$
On a $U_0 = 1$ et $U_1 = f(U_0) = f(1) = e^{-1}$

Donc $U_n \geq U_{n+1}$, la proposition est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons que $U_n \geq U_{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} \geq U_{n+2}$

On a $U_n \geq U_{n+1}$
$f(U_n) \geq f(U_{n+1})$
f étant croissante
$U_{n+1} \geq U_{n+2}$
On a donc bien une proposition vérifiée pour $n+1$

Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (U_n) est décroissante

Code épreuve : 985 | Nombre de pages : 23 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) c) On a (U_n) décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

$$U_n > 0.$$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ d'après le théorème de comparaison

4) d)
```
n = 0
U = 1
while U > 0.001
U = f(U)
n = n + 1
end
disp(n).
```

5) a) On montre pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} = -\ln U_{n+1}$

Par récurrence :
Initialisation pour $n = 0$

D'une part $\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{U_k} = \frac{1}{U_0} = 1$

D'autre part $-\ln(U_{0+1}) = -\ln(U_1) = -\ln(e^{-1}) = 1$

d'où la proposition est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} = -\ln U_{n+1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{U_k} = -\ln(U_{n+2})$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{U_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} + \frac{1}{U_{n+1}} = -\ln(U_{n+1}) + \frac{1}{U_{n+1}}$$

$$= -\ln(U_{n+1}) + \frac{1}{f(U_n)}$$

$$= -\ln(f(U_n)) + \frac{1}{f(U_n)} = -\ln(U_n e^{-\frac{1}{U_n}}) + \frac{1}{f(U_n)}$$

$$= -\left(\ln(U_n) + \ln\left(\frac{1}{e^{1/U_n}}\right)\right) + \frac{1}{U_n e^{-\frac{1}{U_n}}}$$

$$= -\ln(U_n) + \ln(e^{1/U_n}) + \frac{1}{U_{n+1}} = -\ln(U_n) + \frac{1}{U_n} + \frac{1}{U_{n+1}}$$

5) b) On a $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} = -\ln(U_{n+1})$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} = \lim_{n\to+\infty} -\ln(U_{n+1}) = +\infty$$

Car $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = 0$ et $\lim_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$

Par produit $\lim_{n\to+\infty} -\ln(U_{n+1}) = +\infty$

La série de terme général $\frac{1}{U_n}$ est donc divergente.

Exercice 4 :

1) a) $X_1(\Omega) = [\![0 ; 2]\!]$

Loi de X_1 :

$P(X_1 = 0) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Donc $P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$

• $P(X_1 = 1) = P((N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2))$

Par incompatibilité et dépendance :

$$P(X_1 = 1) = P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(N_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}$$

• $P(X_1 = 2) = P(N_1 \cap N_2)$

Par dépendance

$$P(X_1 = 2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2)$$

$$P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}.$$

1 b Calcul de l'espérance de X_1 :

$$E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) + 2 \times P(X_1 = 2)$$

$$E(X_1) = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6}$$

$$E(X_1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$E(X_1) = 1$$

L'espérance de X_1 vaut donc 1.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(X_n = 2) = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$$

$$P(X_n = 2) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(X_n = 2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

~~$P(X_n = 2) = P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 2) \times P(X_3 = 2) \times \dots P(X$~~

$$P(X_n = 2) = \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \dots \times \frac{1}{6}}_{n \text{ fois}}$$

Donc $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$

(3) (a) $\{(X_n = 0) ; (X_n = 1), (X_n = 2)\}$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = P\big(((X_n = 0) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1))\big)$$

$$P(X_{n+1} = 1) = P_{(X_n = 0)}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 0) + P_{(X_n = 1)}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 1)$$
$$+ P_{(X_n = 2)}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 2)$$

~~$P(X_{n+1} = 1)$~~ $(X_{n+1} = 1)_{(X_n = 0)}$ est un événement impossible

Car on ne peut pas obtenir une boule noir dans la prochaine urne si il n'y en avait pas dans l'urne précédente.

Donc $P_{(X_n = 0)}(X_{n+1} = 1) = 0$

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 23 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques T.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc

$$P(X_{n+1}=1) = 0 \times P(X_n=0) + \frac{1}{2} \times P(X_n=1) + \frac{2}{3} \times P(X_n=2)$$

Ainsi $P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} P(X_n=1) + \frac{2}{3} P(X_n=2)$.

. Sachant que $X_n = 1$ est réalisé, on tire 2 boules de l'urne lors du prochain tirage pour que $X_{n+1}=1$ se réalise, on tire forcément de façon équiprobable une boule noire et blanche.

Donc $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}$

. Sachant que $X_n = 2$ est réalisé, on tire 2 boules de l'urne lors du prochain tirage, pour que $X_{n+1}=1$ soit réalisé on tire une boule

3) b) On montre par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$P(X_n=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Initialisation : pour $n=1$:

D'une part $P(X_1=1) = \frac{2}{3}$ (d'après 1) a))

D'autre part : $P(X_1=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{6}\right)$

$$P(X_1=1) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$P(X_1=1) = \frac{2}{3}$$

La proposition est donc vérifiée pour $n=1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, Supposons que $P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ et montrons que

$$P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

On a d'après ③ ⓐ $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{2}{3} P(X_n = 2)$

Or d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

et $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$ (d'après ②)

Donc $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} \times \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$\cancel{P(X_{n+1} = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$\cancel{P(X_{n+1} = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\cancel{P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{3}\right)}$$

$$P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

d'où la proposition est vérifiée pour $n+1$.

Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3) (c) Puisque X_n est une loi de probabilité

Donc

$$P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n=2)=1$$

$$P(\cancel{X}_n=0)=1-P(X_n=1)-P(X_n=2)$$

$$P(X_n=0)=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$P(X_n=0)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$P(X_n=0)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

(4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$E(X_n)=0\times P(X_n=0)+1\times P(X_n=1)+2\times P(X_n=2)$$

$$E(X_n)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$E(X_n)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$E(X_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}E(X_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

Car $\frac{1}{2}\in\,]-1\,;1[$

Ainsi $E(X_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

et $\lim_{n\to+\infty}E(X_n)=0.$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751