1. Diviseurs communs à deux entiers. PGCD.

1.1. Diviseur d'un nombre entier naturel.

1.1.1. Rappels:

Un nombre entier naturel est un nombre entier positif.

Rappel sur la division euclidienne:

Propriété: Soient a et b deux entiers naturels avec b non nul. Il existe un couple unique d'entiers (q,r) tels que: $a=b\times q+r$ et tel que: $0\leqslant r<b$. q est appelé le quotient de la division euclidienne de a par b et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Remarques : Si le reste de la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier d est nul, alors d est appelé un diviseur de a. Il existe alors un nombre entier k tel que a=kd. On dit aussi que a est un multiple de d.

1.1.2. Rappels sur les critères de divisibilité:

Propriété : Un nombre est divisible par:

- 2 si il se termine par 0; 2; 4; 6; 8.
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- 5 si il se termine par 0 ou 5.
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- 10; 100 ... si il se termine par 0; 00 etc...

1.1.3. Propriétés des diviseurs.

Propriété: Si deux entiers naturels admettent d comme diviseur, alors leur somme et leur produit admettent aussi d comme diviseur.

Preuve: Soient a et b les deux entiers naturels. Comme d est un diviseur de a, il existe un entier k tel que: $a=d\times k$. De même, il existe un entier k' tel que: $b=d\times k'$.

Par suite: $a+b=d\times k+d\times k'=d\times(k+k')$ et donc d est un diviseur de a + b.

Supposons maintenant $a\geqslant b$. On a: $a-b=d\times k-d\times k'=d\times(k-k')$ et donc d est un diviseur de a – b. Le raisonnement est identique si $b\geqslant a$.

1.2. Diviseurs communs à deux entiers.

Définition: On appelle diviseur commun à deux nombres a et b tout nombre d qui est à la fois un diviseur de a et de b.

Définition: L'ensemble des diviseurs communs à deux nombres a et b admet un plus grand élément, appelé Plus Grand Commun Diviseur et noté PGCD(a; b).

Méthodes de recherche:

- Calcul d'un PGCD par soustractions successives:

  Cette méthode est basée sur le fait que si d est un diviseur de deux entiers a et b (avec a<b), alors d est aussi un diviseur de a – b. On remplace la recherche du PGCD de a et b par celle du PGCD de b et a-b. Le processus s'arrête quand on obtient 0, le PGCD est alors le dernier nombre non nul.

  Exemple:

$$\begin{aligned} PGCD(135;75) &= PGCD(75;60) \text{ car } 135-75=60 \\ &= PGCD(60;15) \text{ car } 75-60=15 \\ &= PGCD(60;15) \text{ car } 60-15=45 \\ &= PGCD(30;15) \text{ car } 45-15=30 \\ &= PGCD(15;15) \text{ car } 30-15=15 \\ &= 15 \text{ car } 15-15=0 \end{aligned}$$

- Calcul d'un PGCD par divisions successives: algorithme d'Euclide

Cette méthode est basée sur le fait qu'un diviseur de deux entiers naturels a et b, est aussi un diviseur de b et du reste de la division euclidienne de a par b. On réitère jusqu'à obtenir un reste nul, le PGCD est alors le dernier reste non nul.

Exemple:

$$\begin{aligned} PGCD(135;75) &= PGCD(75;60) \text{ car } 135=75\times1+60 \\ &= PGCD(60;15) \text{ car } 75=60\times1+15 \\ &= 15 \text{ car } 60=15\times4+0 \end{aligned}$$

Remarque: A travers cet exemple, on perçoit l'efficacité de cet algorithme par rapport à celui des soustractions successives, puisqu'il permet d'arriver à la réponse en trois étapes au lieu de six précédemment. Aussi, on priviligiera systématiquement cet algorithme, quand on a le choix.

2. Nombres premiers entre eux. Fractions irréductibles.

2.1. Nombres premiers entre eux.

Définition: Deux nombres entiers non nuls sont dits premiers entre eux si leur PGCD vaut 1.

Exemples:

- 135 et 75 ne sont pas premiers entre eux car leur PGCD vaut 15.

- 45 et 28 sont premiers entre eux car leur PGCD vaut 1.

2.2. Fractions irréductibles.

Définition: Une fraction non simplifiable est dite irréductible.

Propriété: Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode: Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemples:

- $\frac{45}{28}$ est une fraction irréductible car 45 et 28 sont premiers entre eux.
- $\frac{135}{75}$ n'est pas une fraction irréductible, car PGCD(135; 75) = 15. On peut donc simplifier la fraction comme suit:

$$\frac{135}{75}=\frac{135\div15}{75\div15}=\frac{9}{5}.$$

On obtient alors une fraction irréductible.

3. Les ensembles de nombres.

Définitions:

- La liste des entiers naturels forme un ensemble noté **N**.
- La liste des nombres entiers positifs et négatifs forme un ensemble noté **Z**.
- La liste des nombres relatifs dont l'écriture à virgule comporte un nombre fini de chiffres forme un ensemble noté **D**.
- La liste des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme p/q, avec p entier relatif et q entier relatif non nul, forme un ensemble noté **Q**.

Remarques:

- L'ensemble **N** est une partie de **Z**.
- L'ensemble **Z** est une partie de **D**.
- L'ensemble **D** est une partie de **Q**. Pour s'en convaincre, on peut toujours mettre un nombre à virgule sous la forme d'une fraction de dénominateur une puissance de 10.

Existence de nombres n'appartenant pas à **Q**: irrationalité de $\sqrt{2}$.

Pour prouver cela, il faut effectuer un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel, alors il existe deux entiers naturels p et q, premiers entre eux, tels que: $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

On a alors: $p=\sqrt{2}\,q$ et donc: $p^2=2\,q^2$ et donc p^2 est pair, par suite p est pair (en effet si p était impair, alors p^2 le serait aussi (voir plus loin)) et il existe donc k tel que: $p=2\,k$. Par suite, $p^2=4\,k^2$ et donc: $q^2=2\,k^2$.

Par suite, q est pair, et il existe k' tel que: $q=2\,k'$. Et donc p et q ont un diviseur commun, supérieur strictement à 1, et donc ne sont pas premiers entre eux: contradiction.

C'est donc que l'hypothèse faite au départ n'était pas la bonne: $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Définition: Il existe d'autres nombres ne pouvant pas se mettre sous la forme d'une fraction, tels que π et $\sqrt{2}$. La liste de tous les nombres que nous utilisons au collège, fait partie d'un ensemble, appelé ensemble des réels, noté **R**.