



A6-00075
237640
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1)
(1a) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante donc :

$$\forall k \in [0, n-1] \quad a_k \leq a_n$$

Par somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_n = n a_n$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq a_n$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n \leq a_n$.

Et on a :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n \sum_{k=0}^n a_k - (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} a_k}{n(n+1)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k}{n(n+1)} = \frac{a_n - b_n}{n+1} \geq 0$$

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante

(1b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et de limite l donc par le théorème de la limite monotone :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l.$$

D'après (1a), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq a_n \leq l.$$

donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (1a)
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majoré par l .

D'après le théorème de la limite monotone, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $l' \in \mathbb{R}$ tel que $l' \leq l$.

(1c) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } b_{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right)$$

$$b_{2n} = \frac{1}{2} \times \left(b_n + \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \right)$$

Or, par croissance de $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\forall k \in [n, 2n-1], a_k \geq a_n$$

$$\text{Par somme : } \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geq \sum_{k=n}^{2n-1} a_n = n a_n.$$

Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

(1d) Par unicité de la limite, car $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (1b), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l'$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite (énoncé) donc en passant à la limite dans (1c) :

$$l' \geq \frac{l + l'}{2}$$

$$\text{d'où} \quad l' \geq l.$$

$$\text{Or,} \quad l' \leq l \quad (1b)$$

$$\text{Donc} \quad l' = l.$$

$$\text{Bilan :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

2)

(2a) * Démontrons par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}(n) : \begin{cases} u_n \geq 1 \\ u_n \text{ existe} \end{cases} \text{ est vraie.}$$

* Initialisation $u_0 = 1$ (énoncé) donc $u_0 \geq 1$.

$\mathcal{H}(0)$ est vraie.

* Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie.
Montrons $\mathcal{H}(n+1)$.

$$\text{Par } \mathcal{H}(n) : \quad u_n \geq 1 \text{ donc } u_n^2 \geq 1.$$

$$\text{d'où} \quad u_n + u_n^2 \geq 2 \geq 1 \text{ donc } u_{n+1} \text{ existe}$$

car $u_n^2 + u_n \geq 0$

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{u_n^2 + u_n} \geq \sqrt{1}.$$

et donc $u_{n+1} \geq 1$.

$\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie.

* Bilan : Par principe de récurrence :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1 \\ u_n \text{ existe} \end{cases}$$

(2b) Fixons $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_n \geq 1$ donc $u_n \neq 0$ (2a) donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} \stackrel{(2a)}{\geq} 1 \text{ donc } u_{n+1} \geq u_n \text{ (car } u_n > 0)$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Raisonnons par l'absurde en supposant le majorée.

Alors, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$.

En passant à la limite on a par unicité de la limite :

$$l = \sqrt{l^2 + l} \geq 0$$

$$\text{donc } l^2 = l^2 + l$$

$$\text{donc } l = 0.$$

Absurde car $\forall n, u_n \stackrel{(2a)}{\geq} 1$ donc $l \geq 1$.

Ainsi, elle n'est pas majorée et elle est croissante donc :

elle diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(2c)

$$n = 1$$

$$u = 1$$

$$S = 1$$

while $S \leq 1000$

$$u = \sqrt{u^2 + u}$$

$$S = S + u$$

$$n = n + 1$$

end

disp(n)

3)

(3a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \right)$$

$$O_n, \sqrt{1+x} - 1 \underset{n \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} \quad (\text{taux d'accroissement})$$

O_n, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (2b) donc en appliquant cet équivalent à :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} :$$

$$u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \left(\frac{1}{2u_n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$

(3b) f est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1 - 2x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{2\sqrt{x^2+x}}$$

et on a pour $x \geq 1$:

$$2x+1 \geq 2\sqrt{x^2+x} \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 4(x^2+x) \Leftrightarrow 4 \geq 0 \text{ ce qui est vrai}$$

Donc $\forall x \geq 1, f'(x) \geq 0$: f est croissante sur $[1, +\infty[$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{ce est croissante : (2b)})$$

D'où, par croissance de f :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

$$\text{d'où, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq u_{n+2} - u_{n+1}$$

Bilan : $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante

(3c) D'après (3b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - u_{n-1} \leq u_{n+1} - u_n \leq u_{n+2} - u_{n+1}$$

Donc par somme sur $\mathbb{I}2, N\mathbb{I}$ et télescopie ($N \in \mathbb{N}^*$)

$$\sum_{n=1}^{N-1} (u_n - u_{n-1}) \leq u_N - 1 \leq \sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n)$$

et en divisant par N :

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (u_n - u_{n-1}) \leq \frac{1}{N} u_N \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{N}$$

On, $(u_{n+1} - u_n)$ est croissante de limite $\frac{1}{2}$ (3a, 3b)

donc d'après (1d), $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2}$

Par encadrement : $\frac{1}{N} u_N \rightarrow \frac{1}{2}$

et donc $u_N \sim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{2}$

4)

(4a) On a : $\forall n, u_n^2 = u_{n-1}^2 + u_{n-1} = u_{n-1}^2 + u_{n-1} + u_{n-1} \dots = u_0^2 + S_n$

D'où : montrons par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$\mathcal{H}(n)$: " $u_n^2 = S_n + 1$ " est vraie

* pour $n=0$, $S_0 = 0$ (convention) donc $u_0^2 = S_0 + 1$. $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

* pour $n \geq 0$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

On a :

$$u_{n+1}^2 = u_n + u_n^2 = u_n + S_n + 1 = S_{n+1} + 1.$$

$\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie.

Bilan :

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 - 1 = S_n$

D'après (3c), $S_n \sim \frac{n^2}{n-10004}$

(4b) $n=0$

$u = 1$

while $u \leq \text{sqr}(10004) // S_n \leq 10000 \iff u_n \leq \sqrt{10001}^{(3c)} (\leq 34)$

$u = \text{sqr}(u^2 + u)$

$n = n + 1$

end

disp ($u(2) - 1$)

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2 :

1)

(a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, car $t \mapsto e^t$ est strictement positive :

$$F_Y(x) = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a : $[Y \leq x] = [Z \leq \ln x]$ car $\ln$ est croissante bijective sur $\mathbb{R}_+^*$.

d'où, $P(Y \leq x) = \Phi(\ln x)$

(b) Une densité de Y s'obtient par dérivation (a) :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \Phi'(\ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2)

(2a) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. X_n est finie donc admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X_n) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p-1.$$

$X_n^2 = 1$ donc $E(X_n^2) = 1$ et par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1 - (2p-1)^2 = 1 - 4p^2 + 4p - 1 = 4p(1-p)$$

D'où : $E(X_n) = 2p-1, V(X_n) = 4p(1-p)$.

(2b) $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ donc :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m(\Omega) = \{-1, 1\}.$$

Par indépendance des X_k :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, E(T_m) = \prod_{k=1}^m E(X_k) \stackrel{(2a)}{=} (2p-1)^m$$

On a de plus :

$$\left(\forall m \in \mathbb{N}^*, P(T_m = 1) + P(T_m = -1) = 1. \right)$$

$$\left(\forall m \in \mathbb{N}^*, P(T_m = 1) - P(T_m = -1) = E(T_m) = (2p-1)^m \right)$$

(2c) Les deux relations en (2b) nous permettent d'obtenir, par somme et différence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T_n = 1) = \frac{1}{2} (1 + (2p-2)^n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T_n = -1) = \frac{1}{2} (1 - (2p-2)^n)$$

(2d) $p \in]0, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2p-2)^n = 0$ (car $|2p-2| < 1$)

En passant à la limite dans (2c), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = 1) = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = -1)$$

La variable T vérifiant $P(T = 1) = P(T = -1) = \frac{1}{2}$ est clairement une variable aléatoire donc :

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L} T \text{ (loi de Rademacher de paramètre } \frac{1}{2})$$

3)

(3a) Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Par inégalité triangulaire :

$$|T_{n+1} - T_n| = |T_{n+1} - T' + T' - T_n|$$

$$|T_{n+1} - T_n| \leq |T_{n+1} - T'| + |T_n - T'|$$

$$\text{donc si } |T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2} \text{ et } |T_n - T'| < \frac{1}{2}$$

$$\text{On a clairement } |T_{n+1} - T_n| < 1.$$

$$\text{Par suite : } (|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}) \cap (|T_n - T'| < \frac{1}{2}) \subseteq (|T_{n+1} - T_n| < 1)$$

3) En passant dans (3a) à l'événement complémentaire :

$$(|T_{n+2} - T_n| < 1) \in (|T_{n+2} - T'| < \frac{1}{2}) \cup (|T_n - T'| < \frac{1}{2})$$

Or, pour A et B deux événements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \text{ (formule du crible)}.$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(|T_{n+2} - T_n| \geq 1) \leq P(|T_{n+2} - T'| \geq \frac{1}{2}) + P(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2})$$

$$(3c) \text{ On a pour } n \in \mathbb{N}^*, (T_{n+2} - T_n)(\Omega) = \{-2, 0, 2\}.$$

car soit $T_{n+2} = 1$ et $T_n = 1$, soit $T_{n+2} = 1$ et $T_n = -1$ soit les deux sont différents.

Ainsi :

$$P(|T_{n+2} - T_n| \geq 1) = P(\overline{T_n = T_{n+2}}) = 1 - P(T_n = T_{n+2})$$

et, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements :

$$\{[X_{n+2} = 1], [X_{n+2} = -1]\}$$

$$\begin{aligned} P(T_n = T_{n+2}) &= P([T_n = T_{n+2}] \cap [X_{n+2} = 1]) + P([T_n = T_{n+2}] \cap [X_{n+2} = -1]) \\ &= P(X_{n+2} = 1) \text{ car si } X_{n+2} = 1 \text{ alors } T_n = T_{n+2} \end{aligned}$$

$$P(T_n = T_{n+2}) = p$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(|T_{n+2} - T_n| \geq 1) = 1 - p.$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(3d) Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $T_n \xrightarrow{P} T'$ (T' est une variable quelconque)

$$\text{Alors } P(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et } P(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Or, en passant à la limite dans (3b) on a, d'après (3c) :

$$1 - p \leq 0$$

d'où $1 \leq p$: absurde.

Donc : $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité

4)

(4a) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\bar{X}_n$ non constante donc $V(\bar{X}_n) \neq 0$ et :

$$\bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$$

$$= \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k)}} \quad (\text{linéarité et indépendance})$$

$$\bar{X}_n^* \stackrel{(2a)}{=} \frac{\bar{X}_n - (2p-1)}{\sqrt{\frac{4p(1-p)}{n}}} = \sqrt{n} \bar{X}_n \quad \text{car } p = \frac{1}{2}$$

(4b) Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$[U_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq x] = [\ln U_n \leq (\ln x) \sqrt{n}] \quad \text{car } \ln \text{ est croissante bi-jetive sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{d'où} \quad [U_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq x] = [n \bar{X}_n \leq \sqrt{n} \ln x]$$

$$= [\bar{X}_n \leq \frac{\ln x}{\sqrt{n}}]$$

$$[U_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq x] \stackrel{(4a)}{=} [\bar{X}_n^* \leq \ln x]$$

On, par le théorème de la limite centrée, car on a :

* les X_i indépendantes

* les X_i de même loi, de même espérance, de même variance non nulle

$$\bar{X}_n^* \xrightarrow{L} Z.$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq x) = P(Z \leq \ln x) = P(Y \leq x)$$

d'où $(U_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de même loi que Y .

Exercice 3:

1) Fixons $x \in E$.

On a $\langle f(x), x \rangle \stackrel{\text{énoncé}}{=} - \langle x, f(x) \rangle = - \langle f(x), x \rangle$ (symétrie)

et donc :

$$\boxed{\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0}$$

2)

* Fixons $y \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$

Alors $\exists x \in E, y = f(x)$. On fixe un tel $x \in E$.

On a : $\|y\|^2 = \langle f(x), y \rangle = - \langle x, \underbrace{f(y)}_0 \rangle = 0$

donc $y = 0$.

* Par la formule des rangs (E est euclidien donc de dimension finie), on a :

$$\text{rg} f + \dim \text{Ker} f = \dim E.$$

* Par suite, $\text{Ker} f \oplus \text{Im} f = E$.

3) Fixons $x \in E, y \in E$. On a :

$$\langle S(x), y \rangle = \langle (f \circ f)(x), y \rangle$$

$$= - \langle f(x), f(y) \rangle \quad (\text{énoncé})$$

$$= - \left(- \langle x, (f \circ f)(y) \rangle \right) \quad (\text{énoncé})$$

$$\langle S(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle$$

Bilan : S est un endomorphisme symétrique de E .

Finons $d \in \text{Sp}(S)$.

$\exists x \in E, \begin{cases} S(x) = dx \\ x \neq 0_E \end{cases}$ Finons un tel $x \in E$.

On a :

$$\langle S(x), x \rangle = - \langle f(x), f(x) \rangle = - \|f(x)\|^2 \text{ (antisymétrique)}$$

$$\text{et } \langle S(x), x \rangle = d \|x\|^2.$$

Or, $x \neq 0$ donc $\|x\| \neq 0$ donc :

$$d = - \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0.$$

Ainsi, $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbb{R}_-$

4)
(4a) Finons $(x, y) \in (\text{Inf})^2$ On a : $x = f(x')$, $y = f(y')$
* g est linéaire car f l'est et $f(\text{Inf}) \subset \text{Inf}$ donc $g(\text{Inf}) \subset \text{Inf}$
* $\langle g(x), y \rangle = \langle f^2(x'), y \rangle$

$$= - \langle f(x'), f(y) \rangle \text{ (antisymétrique)}$$

$$\langle g(x), y \rangle = - \langle x, g(y) \rangle \quad (g(y) = f(y))$$

g est donc un endomorphisme antisymétrique de Inf .

(4b) D'après 3, (4a), $\text{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-$

De plus, pour $x \in \text{Inf}$, si $t(x) = 0$ alors $f(f(x)) = 0$.
d'où, d'après 2) :

$f(x) \in \ker f \cap \text{Inf}$ donc $f(x) = 0$ d'où $x \in \ker f \cap \text{Inf}$ donc $x = 0$.
d'où $\ker t = \{0_E\} : \emptyset \neq \text{Sp}(t)$.

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques SED#EC B5

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Bilan : $S_p(t) \in \mathbb{R}^*$

5)

(Sa) On a :

$$\langle g(e_1), e_1 \rangle = \langle f(e_1), e_1 \rangle = 0 \quad (1)$$

donc la famille est orthogonale.

De plus, $e_1 \neq 0$ et, si $g(e_1) = 0$ alors $t(e_1) = 0$ donc $0 \in S_p(t)$ (absurde d'après (4b))

donc $g(e_1) \neq 0$.

Une famille de vecteurs non nuls orthogonale étant libre :

$(e_1, g(e_1))$ est libre.

En fin, $e_1 \in E_d(t)$ et, $t(g(e_1)) = g(te_1) = \lambda g(e_1)$
donc $g(e_1) \in E_d(t)$.

Bilan : $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_d(t)$ orthogonale et libre.

(5b) considérons $F_2 = (\text{Vect}(e_1, g(e_1)))^\perp$ dans $E_d(t)$.

Distinguons deux cas :

cas 1 : $F_2 = \{0_E\}$

Alors, $\dim E_2(t) = \dim F_2 + \dim \text{Vect}(e_1, g(e_1)) \stackrel{(5a)}{=} 2$

cas 2 : $F_2 \neq \{0_E\}$

Alors, il existe $e_2 \in F_2, e_2 \neq 0$.

A nouveau, $e_2 \in E_2(t)$.

Donc d'après (5a) :

$(e_2, g(e_2))$ est une famille libre d'éléments de $E_2(t)$ Orthogonale.

On a donc :

$E_2(t) = (\text{Vect}(e_1, g(e_1)) \oplus \underbrace{\text{Vect}(e_2, g(e_2))}_{\text{car orthogonalité}}) \oplus F_3$ où F_3 est l'orthogonal de :

$\text{Vect}(e_1, g(e_1)) \oplus \text{Vect}(e_2, g(e_2))$ dans $E_2(t)$.

En répétant un nombre fini de fois ce processus (on a $E_2(t) \subset E$ donc $\dim E_2(t) \in \mathbb{N}$) on obtient pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.

$E_2(t) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(e_i, g(e_i))$ où les $(e_i, g(e_i))$ sont des familles d'éléments de $E_2(t)$ orthogonales et libre.

La concaténation des bases donne alors :

$(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p))$ est une base orthogonale de $E_2(t)$

6)

$$(6a) \text{ On a : } g^2(e_u) = t(e_u) \stackrel{5)}{=} d e_u$$

et :

$$\|g(e_u)\|^2 = \langle g(e_u), g(e_u) \rangle$$

$$= - \langle g^2(e_u), e_u \rangle \text{ car } g \text{ antisymétrique (4a)}$$

$$= -d \langle e_u, e_u \rangle$$

$$\|g(e_u)\|^2 = -d \|e_u\|^2$$

(6b) On a :

$$g(e_u') = \frac{1}{\|e_u\|} g(e_u)$$

$$\stackrel{(6a)}{=} \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{d} \|g(e_u)\|^2}} g(e_u)$$

$$= \sqrt{-d} \frac{1}{\|g(e_u)\|} g(e_u)$$

$$g(e_u') = \sqrt{-d} e_u''$$

$$\text{et, } g(e_u'') = \frac{1}{\|g(e_u')\|} g^2(e_u') \stackrel{(6a)}{=} \frac{1}{\sqrt{-d} \|e_u\|} t(e_u) \stackrel{e_u \in E_d(k)}{=} \frac{d}{\sqrt{-d}} \frac{1}{\|e_u\|} e_u$$

$$\text{et : } \frac{d}{\sqrt{-d}} = - \left(\frac{-d}{\sqrt{-d}} \right) = -(\sqrt{-d})$$

$$\text{donc : } g(e_u'') = -\sqrt{-d} e_u$$

7)

(7a) D'après 3), t est un endomorphisme symétrique de $\text{Im} f$ (preuve identique).

Donc t est diagonalisable. Or, $t \in \mathcal{L}(\text{Im} f)$

$$\text{Donc : } \dim \text{Im} f = \bigoplus_{d \in \text{Spt}} E_d(t).$$

Or, d'après (5b), $\forall d \in \text{Spt}$, $\dim E_d(t) = 2p_d$ où $p_d \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Donc } \text{rg} f = \text{card}(\text{Spt}(t)) \sum_{d \in \text{Spt}} 2p_d = 2 \times \text{card}(\text{Spt}(t)) \sum_{d \in \text{Spt}} p_d$$

donc : $\text{rg} f$ est pair.

(7b) Distinguons deux cas :

cas 1 : $\text{Ker} f = \{0_E\}$

Alors, d'après 2, $\text{Im} f = E$.

Donc $\dim E = 2n$.

t étant diagonalisable dans E , on a alors :

$$E = \bigoplus_{d \in \text{Spt}} E_d(t)$$

Grâce à 5), on peut alors écrire :

$$E = \text{Vect}(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p); e_{p+1}, g(e_{p+1}), \dots, e_n, g(e_n))$$

Où $E_d(t) = \text{Vect}(e_1, g(e_1), \dots, e_p, g(e_p))$ et où on a,
 on a une valeur propre

ensuite concaténer les autres bases selon le même principe. Chaque famille étant libre et orthogonale, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Vect}(e_i, g(e_i)).$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Pour alors $B' = (e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_n, g(e_n))$.

Associons la valeur propre $d_1 < 0$ à e_1 ; d_2 à e_2 ... d_n à e_n .

En posant, en conservant la notation, de 6):

$B = (e_1', e_1'', \dots, e_n', e_n'')$ On a :

$g(e_1') = \sqrt{-d_1} e_1''$, $g(e_1'') = -\sqrt{-d_1} e_1'$... et comme B' est une base de E , B l'est clairement (on a multiplié par des scalaires non nuls chaque élément).

Pour enfin $\forall i \in [1, n]$, $a_i = \sqrt{-d_i}$.

I vient :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & -a_n & & \\ a_n & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & a_n & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

et B orthonormale car orthogonale (5b) et $\forall i$, $\|g(e_i)\| = 1$ et $\|e_i\| = 1$

cas 2: $\ker f \neq \{0\}$

La base B trouvée précédemment est toujours une base de $\ker f$. En la concaténant (d'après 2)

a) une base $B'' = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in F^*$ de $\ker f$, orthogonale
(qui existe par le théorème de Schmidt), on a :

$B = (e_1', e_1''; e_2', e_2''; \dots; e_n', e_n''; \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ est une

base de E , orthogonale ($\ker f \perp \text{Im } f : \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0$)

En conservant la notation pour les $(a_i)_{i \in [2, n]}$, on a :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -a_n \\ & & & a_n & 0 \end{bmatrix}$$

Conclusion : Par exhaustion, il existe une base B orthogonale de E et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -a_n \\ & & & a_n & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -a_n \\ & & & a_n & 0 \end{bmatrix}$$

Problème

Partie 1 :

1) Fixons $(p, q) \in \mathbb{F}^2$. On a :

$$I(p, 0) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

$$I(0, q) = \int_0^1 (1-x)^q dx = \left[\frac{(1-x)^{q+1}}{-(q+1)} \right]_0^1 = \frac{1}{q+1}.$$

2) Fixons $(p, q) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}^*$.

Posons :

$$\begin{cases} u: x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ v: x \mapsto (1-x)^q \end{cases} \text{ qui sont de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, 1]$$

et telles que :

$$\begin{cases} u': x \mapsto x^p \\ v': x \mapsto -q(1-x)^{q-1}. \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$I(p, q) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx$$

et donc :

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

3) Démontrons par récurrence simple sur $q \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall q : \left\langle \frac{p! q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) \right\rangle \text{ est vraie}$$

* Initialisation :

Pour $q=0$:

$$\text{On a d'après 1) : } \forall p \in \mathbb{N}, I(p, 0) = I(p, 0) = \frac{1}{p+1}$$

$$\text{et } \frac{p! q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) = \frac{1}{p+1} \quad \left(\text{car } \frac{p! q!}{(p+q)!} = 1 \right).$$

$\forall (0)$ est donc vraie.

* Hérédité :

Fixons $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q$ est vraie.

Montrons $\forall q+1$

Fixons $p \in \mathbb{N}$.

On a d'après 2) :

$$I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$$

$$\stackrel{\forall q}{=} \frac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)! q!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0)$$

$$I(p, q+1) = \frac{p! (q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0)$$

$\forall q+1$ est donc vraie.

* Par principe de récurrence :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall q \text{ est vraie.}$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) D'après 3), 1), on a :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

Finas $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$I(n, n) = \frac{n! n!}{(2n)!} = \frac{1}{2n+1} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

Partie 2 :

5) Finas $n \in \mathbb{N}$

* b_n est positive sur $\mathbb{R}$

* b_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} b_n = \int_0^1 b_n(x) dx = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n, n) = 1 \quad (4)$$

Donc b_n est une densité de probabilité.

6) On a $b_0: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par suite, $X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

7)

(7a) $x \mapsto |x b_n(x)|$ est continue sur $[0,1]$.

Par suite $\int_0^1 |x b_n(x)| dx$ existe.

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, X_n admet une espérance et on a :

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n dx$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+1, n)$$

$$\stackrel{4)}{=} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)! n!}{(2n+2)!}$$

$$= \frac{n+1}{2n+2}$$

$$E(X_n) = \frac{1}{2}$$

(7b) On a: $x \mapsto |x^2 b_n(x)|$ est continue sur $[0,1]$.
 X_n^2 admet donc une espérance et on a :

$$E(X_n^4) = \int_0^1 x^2 b_n(x) dx$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(n!)^2} I(n+2, n)$$

$$\stackrel{(4)}{=} \frac{(2n+2)!}{(n!)^2} \frac{(n+2)! \cdot n!}{(2n+3)!}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$E(X_n^2) = \frac{1}{2} \frac{n+2}{2n+3}$$

D'après la formule de Koëning-Huygens, $V(X)$ existe et on a:

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2n+4 - (2n+3)}{2n+3}$$

$$V(X_n) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2n+3}$$

(7c) Fixons $\varepsilon > 0$.

On a : th, $P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) = P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon)$ (7a).

X_n admet une variance (7b) donc d'après la formule de Koëning-Huygens :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} \stackrel{(7b)}{=} \frac{1}{4\varepsilon^2} \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) = 0$.

Ainsi, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} \frac{1}{2}$.

Partie 3:

7) On a :

$$F_0: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8)

(9a) Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a :

$V_{2n+1} = \max(U_1, \dots, U_{2n+1})$ (dernier arrivé donne l'instant d'arrivée le plus grand).

(9b) On a $V_{2n+1}(x) = [0, 1]$

Fixons $x \in [0, 1]$.

$$[V_{2n+1} \leq x] = \bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i \leq x]$$

Par indépendance :

$$P(V_{2n+1} \leq x) = \prod_{i=1}^{2n+1} P(U_i \leq x) = \prod_{i=1}^{2n+1} x$$

Donc :

$$P(V_{2n+1} \leq x) = x^{2n+1}$$

Ainsi :

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques s EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

car pour $x < 0$, $P(V_{2n+1} \leq x) = 0$ et pour $x > 1$, $P(V_{2n+1} > x) = 0$:

$$G_{2n+1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

10)

(10a) On a $V_1 = \min(U_1, \dots, U_{2n+1})$ (premier arrivé donne plus petit instant d'arrivée)

(10b) Fixons $x \in [0, 1]$.

$$\text{On a : } [V_1 > x] \stackrel{(10a)}{=} \bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i > x]$$

Par indépendance :

$$\begin{aligned} P(V_1 > x) &= \prod_{i=1}^{2n+1} P(U_i > x) \\ &= \prod_{i=1}^{2n+1} (1-x) \end{aligned}$$

$$P(V_1 > x) = (1-x)^{2n+1}$$

On, $V_1(x) = [0, 1]$ donc :

$$G_1: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{2n+1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

11) fonction $[V_{n+1}, V_{deuxnplusun}] = \text{simul}(n)$
 $V = \text{grand}(2, 2n+1, 'unf', 0, 1)$
 $V_{un} = \min(V)$
 $V_{deuxnplusun} = \max(V)$
 end fonction

12)

(12a) Fixons $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$

On a :

$$[V_{n+1} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^{2n+1} \mathbb{1}_{[V_i \leq x]} \geq n+1 \right]$$

En effet, si $V_{n+1} \leq x$ alors au moins $n+1$ variable sont inférieures à x .

On, pour $i \in [1, 2n+1]$, $\mathbb{1}_{[V_i \leq x]} \hookrightarrow B(x)$.

et les V_i sont indépendantes donc par le lemme des coalitions, les $\mathbb{1}_{[V_i \leq x]}$ sont indépendantes.

Donc $\sum_{i=1}^{2n+1} \mathbb{1}_{[V_i \leq x]} \hookrightarrow B(2n+1, x)$.

$$\text{et } [V_{n+1} \leq x] = \bigcup_{k=n+1}^{2n+1} \left[\sum_{i=1}^{2n+1} \mathbb{1}_{[V_i \leq x]} = k \right].$$

Par incompatibilité et additivité de P :

$$P(V_{n+1} \leq n) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} P\left(\sum_{i=1}^{2n+1} 1_{[U_i \leq n]} = k\right)$$

$$P(V_{n+1} \leq n) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k} \quad \text{par définition de } B_{2n+1, x}$$

(12b) Une densité s'obtient par dérivation (12a) :

$$g_{n+1}: x \mapsto \begin{cases} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} [k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} - (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k}] & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Faisons $x \in [0,1]$. Montrons :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} - (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k}) = b_n(x).$$

On a :

$$* \sum_{k=n+1}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k} x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} k \times \frac{2n+1}{k} \binom{2n}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} \quad (\text{formule du binôme})$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k} x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} = \sum_{i=n}^{2n} (2n+1) \binom{2n}{i} x^i (1-x)^{2n-i}$$

$$* \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-k} (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k}$$

(symétrie des coefficients binomiaux)

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} (2n+1) \binom{2n}{2n-k} x^k (1-x)^{2n-k}$$

(formule du binôme)

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} (2n+1) \binom{2n}{k} x^k (1-x)^{2n-k}.$$

La différence des deux quantités donne :

$$g_{n+1}(x) = (2n+1) \binom{2n}{n} x^n (1-x)^n - 0 \quad (\text{car } \binom{2n}{2n+1} = 0)$$

et donc en développant le coefficient binomial :

$$g_{n+1}(x) = b_n(x).$$

On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, $g_{n+1}(x) = 0 = b_n(x)$.

Donc : V_{n+1} suit la même loi que X_n .

(12c) On a :

$$1 < 2 < 5 < 8 < 9 < 13 < 23$$

Le script renvoie donc 8 (trois valeurs ^{supérieures} lui sont supérieures, trois valeurs lui sont inférieures).

(12d) Puisque X_n a même loi que V_{n+1} = médiane de $(U_1, \dots, U_{2n+1})$, on peut procéder de la façon suivante :

function X = simul(n).

U = rand(1, 2n+1, 'unif', 0, 1)

X = median(U)

endfunction