G8-00035 177077 Maths S

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2021

Épreuve de : Maths EM Lyon S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie A

1. a) Soit $t \in]0;+\infty[$. $\forall x \in [t;t+1]$, on a :

$0 \leq \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int_t^{t+1} \frac{1}{t+1}\,dx \leq \int_t^{t+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_t^{t+1} \frac{1}{t}\,dx$ par croissance de l'intégrale

$\Rightarrow \frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \cancel{\ln(n+1)}\ \ln(n+1)$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2)$

Or, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+2) \geq \ln(n+1)$ par croissance

$\Leftrightarrow -\ln(n+2) \leq -\ln(n+1)$ de $x \mapsto \ln(x)$

d'après 1.a) $\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) \leq \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \leq -\ln(n) \leq 0$

Ainsi, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

De la même manière, on montre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

L'inégalité de 1.a) nous permet également d'établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$. En effet, pour tout $k \geq 1$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1)$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$

Or d'après 1.a), $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

D'après 1-a), $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

De plus, ~~...~~ $u_n - v_n = -\ln(n+1) + \ln(n)$

$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes. Par théorème, elles convergent vers une même limite γ.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n)}{\ln(n)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)}{\ln(n)} + 1$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \lim_{n \to +\infty} v_n = \gamma$

et $\lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma}{\ln(n)} = 0$.

Par quotient, puis somme, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. a) On a vu que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et convergente vers γ. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \gamma$.

En utilisant un argument analogue pour $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a bien $u_n \leq \gamma \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

J'admets l'inégalité suivante.

```
~~b) function gamma = approx()
   u = 0
   v = 0
while k = 0
while 1/2 (1/2)*(u-v) ≤ 10^-5
 k = k+1
u = u+1/k~~
```

```
b) function gamma = approx()
   u = 1 - log(2)
   v = 1 - log(1)
   k = 1
while (1/2)*(u-v) ≤ 10^-5
 k = k+1
u = u + 1/k + log(k-1) - log(k)
v = v + 1/k + log(k-1) - log(k)
end
Disp((u+v)/2)
endfunction
```

Partie B

4. Soit $n \geq 1$, $x \geq 0$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$

Par critères d'équivalence d'une ~~série~~ série* à termes positifs avec une série de Riemann convergente, on en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ converge

* Cette série est bien à termes positifs.
$\forall x \geq 0, \quad \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \geq 0.$

5. a) $S(0) = 0$ (calcul évident)

$\cancel{S(1)} =$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \geqslant 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = -\frac{1}{n+1} + 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$$

On en déduit donc que $S(1) = 1$.

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{\frac{2k+1}{2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2 \times \frac{1}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + 2$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - 2$$

$$= 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}$$

$$= 2 - \frac{2}{2n+1} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

En posant $j = k - n$ dans la somme, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{2n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{n+j}$$

$$= 2 - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}}$$

c) D'après la formule des sommes de Riemann, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}} = 2 \times \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$

$$= 2 \times [\ln(1+t)]_0^1$$

$$= 2\ln(2)$$

Par passage à la limite et d'après 5. b), on obtient que $S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2))$ $\boxed{= 2\ln\left(\frac{e}{2}\right)}$

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2021

Emplacement QR Code 177 077

Épreuve de : Maths EM Lyon S

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6. a) soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$

D'après 4., $S(y) - S(x)$ a un sens et :

$$S(y) - S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+y} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+y} = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}$$

b. ~~$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ telle que $y \geqslant x$, on a :~~

~~$S(y)$~~

D'après 4, la fonction S est définie sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, d'après 6. a),

$y \geqslant x \Rightarrow S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)} \frac{1}{(k+y)} \geqslant 0$

$\left(y - x \geqslant 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)} \frac{1}{(k+y)} \geqslant 0 \right)$

D'où $S(y) \geqslant S(x)$ et S est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$.

c) soit $x \in [0;+\infty[$, $h \in \mathbb{R}$ telle que $x+h \in [0;+\infty[$

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x+h)} \frac{1}{(k+x)} - \frac{1}{(k+x)^2} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)} \left(\frac{1}{k+x+h} - \frac{1}{k+x} \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-h}{(k+x)^2 (k+x+h)} \right|$$

par inégalité triangulaire $\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|-h|}{|(k+x)^2 (k+x+h)|}$

$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|h|}{k^3}$

car $0 \leqslant \frac{1}{k+x+h} \leqslant \frac{1}{k+x} \leqslant \frac{1}{k}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a bien : $\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$

$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann convergente

Donc $\lim_{h \to 0} |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 0$

Par encadrement, $\lim_{h \to 0} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = 0$

Ainsi, S est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}^+, S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$

7. a) J'admets cette question

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
$n = 1 \quad S(1) = 1$ d'après 5. a)
Soit $n \geq 1$. On suppose que $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Par 7. a), on a :
$S(n+1) = S(n) + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}$

Par principe de récurrence, on a bien démontré la propriété souhaitée.

c) On sait que la suite S définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par ~~S(n) =~~ $S_n = S(n)$ est croissante.
On a montré en question 2 que $\lim_{n \to +\infty} \frac{S(n)}{\ln(n)} = 1$
On sait également que la fonction $x \mapsto S(x)$ est croissante et continue sur $[0; +\infty[$.
Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \frac{S(n)}{\ln(n)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{\ln(x)} = 1$

Donc $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$.

~~7~~ a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)dx - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x}\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{1}{k+x}\, dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{par télescopage.}$$

On a bien : $U_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx$

b) ~~Soit $x \in [0,1]$~~ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

~~$\int_0^1 S(x) - U_n$~~

$$\int_0^1 S(x) - U_n\, dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx$$

Cette intégrale est positive car l'intégrande est positive (somme de termes positifs)

De plus, on, pour tout $k \geq n+1$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{x}{k(k+x)} \leq \frac{x}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \leq x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{(reste de séries convergentes)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^1 x\, dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 S(x)\, dx - U_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

c) D'après 8. c), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a.

$$U_n \leq \int_0^1 S(x)\, dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + U_n$$

$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série de Riemann convergente. Par théorème cette somme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Par encadrement, on en déduit que.

$\int_0^1 S(x)dx = \lim_{n\to+\infty} U_n = \gamma$.

Partie C

9) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

. f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

. Sous réserve de convergence,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ (existe car c'est une intégrale de Riemann convergente).

Soit $a \geq 1$,

$\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a \xrightarrow[a\to+\infty]{} 1$

f est bien une densité de probabilité.

10. a) Si $x < 1$, $F_X(x) = 0$

Si $x \geq 1$, $F_X(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

$= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$

b) $\int_1^{+\infty} x \times f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

C'est une ~~integ~~ intégrale de Riemann divergente. X n'admet donc pas d'espérance.

11. a) Y désigne la partie décimale de X.
La probabilité que celle-ci soit inférieur à x désigne donc la probabilité que X soit compris entre 1 et $1+x$ plus la probabilité que X soit compris entre 2 et $2+x$ etc...

On a donc, pour tout $x \in [0,1]$,

$P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x)$

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : Maths EM Lyon S

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

777 077

$= \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X \leq \ell + x) - P(X \leq \ell)$

$= \sum_{\ell=1}^{+\infty} F_X(\ell+x) - F_X(\ell) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} 1 - \frac{1}{\ell+x} - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)$

$= S(x)$

b. Ainsi, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ S(x) \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

c) D'après 6. c), S est dérivable sur $[0,1[$, F_Y est donc continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1. Y est donc à densité.

~~On pose f~~ Ainsi, une densité de Y peut être la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ S'(x) \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ell+x)^2} \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

12. J'admets cette question

Problème 2

1. a) $\varphi_n(1) = X$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

$\varphi_n(X^i) = X^{i+1} - \frac{1}{n^2}\left((2n-1)X+1\right)(X-1)\, i X^{i-1} + \frac{1}{n^2} X(X-1)^2 i(i-1) X^{i-2}$

$= X^{i+1} + \cancel{\frac{1}{n^2}(X-1)}\cdot((2n-1)X+1$

$= X^{i+1} + \frac{1}{n^2}(X-1)\left((X-1)\, i(i-1) X^{i-2} - ((2n-1)X+1)\, i X^{i-1}\right)$

J'admets cette question

b) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

On montre aisément que $\varphi_n(P+\lambda Q) = \varphi_n(P) + \lambda \varphi(Q)$

φ_n est linéaire

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists \{a_i\}_{i \in [\![0,n]\!]}$ telle que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$\varphi_n(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_n(X^i)$

$\varphi_n(X^0) = \varphi_n(1) = X$ et $\deg(X) < n$

De plus, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $i+1 \leq n$ et $\deg(\varphi_n(X^i)) \leq n$ d'après 1. a)

Enfin, si $i = n$, le coefficient devant le monôme de degré $n+1$ de $\varphi_n(X^n)$ est nulle, ~~donc~~ tout comme celui devant le monôme de degré n. Donc $\deg(\varphi_n(X^n)) \leq n$

Ainsi, $\varphi_n(P)$ est une somme de polynôme de degré inférieur ou égal à n. On en déduit donc que $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

~~1~~ 2. $\varphi_2(1) = X$

$$\varphi_2(X) = \frac{(2-1)^2}{2^2} X^2 + \frac{2(2-1)}{2^4} X + \frac{1}{2^2}$$

$$= \frac{1}{4} X^2 + \frac{1}{2} X + \frac{1}{4}$$

$$\varphi_2(X^2) = \frac{2^2}{2^2} X = X$$

On a bien $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

b). Matriciellement, on remarque que $rg(A_2) = 2 < 3$. Donc 0 est valeur propre

. $A_2 + \frac{1}{2} I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1/4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

~~On~~ En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice, on remarque que $C_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_3)$
~~Les colonnes ne n'étant~~ $A + \frac{1}{2} I_2 \neq 0_{\mathcal{M}_3}(\mathbb{R})$
donc $rg\, A_2 < 3$. $-\frac{1}{2}$ est valeur propre pour A_2.

. $A_2 - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1/4 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}$

En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de cette matrice, on remarque que $-4C_2 - C_3 = C_1$
Donc 1 est valeur propre pour A_2 ($A_2 \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$)

$A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle a donc au plus trois valeurs propres distinctes. Ainsi, $Sp(A_2) = \{-\frac{1}{2} ; 0 ; 1\}$
Par théorème, on en déduit que A_2 est diagonalisables et ses sous espaces propres sont de dimension 1.

. On remarque que $A_2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Donc $E_0(A_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

. ~~$(A_2 + \frac{1}{2}) I_2$~~ $(A + \frac{1}{2} I_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
" " " Donc $E_{-\frac{1}{2}}(A_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

. $(A - I_2)\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

" " " " Donc $E_1(A_2) = \text{vect}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$

c. A_2 étant la matrice de φ_2 dans la base canonique $\mathcal{B}_2$, on en déduit que $Sp(\varphi_2) = Sp(A_2) = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$ et que :

$E_0(\varphi_2) = \cancel{\text{vect}(x - x^2)}\ \text{vect}(1 - x^2)$

$E_{-\frac{1}{2}}(\varphi_2) = \text{vect}(-1 + 2x - x^2)$

$E_1(\varphi_2) = \text{vect}(1 + 4x + x^2)$

Montrons que $\{(1 - x^2) ; -1 + 2x - x^2 ; 1 + 4x + x^2\}$ est libre.

Nommons cette famille $\{P, Q, R\}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ telle que $\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

on a : $\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 x - \lambda_3 x^2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 x^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \\ 6\lambda_2 x = 0 \\ -4\lambda_2 x - 2\lambda_3 x^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc $\{P, Q, R\}$ est libre

C'est une famille libre de trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\varphi_n((X-1)^n) = \varphi_n\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i\right)$ d'après la formule du binôme

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varphi_n(X^i)$ par linéarité de φ_n

$= X + \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}\right)$

par 1.a)

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2021

Emplacement QR Code

1770771

Épreuve de : Maths CCM Lyon S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= X + \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n} \left(\frac{1}{i!(n-i-1)!} X^{i+1} + \frac{2}{(i-1)!(n-i-1)!} X^{i} + i X^{i-1} \right)$$

Mon calcul n'a pas abouti.

4. a) D'après 1.

- $(\varphi_n(X^0))(1) = 1$ si
- $(\varphi_n(X^i))(1) = \frac{1}{n^2} \left((n-i)^2 + 2i(n-i) + i^2 \right)$ $\quad i \geq 1$

$$= \frac{1}{n^2} (n - i + i)^2 = 1$$

b) ~~les colonnes coefficients des~~

Soit C_i ~~une colonne~~ la i-ème colonne de A_n

Les coefficients de C_i correspondent aux coordonnées de $\varphi_n(X^i)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Ainsi, si $(\varphi_n(X^i))(1) = 1$, on en déduit logiquement que la somme des coefficient de C_i est égale à 1.

c) J'admets cette question.

5. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\exists \{a_i\}_{i \in [0,n]}$ telle que

$\cancel{(n+1)}^2$ $\quad P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$(n+1)^2 \varphi_{n+1}((X-1)P) =$

$\Leftrightarrow = (n+1)^2 (\varphi_{n+1}(XP) - \varphi_{n+1}(P))$ par linéarité de φ

$= (n+1)^2 \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_n(X^{i+1}) - a_i \varphi_n(X^i) \right)$

J'admets cette question

b) Si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ, alors

$\varphi_n(P) = \lambda P$

On a donc $(X-1)(n^2 \varphi_n(P) - P)$

$= (X-1)(n^2 \lambda P - P)$

$= (X-1) P(n^2 \lambda - 1)$

D'où $(n+1)^2 \varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1) P(n^2\lambda - 1)$

$\Leftrightarrow \varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1) \dfrac{P(n^2\lambda - 1)}{(n+1)^2}$

Et $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} associé à la valeur propre $\dfrac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}$

6. a) $n=1$ $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$. On sait d'après 3 et 4 que $-1 = \frac{-1+0\times(0+1)}{1}$ et $1 = \frac{-1+1(1+1)}{1}$ sont valeurs propres pour A_1

Soit $n \geq 1$, On suppose que $\left\{ \frac{-n+j(j+1)}{n^2} ; j \in [\![0,n]\!] \right\} = Sp(\varphi_n)$

J'admets l'hérédité.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ φ_n admet $1+n$ valeurs propres distinctes $(= \dim \mathbb{R}_n[X])$. Par théorème, φ_n est diagonalisable et la dimension de ses sous-espaces propres est égale à 1.

7. Par linéarité de φ_n,

$\varphi_n(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n(X^i) = X + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n(X^i)$

Partie B

9. Z_1 indique le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue de la 1ère épreuve. Ainsi, Z_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 (on échange une boule rouge et une boule bleue).

10. ~~$[(Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1$~~ Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $i \in [\![0,n]\!]$

$\bigcup_{j\in\{i-1,i,i+1\}} [Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = j]$ est un système complet d'événements d'après l'énoncé.
~~Ces événements étant~~ D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[Z_{k+1} = i]$,

. $P(Z_{k+1} = i] = \sum_{j\in\{i-1,i,i+1\}} P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = j])$

$P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) = \underbrace{\frac{n-i+1}{n}}_{\text{prendre une boule bleue dans l'urne rouge}} \times \underbrace{\left(\frac{n-i+1}{n}\right)}_{\text{prendre une boule rouge dans l'urne bleue}} P([Z_k = i-1])$

$$= \left(\frac{n-i+1}{2}\right)^2 P(Z_k = i-1)$$

. $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i]) = 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right) P(Z_k = i)$
(échanger deux boules rouges ou deux boules bleues)

. $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P(Z_k = i+1)$
(échanger une boule rouge contre une boule bleue)
On a bien la formule demandée.

11. a)
```
function Z = simule(n, k)
    R = n
  for j = 1 : k
  aleaR = rand()
  aleaB = rand()
  if aleaR <= (R/n) & aleaB <= (R/n) then
    R = R - 1
```

else if alea R ~~T~~ = (R/n) & alea B <= (R/n) then
R = R+1
end
end
z = R
endfunction
(PS : j'ai l'impression que ce programme n'exploite pas toute les possibilités, notamment le cas où il y a un échange de deux boules bleues).

b). function E = esperance(n, k)
X = ~~[illegible]~~ ones(1, n)
for k = 1:n,
X(k) = simule(n, k)
E = (1/n) * sum(X)
end
endfunction
On a effectué une méthode de Monte-Carlo.

c) On peut conjecturer que l'espérance de Z_k ~~vaut $\frac{n}{2}$~~ tend vers $\frac{n}{2}$ quand k tend vers $+\infty$.

12. a) $\Delta_k(\Omega) = \{0; -1; 1\}$

b) $P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=1}^{n} P([Z_{k+1} = i-1] \cap [Z_k = i])$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)$ d'après 10.

$P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} = i+1] \cap [Z_k = i])$

$= \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)$ d'après 10.