



P2-00057
299774
Maths 2E

Code épreuve : 286

Nombre de pages : 15

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première partie.

i) a) i) $1 \leq r \leq 4$

X_1 et à valeurs positives.

si $X_1 > 1$ alors $X_1^r \leq X_1^4 \Leftrightarrow X_1^r \leq 1 + X_1^4$

cependant X_1 peut être compris entre 0 et 1 donc dans ce cas :

$$1 \geq X_1^r \geq X_1^4 \\ (\Rightarrow) X_1^r \leq 1 + X_1^4$$

ainsi pour toute valeur de X_1 : $X_1^r \leq 1 + X_1^4$

ii) si $X_1^r \leq 1 + X_1^4$ alors $E(X_1^r) \leq E(1 + X_1^4)$

$$\Rightarrow 0 \leq E(X_1^r) \leq 1 + E(X_1^4) \text{ par linéarité}$$

or $E(X_1^4)$ existe donc $E(X_1^r)$ existe aussi car elle converge par encadrement

X_1^r admet une espérance

$$iii) \mu = E(X_1)$$

on $P(X_1=0) < 1$, comme X_1 est à valeurs positives

$$\text{on a } \underline{\mu > 0}$$

$$iv) E((X_1 - E(X_1))^2) = E((X_1 - \mu)^2)$$

2) $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements, $\forall n \geq 1 \quad B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$

$$a) B_{n+1} = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = B_n$$

$$\text{car } \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \cup A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \quad \text{donc on a } \underline{B_{n+1} \subset B_n}$$

$$b) B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$$

$$\omega \in B \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} (A_n \cup A_{n+1} \cup \dots)$$

ainsi ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k

c) Comme $B_{n+1} \subset B_n$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements,

donc $P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$ par le lemme de B. Borel monotone.

d) Soient C et D deux événements quelconques.

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \quad \text{par le théorème de Poincaré}$$

or $P(C \cap D) \in [0, 1]$ car c'est une probabilité

ainsi $P(C \cup D) \leq P(C) + P(D)$

e) $P(B_n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$

or d'après b) d) $P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq P(A_n) + P(A_{n+1}) + \dots + P(A_{+\infty})$
en généralisant (A_n couvrant)

ainsi on a bien $P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$

$$f) 0 \leq P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$$

or, quand n tend vers l'infini, $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ ne vaut plus rien

par encadrement on a bien $P(B) = 0$

3/

3) $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires, centrées et de même loi

$$V(Y_1) = E(Y_1^2) = \sigma^2 \quad \text{et comme } Y_1 \text{ est centrée } E(Y_1) = 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$$

a) Selon la loi faible des grands nombres, $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - E(Y_n)| > \varepsilon) = 0$$

or $E(Y_n) = 0$ et $Y_n = \sum_{k=1}^n Y_k \times \frac{1}{n} = \frac{S_n}{n}$ car $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi

$$\text{alors } \underline{P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

b) i) par croissance de la fonction $x \mapsto x^4$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|^4 > \varepsilon^4\right) \quad \text{or } \left|\frac{S_n}{n}\right|^4 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ainsi la valeur absolue peut être enlevée sans fausser le résultat

$$\text{donc } \underline{P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right)}$$

ii) $\left(\frac{S_n}{n}\right)^4$ ne prend que des valeurs positives

donc $\forall \varepsilon > 0$, d'après l'inégalité de Markov, comme Y_1 admet un moment d'ordre 4

$$P\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right) \leq E\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right) \times \frac{1}{\varepsilon^4}$$

$$\underline{(\Rightarrow) P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} E\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right)}$$

Code épreuve : 286

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$c.c) \quad (\Sigma_n)^4 = \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right)^4 \quad \text{on admet}$$

$$iv) \quad E(\Sigma_n^4) = E\left(\sum_{k=1}^n Y_k^4\right) + 3E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^n Y_k^2 Y_j^2\right) + E\left(\sum_{k=1}^n Y_k W_k\right) \quad \text{par linéarité}$$

$$\text{or } E\left(\sum_{k=1}^n Y_k^4\right) = nE(Y_1^4) = n\rho^4 \quad \text{car } Y \text{ suivent la même loi}$$

$$3E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^n Y_k^2 Y_j^2\right) = 3n(n-1)E(Y_1^2 Y_2^2) \quad \text{par linéarité}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{car } \sum_{k=1}^n \text{ a } n \text{ termes} \\ \text{et } \sum_{j=1, j \neq k}^n \text{ a } n-1 \text{ termes} \end{array} \right\} \rightarrow = 3n(n-1)E(Y_1^2)E(Y_2^2) \quad \text{par indépendance}$$

$$= 3n(n-1)\sigma^4$$

$$E\left(\sum_{k=1}^n Y_k W_k\right) \quad \text{or } \forall k \in [1; n] \quad Y_k \text{ et } W_k \text{ sont indépendants par l'absence de collision}$$

or W_k étant une fonction : de $Y_1, \dots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, Y_n$

les variables étant donc indépendants $E(Y_k, W_k) = 0$

$$\text{ainsi } \underline{E(\Sigma_n^4) = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4}$$

$$vi) E\left(\left(\frac{\sum \epsilon_i}{n}\right)^4\right) = E(Y_i^4) = \rho^4$$

$$\text{et aussi par linéarité } E\left(\left(\frac{\sum \epsilon_i}{n}\right)^4\right) = \frac{\rho^4}{n^3} + \frac{1}{n^3} 3(n-1)\sigma^4$$

on obtient.

vi) d'après la question précédente

$$\text{comme } \frac{1}{n^{1/8}} > 0 \quad P\left(\left|\frac{\sum \epsilon_i}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq n^{1/2} E\left(\left(\frac{\sum \epsilon_i}{n}\right)^4\right) \leq n^{1/2} \frac{C}{n^2} = \frac{C}{n^{3/2}}$$

$$\text{on a la } \underline{P\left(\left|\frac{\sum \epsilon_i}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq \frac{C}{n^{3/2}}}$$

$$4) A_n = \left[\left|\frac{\sum \epsilon_i}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right] \quad \forall n \geq 1$$

$$a) \text{ d'après la 3) vi) } P(A_n) \leq \frac{C}{n^{3/2}}$$

$$\text{on } \frac{C}{n^{3/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{d'après la comparaison, et comme } P(A_n) \geq 0$$

$P(A_n)$ est convergente.

$$b) \text{ par le théorème d'écrasement, } \underline{P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

b)

c) d'après la dernière question si n tend vers l'infini on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\sum_n}{n} > \frac{1}{n^{1/8}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\sum_n}{n} > 0\right) = 0$$

or $\frac{\sum_n}{n}$ prend des valeurs positives donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\overline{\frac{\sum_n}{n} > 0}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\sum_n}{n} = 0\right) = 1$$

$$d) P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_n}{n} = E\left(\frac{\sum_n}{n}\right)\right) = 1$$

donc en remplaçant $\frac{\sum_n}{n}$ par $\frac{S_n}{n}$

$$\text{on a } \underline{P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E(X_1) = \mu\right) = 1}$$

$$5) a) S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} X_k = S_n + X_{n+1} \geq S_n$$

or $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à valeurs positives donc S_n est une suite croissante

$$b) S_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega)$$

si $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, la suite converge. Or c'est une suite croissante donc $S_n(\omega) \in \mathbb{R}_+$

$$\text{ainsi } \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0}$$

c) d'après la dernière question, $(S_n(\omega))$ ne peut diverger donc
 $P(S_\infty = +\infty) = 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \text{ainsi} \quad \underline{P(S_\infty = +\infty) = 1} \quad (\text{événement presque sûr})$$

Deuxième partie

$$N_t = \max \{k \in \mathbb{N}, S_k \leq t\}$$

G) a) $0 \leq t \leq t$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, $\forall k \in \mathbb{N} \quad S_k \leq S_{k+1}$

on N_t prend la valeur maximum de k tel que $S_k \leq t$

il en suit que $\underline{N_s \leq N_t}$

b) $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$

$(N_t \geq n)$ signifie que N_t prend une valeur plus grande ^{au plus} que n

$(S_n \leq t)$ veut aussi dire que N_t prend une valeur au minimum à n , voire au dessus si il existe un k tel que $S_k \leq t$ avec $k > n$

Les 2 événements traduisent la même chose donc

$$\underline{(S_n \leq t) = (N_t \geq n)}$$

Code épreuve : 286

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) quand t tend vers l'infinie, on a $S_n \leq +\infty$

ou S_∞ est définie donc comme il y a équilibre des événements

$N_\infty(\omega)$ existe

d) on suppose $N_\infty(\omega) = K$

e)

/

7) (4) while $S \leq t$
 (5) $S = S + X$
 (6) $N = N + 1$

$$8) a) (N_t \geq n) = ((N_t = n) \cup (N_t > n))$$

$$\Leftrightarrow P(N_t \geq n) = P(N_t = n) + P(N_t \geq n+1) \quad \text{par incompatibilité}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P(N_t = n) = P(N_t \geq n+1) - P(N_t \geq n)}$$

$$b) \forall t \geq 0 \quad F_n(t) = P(S_n \leq t)$$

$$i) f_0 = P(S_0 \leq t) = P(0 \leq t) = \underline{1}$$

$$F_1 = P(S_1 \leq t) = P(X_1 \leq t) = \underline{F(t)}$$

$$ii) (N_t \geq n) = (S_n \leq t)$$

$$\text{donc } P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

$$= \underline{F_n(t) - F_{n+1}(t)}$$

9) $(U=k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événement
 par la formule de probabilités totales

$$\begin{aligned} \forall j \in V(\Omega) \quad P(V=j) &= \sum_{k \in U(\Omega)} P((U=k) \cap (V=j)) \\ &= \sum_{k \in U(\Omega)} P_{(U=k)}(V=j) P(U=k) \\ &= \sum_{k \in U(\Omega)} P_{(U'=k)}(V'=j) P(U'=k) \quad \text{car } U \text{ et } U' \text{ suivent la même loi} \\ &= P(V'=j) \end{aligned}$$

et comme $V(\Omega) = V'(\Omega) = \mathbb{N}$, U et V' suivent la même loi.

10) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p

$$W = \min \{ k \geq 1, Z_k = 1 \}$$

a) ~~$P(W=i) = P(Z_1=0, \dots, Z_{i-1}=0, Z_i=1)$~~

l'événement $(W=i)$ signifie que i est la plus petite valeur tel que $Z_i = 1$

donc $\forall k \in [1, i-1], Z_k = 0$

donc $P(Z_i=1) = p$ et $P(Z_k=0) = 1-p$

$$\text{ainsi } P(W=i) = P(Z_1=0) \cap (Z_2=0) \cap \dots \cap (Z_{i-1}=0) \cap (Z_i=1)$$

$$= \underline{p(1-p)^{i-1}} \quad \text{par indépendance}$$

$$b) W_n = \min \left\{ k \geq 1, \sum_{\ell=1}^k Z_\ell = n \right\}$$

i) $\left(\sum_{\ell=1}^n Z_\ell \right) \sim \mathcal{B}(n, p)$ par propriété de la loi binomiale.

$$P(W_n = k) = P\left(\sum_{\ell=1}^k Z_\ell = n\right) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}$$

On admet

ii) $k \geq n$ $j \geq k+1$

L'événement ~~que~~ $(W_n = k)(W_{n+1} = j)$ traduit que k est le plus petit nombre tel que $\sum_{\ell=1}^k Z_\ell = n$, alors j est le plus petit nombre tel que $\sum_{\ell=1}^j Z_\ell = n+1$

on a donc $\sum_{\ell=k}^j Z_\ell = j - k + 1$ ce qui traduit $(W = j - k)$

$$\underline{P(W_n = k)(W_{n+1} = j) = P(W = j - k) = p(1-p)^{j-k-1}} \quad (\text{question a})$$

$$c) P(X_i = i) = p(1-p)^{i-1}$$

i) $(S_n = k)(S_{n+1} = j)$ traduit que en sachant que $\sum_{\ell=1}^n X_\ell = k$ alors $\sum_{\ell=1}^{n+1} X_\ell = j$

Comme les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivent la même loi, on peut dire que

$$(S_n = k)(S_{n+1} = j) = (X_i = j - k) \quad \text{par réécriture des sommes précédentes}$$

$$\text{on a donc } \underline{P(S_n = k)(S_{n+1} = j) = p(1-p)^{j-k-1}}$$

ii) on sait donc que $P(S_n = k)(S_{n+1} = j) = P(W_n = k)(W_{n+1} = j)$

on veut montrer que S_n et W_n ont la même loi

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par récurrence on pose $P(n) : "P(S_n = k) = P(W_n = k)"$ avec k fixé et $n \in \mathbb{N}^*$
 initialisation: $P(1) : "P(S_1 = k) = P(X_1 = k) = p(1-p)^k"$

$$P(W_n = k) = \binom{k-1}{1} p^1 (1-p)^k = p(1-p)^k =$$

donc $P(1)$ est vraie

or pour un n fixé, on suppose $P(n)$ vraie. (Hérédité)

Soit $(S_n = j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événement, d'après la
 formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{j \in S_n(\Omega)} P(S_n = j) (S_{n+1} = k) P(S_n = j) \\ &= \sum_{j \in S_n(\Omega)} P(S_n = j) (S_{n+1} = k) P(W_n = j) \quad \text{car } S_n \text{ et } W_n \text{ suivent la même loi} \\ &= \sum_{j \in S_n(\Omega)} P(W_n = j) (W_{n+1} = k) P(W_n = j) \\ &= P(W_{n+1} = k) \quad \text{par formule des probabilités totales} \end{aligned}$$

ainsi $P(n+1)$ est vraie si $P(n)$ est vraie

par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n = k) = P(W_n = k)$

Comme $S_n(\Omega) = U_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors S_n et U_n suivent la même loi

$$d) P(N_c = n) = P(N_c \geq n) - P(N_c \geq n+1)$$

On admet.

Troisième partie

$$11) a) S_{N_c} \leq t \Leftrightarrow N_c = N_t \text{ d'après la définition de } N_t$$

$$\text{et } t < S_{N_c+1} \Leftrightarrow N_c < N_{t+1}$$

d'après la deux propositions équivalentes qui sont toujours vraies
On S_n prend des valeurs entières donc $S_t \leq S_{t+1} \Leftrightarrow N_t \leq N_{t+1}$

$$\text{on a bien } \underline{S_{N_c} \leq t \leq S_{N_c+1}}$$

$$b) \forall \omega \in \Omega, N_c(\omega) > 0$$

$$\text{donc } \frac{S_{N_c}(\omega)}{N_c(\omega)} \leq \frac{t}{N_c(\omega)} \leq \frac{S_{N_c+1}(\omega)}{N_c(\omega)}$$

(je n'ai pas compris le rôle de T_ω)

on admet c) et d)

e) ainsi le lemme signifie que $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ et $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$

donc par le lemme d'encadrement $\frac{t}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$

on a donc l'événement $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} = \frac{1}{\mu} \right)$ est certain, donc vaut 1

$$12) U \sim U(0,1) \quad Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } U > 1/n \\ 1 & \text{si } U \leq 1/n \end{cases}$$

a) on admet

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } U > 0 \\ 1 & \text{si } U \leq 0 \end{cases}$$

on U prend ses valeurs dans $[0,1]$ et quand $U(\omega) = 0 \Leftrightarrow Y_n(\omega) = 0$

$$\text{on a donc } \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0$$

donc l'événement $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0 \right)$ est quasi certain

$$c) \dots \cancel{P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}}$$

