Code épreuve : 283	Nombre de pages : 40	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2 S ESCP BS / HEC

P1-00096 385195 Maths 2S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

1. a) On a $m = \max\{k \in [\![0 ; r]\!] \quad \lambda_k \neq 0\}$

On a alors $\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_m Q_m = 0$

Or deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients des monômes sont égaux. (*)

Or $\deg(Q_m) = d_m$

Et $\deg(\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_{m-1} Q_{m-1}) \leq d_{m-1} < d_m \quad (m \geq 1)$

donc le coefficient de X^{d_m} du polynôme $\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_m Q_m$ est celui de X^{d_m} de $\lambda_m Q_m$

Or ce coefficient est nul (d'après (*)).

Donc en notant α_m le coefficient de X^{d_m}, on a $\alpha_m \neq 0$ (car $\deg Q_m = d_m$)

Et on a $\alpha_m \lambda_m = 0$. Donc $\boxed{\lambda_m = 0}$.

Ce qui est absurde car $m = \max\{k \in [\![0 ; r]\!] \lambda_k \neq 0\}$

On vient ainsi de démontrer qu'il n'existe pas de réels $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_r Q_r = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{toute famille de polynôme échelonnée en degrés est libre}}$

b) Ainsi, la famille $(Q_0, \dots, Q_r)$ est libre.

Or $\dim F_r = r+1$

Donc la famille $(Q_0, \dots, Q_r)$ est une base de F_r si et seulement si elle est génératrice

On a $\begin{cases} Q_0 \in F_r \\ \vdots \\ Q_r \in F_r \end{cases}$ comme $d_0 < d_1 < \dots < d_r$ et que $\forall i \in [\![0, r]\!]$ $\deg(Q_i) \leq r$, alors

$d_0 = 0$

$d_1 = 1$

$\vdots$

$d_r = r$.

Ainsi $\boxed{\begin{array}{c}\text{la famille } (Q_0, \dots, Q_r) \text{ est une base de } F_r \text{ si et seulement si elle est échelonnée en degrés allant de } 0 \text{ à } r. \\ \text{C'est une condition nécessaire et suffisante}\end{array}}$

C'est une condition nécessaire car si elle ne l'est pas, alors :

$\exists m \in [\![0; r]\!]$ $\forall i \in [\![0; r]\!]$ $\deg(Q_i) \neq M$!

Or $X^m \in F_r$. Et il n'existe aucune combinaison linéaire de Q_i qui vaut X^m

2.a) On a :

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ V_r(x) = x^{\underline{r}} = \prod_{k=0}^{r-1}(x-k)$$

Ainsi $\forall r \in \mathbb{N}\quad V_r(x) = 0 \iff \prod_{k=0}^{r-1}(x-k) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 1$ ou ... ou $x = r-1$

Les racines de V_r sont donc :

$$\boxed{V_r(x) = 0 \iff x \in [\![0\,;r-1]\!]}$$

2b). Ainsi, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}\quad V_r(x) = \prod_{k=0}^{r-1}(x-k)$ et $V_0(x) = 1$

donc $\deg V_r = r$

Ainsi la famille $(V_0, V_1, \dots, V_r)$ est une famille échelonnée en degrés allant de 0 à r.

Ainsi d'après 1b, $\boxed{(V_0, \dots, V_r) \text{ est une base de } F_r}$

2c) Montrons par récurrence sur r que pour tout $r \geqslant 2$: $x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o\left(x^{r-1}\right)$

- initialisation au rang $r = 2$.

$$x^{\underline{2}} = x(x-1)$$
$$= x^2 - x$$
$$= x^2 - \frac{2}{2}(2-1)x$$
$$= x^2 - \frac{2}{2}(2-1)x + 0.$$

Or $0 \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x\right)$

donc $x^{\underline{2}} = x^2 - \frac{2}{2}(2-1)x + o\left(x^{2-1}\right)$

- soit $r \in [\![2 ; +\infty[\![$ tel que $x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1})$

On a : $x^{\underline{r+1}} = \prod_{k=0}^{r} (x-k)$
$$= \prod_{k=0}^{r-1} (x-k) \times (x-r)$$
$$= x^{\underline{r}} \times (x-r)$$
$$= \left(x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1})\right) \times (x-r)$$ d'après l'hypothèse de récurrence
$$= x^{r+1} - \frac{r(r-1)}{2} x^r - r x^r + o(x^r)$$
$$= x^{r+1} - \frac{r(r-1)-2r}{2} x^r + o(x^r)$$
$$x^{\underline{r+1}} = x^{r+1} - \frac{r(r+1)}{2} x^r + o(x^r)$$

Ainsi la propriété est héréditaire

- Et : $\boxed{\forall r \geqslant 2 : x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o\left(x^{r-1}\right)}$

Code épreuve : 283 **Nombre de pages :** 40 **Session :** 2021

Épreuve de : Maths 2S ESCP / HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) a) D'après 2b, $(V_0, \dots, V_r)$ est une base de F_r.

Or pour tout $r \in \mathbb{N}$ $U_r \in F_r$.

Donc U_r s'écrit comme une unique combinaison linéaire de $V_0, \dots, V_r$ quelque soit $r \in \mathbb{N}$

Ainsi, il existe une unique famille $(\sigma(r,k))_{0 \leq k \leq r}$ telle que:

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N} \quad U_r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k) V_k}$$

b) Donc on a:

(1) $\forall r \in \mathbb{N}^* \quad U_r = \sum_{k=1}^{r} \sigma(r,k) V_k + \sigma(r,0) V_0$

$= \sum_{k=1}^{r} \sigma(r,k) V_k + \sigma(r,0)$

Or $U_r(0) = 0^r = 0 \quad (r \geq 1)$.

Et $\forall k \in [\![1 ; r]\!] \quad V_k(0) = 0 \times (0-1) \times \dots \times (0-r+1) = 0$

Donc en évaluant la relation ci dessus en 0, on a :

$\forall r \in \mathbb{N}^* \quad 0 = \sum_{k=1}^{r} 0 + \sigma(r,0)$.

Donc $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^* \quad \sigma(r,0) = 0}$

(2) Donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$ $U_r = \sum_{\ell=1}^{r} \sigma(r,\ell) V_\ell$

Or $U_r(1) = 1^r = 1$

Et $\forall k \in [\![2;r]\!]$ (si $r \geq 2$) $V_k(1) = 1 \times (1-1) \times \ldots \times (1-r+1)$
$= 0$

Donc en évaluant la relation ci-dessus en 1, on obtient :

$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^* \quad \sigma(r,1) = 1}$ (si $r=1$, on a $U_1 = V_1$ donc $\sigma(1,1) = 1$).

De plus, $\forall k \in [\![1; r-1]\!]$ $(r \geq 2)$ $\deg(V_k) = k$

Donc $\deg\left(\sum_{\ell=1}^{r-1} \sigma(r,\ell) V_\ell\right) \leq r-1$

Or $\deg(V_r) = r$.

Et $\deg(U_r) = r$.

De plus deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Donc le coefficient de X^r de U_r est égal à celui de $\sum_{\ell=1}^{r} \sigma(r,\ell) V_\ell$ qui est celui de $\sigma(r,r) V_r$.

Or le coefficient de X^r de U_r vaut 1.

Et celui de V_r vaut 1 aussi car $V_r(x) = \prod_{\ell=0}^{r-1} (x-\ell)$

Donc on a : $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^* \; \sigma(r,r) = 1}$ (dans le cas $r=1$, cf le résultat ci-dessus)

(3)

(4)

3. c) Montrons que : pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in [\![1 ; r]\!]$,
$$\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k\,\sigma(r, k)$$

On a : $\forall r \in \mathbb{N}^* \quad U_r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k) V_k$

Donc $\forall r \in \mathbb{N}^* \quad U_{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \sigma(r+1,k) V_k$

3 d) Montrons par récurrence que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1;r]\!]$ $\sigma(r,k) > 0$ (récurrence sur r) et est un entier naturel

• On a $\sigma(1, 1) = 1 > 0$ d'après (3b2) et est un entier naturel

• Soit $r \geq 1$ tel que $\sigma(r, k)$ est un entier naturel non nul pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1;r]\!]$

alors pour tout $k \in [\![1 ; r]\!]$ $\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k\,\sigma(r,k)$

Or d'après l'hypothèse $\sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*$ donc $(k\,\sigma(r, k)) \in \mathbb{N}^*$
et si $k = 1$, $\sigma(r, k-1) = 0$
si $k > 1$, $\sigma(r, k-1) \in \mathbb{N}^*$ par hypothèse

Ainsi pour tout $k \in [\![1 ; r]\!]$ $\sigma(r+1, k) \in \mathbb{N}^*$

Et pour $k = r+1$, $\sigma(r+1, r+1) \in \mathbb{N}^*$ d'après 3b2.
(car vaut 1)

• Donc $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in [\![1 ; r]\!] \ \sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*}$

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 40 | Session : 2021

Épreuve de : Maths 2S ESCP/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3. e)

~~for r = 2 : 5~~
~~for k = 1 : r~~
~~M = [1]~~ ~~// valeur de sigma (r, 1)~~
~~M = [M,~~

~~for r = 2 : 5~~
~~M = [1]~~ ~~// valeur de σ(r, 1)~~
~~for k = 2 : r~~
~~M = [M ;~~

```
M = ones (5,5)        // M = |1 ... 1|
for i = 2 : 5                |:     :|
  for k = 2 : 5              |1 ... 1|
    M(i,k)=M(i-1,k-1) + k M(i-1,k)

  disp (M(i,k))
  end
end
```

σ(1,1), σ(5,1), σ(5,5)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4. a) Comme $x^r \in F_r$ et que $V_0, \dots, V_r$ est la base canonique de F_r, alors :

pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\exists! \, (s(r,k))_{0 \leq k \leq r} \in \mathbb{R}^{r+1}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad x^r = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k}$$

b) On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \prod_{k=0}^{r-1} (x-k) = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) \, x^k$$

d'où $\displaystyle\prod_{k=0}^{r} (x-k) = \sum_{k=0}^{r+1} s(r+1,k) \, x^k$ ①

et $\displaystyle\prod_{k=0}^{r} (x-k) = \prod_{k=0}^{r-1} (x-k) \times (x-r)$

$$= (x-r) \sum_{k=0}^{r} s(r,k) \, x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{r} s(r,k) \, x^{k+1} - r \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k$$

et en effectuant le changement d'indice $k = k+1$

$$= \sum_{k=1}^{r+1} s(r,k-1) \, x^k - r \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k$$ ②

Ainsi, d'après ① et ②,

$$\sum_{k=0}^{r+1} s(r+1,k) \, x^k = \sum_{k=1}^{r+1} s(r,k-1) x^k - r \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k$$

Et par identification des coefficients des x^k ($k \in [\![1 ; r]\!]$) :

$$\boxed{\forall k \in [\![1;r]\!] \quad s(r+1,k) = s(r,k-1) - r\,s(r,k)}$$

Donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$ $s(r+1,1) = s(r,0) - r\,s(r,1)$

Or : $0^r = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) 0^k$ or si $k \geq 1$ $0^k = 0$
et $0^r = 0$ $(r \geq 1)$

donc $s(r,0) = 0$

Ainsi $\forall r \in \mathbb{N}^*$ $s(r+1,1) = -r\,s(r,1)$

Or $x^1 = \sum_{k=0}^{1} s(1,k) x^k$

donc $x = s(1,1)\,x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
d'où $s(1,1) = 1$

Montrons alors par récurrence que $\forall r \in \mathbb{N}^*$ $s(r,1) = (-1)^{r-1}(r-1)!$

- on a montré ci-dessus que $s(1,1) = 1$
  et $(-1)^{1-1}(1-1)! = 1$

- supposons que $s(r,1) = (-1)^{r-1}(r-1)!$

  On a : $s(r+1,1) = -r\,s(r,1)$
  $= (-r) \cdot (-1)^{r-1} (r-1)!$
  $= (-1)^r\, r!$

- Ainsi on conclue : $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^* \quad s(r,1) = (-1)^{r-1}(r-1)!}$

c) Montrons par récurrence sur r que le signe de $s(r,l)$ est celui de $(-1)^{r+l}$

- On a bien $s(r,1) = (-1)^{r-1}(r-1)!$
$= (-1)^{r+1}(r-1)!$
donc $s(r,1)$ est du signe de $(-1)^{r+1}$.

- supposons que $s(r,l)$ est du signe de $(-1)^{r+l}$ pour tout $l \in [[1;r]]$

alors on sait que :
$\forall l \in [[1;r]]\ s(r+1,l) = s(r,l-1) - r s(r,l)$

or $s(r,l-1)$ est du signe de $(-1)^{r+l-1}$
et $-r s(r,l)$ est du signe de $(-1)^{r+l} \times (-1)$
donc du signe de $(-1)^{r+l-1}$

ainsi en ajoutant deux termes de même signe, on obtient un terme du même signe.

donc pour tout $l \in [[1;r]]$ $s(r+1,l)$ est du signe de $(-1)^{l+r-1}$ à savoir celui de $(-1)^{l+r+1}$,

⊛ et $s(r+1,r+1) = 1$ (c'est le coefficient dominant de X^r)
donc $s(r+1,r+1)$ est du signe de $(-1)^{r+1+r+1} = (-1)^{2(r+1)}$
$= 1$.

- Ainsi $\boxed{\text{pour tout } r \in \mathbb{N}^* \text{ pour tout } l \in [[1;r]]\ s(r,l) \text{ est du signe de } (-1)^{r+l}}$

4 d) On sait que $\sigma(r,r) = 1$ d'après 2b 2
Et d'après la question précédente, on a montré (cf ⊛) que $s(r,r) = 1$

Donc $\boxed{\sigma(r,r)s(r,r) = 1}$

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 40 | Session : 2021

Épreuve de : Maths 2S ESCP / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4. e) On a $x^{\underline{r}} = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k$

donc $\prod_{k=0}^{r-1} (x-k) = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k$

donc en identifiant le coefficient dominant, à savoir celui de x^r, on a : $s(r,r) x^r = x^r$. Donc $s(r,r) = 1$.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^* \quad s(r,r) = 1}$$

Or d'après 4b, si $r \geqslant 2$:

$\forall k \in [\![1; r]\!] \quad s(r,k) = s(r-1,k-1) - (r-1) s(r-1,k)$

donc pour $k = r-1$: $s(r,r-1) = s(r-1,r-2) - (r-1) s(r-1,r-1)$

$s(r,r-1) = s(r-1,r-2) - (r-1)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On $s(2,1) = (-1)^{2-1}(2-1)!$ d'après 4b
$= -1$

Et $s(r,r-1) = s(r-1,r-2) + 1-r$

Montrons par récurrence que $\forall r \in \mathbb{N}^* \; s(r,r-1) = (-1) + (r-2) - \sum_{l=3}^{r} l$
$= r-3-\sum_{l=3}^{r} l$

- $s(2,1) = 1$
  donc $s(3,1) = -3$

- et comme $s(r,r-1) = s(r-1,r-2) + 1-r$, on montre que : $s(r+1,r) = r+1-3-\sum_{l=3}^{r+1} l$

- Donc $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^* \; s(r,r-1) = r-3-\sum_{l=3}^{r} l}$

Partie 2

5. a) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} E(X) = \theta \\ V(X) = \theta \\ E(X^2) = \theta^2 + \theta \end{array}}$

b) On a : $X = X^{\underline{1}}$

$X^2 = X(X-1) + X$

$X^2 = X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}$

On : $X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$

$= X^3 - 3(X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}) + 2X^{\underline{1}}$

$= X^3 - 3X^{\underline{2}} - X^{\underline{1}}$

D'où $X^3 = X^{\underline{3}} + 3X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}$

Et $X^{\underline{4}} = X(X-1)(X-2)(X-3)$

c)

6. a) D'après 5c, X admet des moments de tous ordres.

Donc pour tout $r \in \mathbb{N}$ $E(X^r)$ existe

Or d'après l'énoncé : $X^r = \sum_{\ell=0}^{r} s(r,\ell) X^\ell$

donc par linéarité de l'espérance, comme $E(X^\ell)$ existe

$$\sum_{\ell=0}^{r} s(r,\ell) E(X^\ell) = E\left(\sum_{\ell=0}^{r} s(r,\ell) X^\ell\right)$$

donc on a bien : pour tout $r \in \mathbb{N}$ $E(X^r$ existe).

Donc $\boxed{X^r \text{ admet des moments de tous ordres}}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 40 | **Session :** 2021

Épreuve de : Maths 2S ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b)

c)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) On a : $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall \theta > 0\ \ g(\theta, k) = \ln\left(\frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}\right)$

$= k\ln(\theta) - \theta - \ln(k!)$

Donc g admet une première dérivée partielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et $\boxed{\forall \theta > 0\ \ \partial_1(g)(\theta, k) = \frac{k}{\theta} - 1}$

$\partial_1(g)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

donc $\partial_1(g)(\theta, X)$ est bien une variable aléatoire

Et $\boxed{\partial_1(g)(\theta,X) = \frac{X}{\theta} - 1}$

7.b) On a $X^{\underline{r+1}} + rX^{\underline{r}} = \prod_{k=0}^{r}(X-k) + r\prod_{k=0}^{r-1}(X-k)$

$$= \prod_{k=0}^{r-1}(X-k)\left[X-r+r\right]$$

$$= X\prod_{k=0}^{r-1}(X-k)$$

$$\boxed{X^{\underline{r+1}} + rX^{\underline{r}} = X\,X^{\underline{r}}}$$

On a alors $\mathrm{Cov}(X,X^{\underline{r}}) = E\big((X-E(X))(X^{\underline{r}}-E(X^{\underline{r}}))\big)$

$\mathrm{Cov}(X,X^{\underline{r}}) = E(XX^{\underline{r}}) - E(X)E(X^{\underline{r}})$ d'après la formule de König-Huygens

donc d'après le résultat ci-dessus :

$$\mathrm{Cov}(X,X^{\underline{r}}) = E(X^{\underline{r+1}}) + rE(X^{\underline{r}}) - E(X)E(X^{\underline{r}})$$
$$= E(X^{\underline{r+1}}) + rE(X^{\underline{r}}) - \theta E(X^{\underline{r}})$$

Donc d'après la question 6b :

Ainsi $\boxed{\mathrm{Cov}(X,X^{\underline{r}}) = r\theta^r}$

c) Donc d'après 7a :

$$\mathrm{Cov}\left(\partial_1(g)(\theta,X), X^r\right) = \mathrm{Cov}\left(\frac{X}{\theta} - 1, X^r\right)$$

$$= \frac{1}{\theta} \mathrm{Cov}(X, X^r)$$ par propriété de la covariance

$$= \frac{1}{\theta} r\theta^r$$ d'après 7b

donc $\boxed{\mathrm{Cov}\left(\partial_1(g)(\theta,X), X^r\right) = r\theta^{r-1}}$

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 40 | Session : 2021

Épreuve de : Maths 2S ESCP/HEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III

8.a) On pose : soit $f : \theta \mapsto F(\theta, k_1, \dots, k_n)$

$$\forall \theta > 0 \quad f(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, k_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{k_i}}{k_i!} e^{-\theta}$$
$$= e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{k_i}}{k_i!}$$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\frac{\theta^{k_i}}{k_i!}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car est polynomiale).

Et soit $g : \theta \mapsto G(\theta, k_1, \dots, k_n)$

On a : $\forall \theta > 0 \quad g(\theta) = \ln(f(\theta))$

Or $f(\theta)$ est définie de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et on a :

$\forall \theta > 0 \quad \partial_1(F)(\theta, k_1, \dots, k_n) = f'(\theta)$

Or $f(\theta) = e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{k_i}}{k_i !}$

$= \frac{e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} k_i !} \theta^{\sum_{i=1}^{n} k_i}$

d'où $\forall \theta > 0 \quad \partial_1(F)(\theta, k_1, \dots, k_n) = \frac{-n e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} k_i !} \theta^{\sum_{i=1}^{n} k_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \frac{e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} k_i !} \theta^{\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - 1}$

donc $\boxed{\forall \theta > 0 \quad \partial_1(F)(\theta, k_1, \dots, k_n) = \frac{e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} k_i !} \theta^{\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - 1} \left[-n\theta + \sum_{i=1}^{n} k_i \right]}$

Et $\forall \theta > 0 \quad \partial_1(G)(\theta, k_1, \dots, k_n) = g'(\theta)$

Or $g(\theta) = \ln(f(\theta))$

$= -n\theta + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\theta^{k_i}}{k_i !}\right)$

$= -n\theta + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln(\theta) - \sum_{i=1}^{n} \ln(k_i !)$

d'où $\boxed{\forall \theta > 0 \quad \partial_1(G)(\theta, k_1, \dots, k_n) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} k_i}$

8.b) On a $Z_\theta = \partial_1(G)(\theta, X_1, \dots, X_n)$.

D'où $Z_\theta = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Or $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $E(X_i) = \theta$.

Donc $E(Z_n) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité de l'espérance

Et $\boxed{E(Z_n) = 0}$ donc Z_n est centrée

Et $V(Z_\theta) = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ par propriété de la variance et car les X_i sont mutuellement indépendants

Or $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $X_i \hookrightarrow P(\theta)$ donc $V(X_i) = \theta$

Donc $V(Z_\theta) = \frac{1}{\theta^2} n\theta$

$V(Z_\theta) = \frac{n}{\theta}$

d'où $\boxed{I(\theta) = \frac{n}{\theta}}$

9.a). D'après (R_1), on sait que :

$E(T - \varphi(\theta)) = E(T) - \varphi(\theta)$

$E(T - \varphi(\theta)) = 0$

Donc $\boxed{T \text{ est un estimateur sans biais de } \varphi(\theta)}$

b) La formule R_3 se sert de la formule R_1.

Cependant elle suppose, par la Formule de transfert, que

$\sum_{(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}^n} t(l_1,\ldots,l_n)\,\partial_1(F)(\theta,l_1,\ldots,l_n)$ est convergente.

Or pour utiliser la Formule de transfert, il faut qu'elle soit absolument convergente, ce qui n'est pas précisé dans R_1.

Donc $\boxed{(R_3) \text{ n'est pas une conséquence directe de } (R_1)}$.

10. a) D'après la Formule de transfert, et comme T est un estimateur régulier de $\varphi(\theta)$, alors d'après (R_3) :

$$\forall \theta > 0 \quad \varphi'(\theta) = \sum_{(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}^n} t(l_1,\ldots,l_n)\,\partial_1(F)(\theta,l_1,\ldots,l_n)$$

On reconnaît bien $T \times Z_\theta$ et par formule de transfert.

$$\forall \theta > 0 \quad \varphi'(\theta) = E(T \times Z_\theta).$$

De plus d'après la formule de König Huygens :

$$Cov(T, Z_\theta) = E(T \times Z_\theta) - E(T)E(Z_\theta).$$

Or Z_θ est centrée (cf 8b).

Donc $Cov(T, Z_\theta) = E(T \times Z_\theta)$.

Ainsi $\boxed{\forall \theta > 0 \quad \varphi'(\theta) = E(T \times Z_\theta) = Cov(T, Z_\theta)}$.

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 40	Session :

Épreuve de : Maths 2S ESCP / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10 b). Démonstration de la formule de Cauchy-Schwarz par l'espérance :
Montrons que
si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance :
$V(X)V(Y) \geq |Cov(X,Y)|^2$.

On pose $P(t) = E((X+tY)^2)$

On sait que, par positivité de l'espérance, $P(t) \geq 0$

Or $P(t) = E(X^2) + 2t E(X)E(Y) + t^2 E(Y^2)$

Or P admet un discriminant négatif.

Donc $[2E(X)E(Y)]^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0$

Donc $E(X^2)E(Y^2) \geq [E(X)E(Y)]^2$

En posant $X = T - E(T)$,
et $Y = Z_\theta - E(Z_\theta)$

On a : $V(X)V(Z_\theta) \geq [Cov(T, Z_\theta) + 0]^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc d'après 10a) :

$\forall \theta > 0 \quad I(\theta)\ V(T) \geqslant [\varphi'(\theta)]^2$

or $I(\theta) \neq 0$ (cf 8b).

Donc $\boxed{\forall \theta > 0 \quad V(T) \geqslant \frac{[\varphi'(\theta)]^2}{I(\theta)}}$

11. a) On met : ech = (sum (X , 'r') - n * theta) / theta

On a fait $n \times N$ simulations de $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

et $X = \left(\begin{array}{c} \cdots \\ \\ \\ \\ \end{array}\right)$ ← une simulation

n lignes

$\underbrace{\qquad\qquad}_{N \text{ colonnes}}$

Or, on veut N réalisations de Z_θ d'après l'énoncé

Donc on veut n réalisations d'une loi de Poisson par réalisation de Z_θ.

Donc en faisant sum (X , 'r'), on obtient : ← N colonnes

1 ligne $\{ \; (\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot)$

Et ech renvoie N échantillons de Z_θ.

11. b) On a $V(Z_\theta) = I(\theta)$.

Or la variance correspond à l'écart moyen par rapport à l'espérance (qui est nulle, chose vérifiée par les histogrammes).

Donc on calcule les différentes variances :

$$\frac{10}{4} = 2,5 \qquad \frac{20}{4} = 5 \qquad \frac{40}{4} = 10 \qquad \frac{50}{5} = 10.$$

Donc l'échantillon $(10,4)$ semble correspondre à la figure à la plus petite variance :

D'où
$$\boxed{\begin{array}{l}(10,4) \to \text{Figure C} \\ (20,4) \to \text{Figure B}\end{array}}$$

Pour distinguer $\frac{40}{4}$ et $\frac{50}{5}$, on utilise le théorème limite central. Même si ces variables aléatoires Z_θ ne sont pas réduites, lorsque l'on choisit n très grand, l'histogramme se rapproche d'une cloche

Donc
$$\boxed{\begin{array}{l}(50,5) \to \text{Figure A} \\ (40,4) \to \text{Figure D}\end{array}}$$

12. a) Par stabilité par la somme pour la loi de Poisson, comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta n) \\ \text{Donc } E(S_n) = \theta n \\ \text{Et } V(S_n) = \theta n \end{array}}$$

b) D'après 7c, on a :

$\forall \theta > 0 \ \forall r \in \mathbb{N}^* \quad V(X^r) \geq r^2 \theta^{2r-1}$

Dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)$

D'où si $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta_n)$:

on a $\forall \theta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ V(M_{r,n}) = \dfrac{V(S_n^r)}{n^{2r}}$

Or $V(S_n^r) \geq r^2 (\theta_n)^{2r-1}$

Donc $\boxed{\forall \theta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ V(M_{r,n}) \geq \dfrac{r^2 \theta^{2r-1}}{n}}$

c) On a : $M_{2,n} = \dfrac{S_n(S_n - 1)}{n^2}$

$$\begin{aligned} \text{Et } V(M_{2,n}) &= \frac{1}{n^4} V(S_n(S_n-1)) \\ &= \frac{1}{n^4}\left[E\left(S_n^2(S_n-1)^2\right) - E^2(S_n(S_n-1))\right] \\ &= \frac{1}{n^4}\left[E\left(S_n^4 - 2S_n^3 + S_n^2\right) - E^2(S_n^2 - S_n)\right] \end{aligned}$$

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 40	Session : 2021

Épreuve de : Maths 2S ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

d'où $V(M_{2,n}) = \frac{1}{n^4}\Big[E(S_n^4) - 2E(S_n^3) + E(S_n^2) - E^2(S_n^2) + 2E(S_n^2)E(S_n) - E^2(S_n)\Big]$

Et d'après 6c, on a les moments d'ordre 3 et 4 de S_n :

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} V(M_{2,n}) = 0$.

On $E(M_{2,n}) = \frac{1}{n^2}\left[E(S_n^2) - E(S_n)\right]$

$= \frac{n^2}{n^2}\theta^2$

$E(M_{2,n}) = \theta^2$

donc ~~M~~ $M_{2,n}$ est sans biais.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or toute suite d'estimateur sans biais dont la variance tend vers 0 est une suite convergente.

Donc $\boxed{\text{la suite d'estimateurs } (M_{2,n})_{n \geq 1} \text{ est convergente de } \theta.}$

12. d). On a : $n, k \in \mathbb{N}^*$

$E(S_n^k)$

Partie IV

13.a) On a :

- $E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité de l'espérance

$= \frac{1}{n} n \theta$

$= \theta \qquad (R_1)$

- $V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ par indépendance des X_i.

$= \frac{\theta}{n}$. Donc $V(\overline{X}_n)$ existe. $\qquad (R_2)$

- Et $\forall \theta > 0 \quad p'(\theta) = 1$.

Et $\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{n}\right) \times \partial_1 (F)(\theta, k_1, \dots, k_n)$

donc $\overline{X}_n$ est un estimateur régulier de θ.

13.b) On a : $I(\theta) = \frac{n}{\theta}$ et $\forall \theta > 0 \quad \varphi'(\theta) = 1$.

Donc $\forall \theta > 0 \quad V(\overline{X}_n) \geqslant \frac{1}{\frac{n}{\theta}}$ d'après 10b.

d'où $\boxed{\forall \theta > 0 \quad V(\overline{X}_n) \geqslant \frac{\theta}{n}}$

14.a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- $E(\psi(\alpha)) = E(\overline{X}_n) + \alpha\left(E(Y) - E(\overline{X}_n)\right)$ par linéarité de l'espérance
$= \theta + \alpha(\theta - \theta)$ car Y et $\overline{X}_n$ vérifient R_1
$= \theta$

- Or $\overline{X}_n$ et Y admettent une variance donc par propriété de la variance :
$\psi(\alpha)$ admet une variance.

- Enfin : par linéarité de la somme pour les sommes convergentes :

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n} t(k_1,\dots,k_n)\, \partial_1(F)(\theta, k_1,\dots,k_n) + \alpha\left(\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n} t_Y(k_1,\dots,k_n)\,\partial_1(F)(\theta,\dots,k_n) - \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n} t(k_1,\dots,k_n)\,\partial_1(F)(\theta, k_1,\dots,k_n)\right)$$

est égal à :

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n} \left[t + \alpha(t_Y - t)\right](k_1,\dots,k_n)\,\partial_1(F)(\theta, k_1,\dots,k_n)$$

avec t_Y la fonction telle que $Y = t_Y(X_1,\dots,X_n)$.

donc $\boxed{\psi(\alpha) \text{ est un estimateur régulier de } \theta}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 40 | **Session :** 2021

Épreuve de : maths 2 HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

14 b)

~~D'après la formule de Koenig Huygens :~~

$$\cancel{\mathrm{Cov}(\overline{X}_n, Y) = E(\overline{X}_n Y) - E(\overline{X}_n)E(Y)} \text{ ~~or $\overline{X}_n$ et Y vérifient R_1~~}$$
$$\cancel{= E(\overline{X}_n Y) - \theta^2}$$

~~On a alors~~
$$\cancel{V(\overline{X}_n + \alpha(Y - \overline{X}_n))}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) On a, par formule de variance :

$$V(Y - \overline{X}_n) = V(Y) + V(\overline{X}_n) - 2\,\mathrm{Cov}(Y, \overline{X}_n)$$

donc d'après 14b :

$$\boxed{V(Y - \overline{X}_n) = V(Y) + V(\overline{X}_n) - 2\frac{\theta}{n}}$$

Donc $V(Y) = V(Y - \overline{X}_n) - V(\overline{X}_n) + \frac{2\theta}{n}$

Donc pour que la variance de Y soit minimale, il faut que la variance de $Y - \overline{X}_n$ le soit aussi.

Or $V(Y - \overline{X}_n)$ est toujours positive ou nulle et :

$$V(Y - \overline{X}_n) = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R} \; Y = \overline{X}_n + c$$

Or Y vérifie R_1 donc $E(Y) = c + \theta$
donc $c = 0$

Donc pour que Y soit efficace (de variance minimale) il faut et il suffit que $Y = \overline{X}_n$.

Donc $\boxed{\text{l'estimateur efficace de } \theta \text{ est presque surement unique}}$.

15. a) $n \geq 2$.

On a : $$W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$
$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}_n \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{X}_n^2 \right]$$
$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}_n (n\overline{X}_n) + n\overline{X}_n^2 \right]$$

d'où $$\boxed{W_n = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2 \right]}$$

b) On a : $$X_i - \overline{X}_n = X_i - \theta + \theta - \overline{X}_n$$

d'où $$(X_i - \overline{X}_n)^2 = (X_i - \theta)^2 + (\theta - \overline{X}_n)^2 + 2(X_i - \theta)(\theta - \overline{X}_n)$$

Et en sommant pour i allant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\theta - \overline{X}_n)^2 + 2(\theta - \overline{X}_n) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)$$

Or $$2(\theta - \overline{X}_n) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta) = 2(\theta - \overline{X}_n)[n\theta - n\theta] = 0$$

d'où $$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\theta - \overline{X}_n)^2$$

donc $$W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\theta - \overline{X}_n)^2$$

Et en passant à l'espérance :

$$E(W_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E\left((\theta - \overline{X}_n)^2\right)$$
$$= \frac{n}{n-1} \theta + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} V(\overline{X}_n).$$

or $V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ par indépendance des X_i.

d'où $V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \times n\theta$.

$= \frac{\theta}{n}$

D'où $E(W_n) = \frac{n}{n-1}\theta + \frac{1}{n(n-1)}\theta$

Le résultat trouvé n'est pas le bon, on réessaye à partir de

$$W_n = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right)$$

d'où $E(W_n) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - n\,E(\overline{X}_n^2)\right)$

Or $X_i \hookrightarrow \theta$

donc $E(X_i^2) = \theta^2 + \theta$

Et $E(\overline{X}_n^2) = \frac{1}{n} E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right)$ or $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta n)$

d'où $E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = (\theta n)^2 + \theta n$.

d'où $E(W_n) = \frac{1}{n-1}\left(n(\theta^2+\theta) - (n\theta)^2 - n\theta\right)$

$\boxed{E(W_n) = \theta}$

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 40	Session : 2021

Épreuve de : maths 2 HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15. c) D'après 15a :

$$W_n = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right)$$

Or d'après 5c, X_i admet des moments de tous ordres.

Donc d'après la formule de Koenig-Huygens : X_i^2 admet une variance et :

$$V(X_i^2) = E(X_i^4) - \left(E(X_i^2)\right)^2$$

de plus, $\overline{X}_n^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

or $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta n)$.

Or d'après 5c, on a : $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ admet des moments de tous ordres, donc un moment d'ordre 4 donc d'après la formule de Koenig-Huygens : $\overline{X}_n^2$ admet une variance :

Donc $\boxed{W_n \text{ admet une variance}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) ~~Soit A_n la variable aléatoire certaine égale à a_n.~~

~~Alors on a A_n converge en probabilité vers a.~~

~~Donc d'après le théorème de Slutsky :~~

~~Comme (Y_n) converge en probabilité vers y et (Z_n) vers z, alors :~~

~~$A_n Y_n$~~

Si (Y_n) converge en probabilité vers y et (Z_n) vers z alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - y| > \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Z_n - z| > \varepsilon) = 0$$

~~Donc~~ Or $\left[|\alpha_n(Y_n - Z_n) - a(y-z)| > \varepsilon\right] \subset \left[|\alpha_n Y_n - ay| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|\alpha_n Z_n - az| > \frac{\varepsilon}{2}\right]$

Or α_n converge en probabilité vers a.

donc $\left[|\alpha_n Y_n - ay| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset \left[|\alpha_n - a| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right] \cup \left[|Y_n - y| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right]$

Donc par indépendance, on a :

$$P\left(\left[|\alpha_n(Y_n - Z_n) - a(y-z)| > \varepsilon\right]\right) \leq P\left(|Y_n - y| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right) + P\left(|Z_n - z| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right) + 2P\left(|\alpha_n - a| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

Donc d'après le théorème d'existence d'une limite par encadrement :

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\alpha_n(Y_n - Z_n) - \alpha(y-z)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Donc $\alpha_n(Y_n - Z_n) \xrightarrow{P} \alpha(y-z)$

16) On obtient :

W_n	$\rightarrow$	Figure E
W_n'	$\rightarrow$	Figure F
$\overline{X}_n$	$\rightarrow$	Figure G

W_n' est avec biais donc il n'est pas centré sur l'espérance et est inférieur à 3.

W_n est centré mais ressemble à W_n' donc correspond à E

et $\overline{X}_n$ est différent de W_n et W_n' par méthode de calcul.

Conclusion :

$\overline{X}_n$ est plus centré autour de l'espérance (3) donc est plus efficace (comme le vérifie 14c).