Code épreuve : 297	Nombre de pages : 21	Session : 2021

Épreuve de : Mathematiques EDHEC S

W9-00070 339169 Maths S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

1) a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on a alors, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$

$a_k \leq a_n$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_n$

Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq \frac{1}{n}\times n a_n$

Donc $b_n \leq a_n$

De plus, $b_{n+1}-b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$

$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) + \frac{a_n}{n+1}$

$\geq -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{b_n}{n+1}$ par ce qui précède

$\geq -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$

$b_{n+1}-b_n \geq 0$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $b_n \leq a_n$. Or $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, donc par théorème de comparaison, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l' qui vérifie

$l' \leq l$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{b_n + a_n}{2} \leq \frac{2a_n}{2} \quad \text{d'après 1)a)}$$
$$\leq a_n$$

d) Par l'inégalité de 1)c), on a, en passant à la limite à gauche et à droite :

$$l \leq \frac{l+l'}{2}$$

Donc $\frac{l}{2} \leq \frac{l'}{2}$

Donc $l \leq l'$

Or d'après 1)b), $l' \leq l$.

On conclut donc : $l=l'$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

2) a) Montrons le par récurrence.
Notons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_{n+1} est bien définie si et seulement si $u_n^2+u_n \geq 0$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $HR(n)$: « $u_{n-1}^2+u_{n-1}\geq 0$ et $u_n \geq 1$ »

* $u_0=1$ donc $u_0^2+u_0 = 2 \geq 0$
$u_1=\sqrt{2}\geq 1$, donc $HR(1)$ est vraie

* Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $HR(n)$ est vraie

$u_n^2+u_n = \underbrace{\left(\sqrt{u_{n-1}^2+u_{n-1}}\right)^2 + \sqrt{u_{n-1}^2+u_{n-1}}}_{\geq 0}$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+u_n} \geq \sqrt{1+1} \geq \sqrt{2}$ par $HR(n)$
Donc $u_{n+1}\geq 1$.
Donc $HR(n+1)$ est vraie.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et $u_n\geq 1$.
Ce résultat reste vrai pour $n=0$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sqrt{u_n^2+u_n} - u_n \\ &= \sqrt{u_n(u_n+1)} - u_n \\ &\geq \sqrt{u_n}\sqrt{u_n} - u_n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Montrons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel m

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = m$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n(u_n+1)} - u_n$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \sqrt{m(m+1)} - m \geq \sqrt{2} - 1 > 0$,

ce qui est absurde

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Ainsi, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) On complète le script Scilab par :

```
u = sqrt(u^2 + u)   // u_{n+1} = sqrt(u_n^2 + u_n)
S = S + u   // S_{n+1} = S_n + u_{n+1}
...
disp(n)
```

3) b) f est dérivable sur $[1, +\infty[$ par opération et composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1$$

$$= \frac{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x}}$$

$=$

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 21 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EDHEC S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Si f est croissante sur $[1,+\infty[$, pour tout $(x,y) \in [1,+\infty[^2$ tel que $x \leq y$
$f(x) \leq f(y)$.

En particulier, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq u_n$
$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

Donc $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$

Donc $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2:

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}_-$,

$F_Y(x) = P(Y \leq x)$
$= P(e^Z \leq x)$
$F_Y(x) = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$F_Y(x) = P(e^Z \leq x)$
$= P(Z \leq \ln(x))$ par croissance et bijectivité de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$F_Y(x) = \Phi(\ln(x))$

b) $\lim_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$

Donc F_Y est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.
De plus, elle y est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \Phi(\ln(x)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi, F_Y' est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
Ainsi, Y est une variable aléatoire à densité.

Une densité de Y est donnée par
$$f_Y : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \Phi(\ln(x)) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln(x)^2}{2}\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \quad \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet une variance et

$$E(X_n) = p - (1-p) = 2p-1$$

$$E(X_n^2) = p + (1-p) = 1$$

Donc par formule de Koenig - Huyghens, X_n admet une variance et

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$
$$= 1 - (2p-1)^2$$
$$= 1 - 4p^2 + 4p - 1$$
$$V(X_n) = 4p(p+1)$$

b) $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$

Donc comme $T_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$, $T_n(\Omega) = \{-1, 1\}$

Comme les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes,

$$E(T_n) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k) = (2p-1)^n$$

Ainsi, $P(T_n = 1) - P(T_n = -1) = (2p-1)^n$

c) Comme $T_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a:

$$P(T_n = 1) + P(T_n = -1) = 1$$

Ainsi, en sommant les deux égalités, on a:

$$2P(T_n = 1) = 1 + (2p-1)^n$$

Donc $P(T_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right)$

De même, en soustrayant les deux égalités on a:

$$2P(T_n = -1) = 1 - (2p-1)^n$$

Donc $P(T_n = -1) = \frac{1}{2}\left(1 - (2p-1)^n\right)$

d) $(2p-1) \in]0;1[$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (2p-1)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(T_n = 1) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(T_n = -1) = \frac{1}{2}$

Comme T_n est une variable aléatoire finie, T_n converge en loi vers T', qui suit la loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$.

3) a) Soit $\omega \in \Omega$ vérifiant :

$$\begin{cases} |T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)| < \frac{1}{2} \\ |T_n(\omega) - T'(\omega)| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| &= |T_{n+1}(\omega) - T'(\omega) - T_n(\omega) + T'(\omega)| \\ &\leq |T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)| + |-T_n(\omega) + T'(\omega)| \\ &= |T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)| + |T_n(\omega) - T'(\omega)| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| < 1$

Donc $\omega \in [|T_{n+1} - T_n| < 1]$

Ainsi, on a bien l'inclusion :

$[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}] \subset [|T_{n+1} - T_n| < 1]$

b) Par croissance de la probabilité,

$P([|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}]) \leq P(|T_{n+1} - T_n| < 1)$

Donc $1 - P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \geq 1 - P([|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}] \cap [|T_n - T'| < \frac{1}{2}])$

Donc $P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P([|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}] \cup [|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}])$

$\leq P(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}) + P(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2})$

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 24	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EDHEC S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $T_n(\Omega) = \{-1, 1\}$

Donc $(T_{n+1} - T_n)(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$

Donc $P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = P(|T_{n+1} - T_n| = 2)$
$= P([T_{n+1} - T_n = -2] \cup [T_{n+1} - T_n = 2])$
$= P(T_{n+1} - T_n = -2) + P(T_{n+1} - T_n = 2)$
par incompatibilité des événements

$P(T_{n+1} - T_n = -2) = P([T_{n+1} = -1] \cap [T_n = 1])$
$= P(T_n = 1) P_{[T_n = 1]}(T_{n+1} = -1)$

$= P(T_n = 1) P(X_{n+1} = -1)$
$= \frac{1}{2}(1 - (2p-1)^n)(1-p)$

De même,
$P(T_{n+1} - T_n = 2) = \frac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)(1-p)$

Donc $P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = (1-p)\left(\frac{1}{2}(1-(2p-1)^n) + \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n)\right)$

$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = (1-p)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) a) $\overline{X_n}^* = \dfrac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$

$= \dfrac{\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k)}}$ par linéarité de l'espérance et indépendance des X_i

$\overline{X_n}^* = \dfrac{\overline{X_n} - 2p+1}{\sqrt{\frac{4p(p+1)}{n}}}$

$\overline{X_n}^* = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X_n} - 2p+1}{2\sqrt{p(p+1)}}$

Exercice 3:

1) $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$ car f est un endomorphisme antisymétrique

$= -\langle f(x), x\rangle$ par symétrie du produit scalaire

Donc $\langle f(x), x\rangle = 0$

2) Soit $(x,y) \in \operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Im}(f)$

En particulier, il existe $z \in E$ tel que $f(z) = y$

$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = -\langle f(x), z\rangle$

$= -\langle 0, z\rangle$

$= 0$

Donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)^\perp$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux de E.

Donc $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$

3) Soit $(x,y) \in E^2$.

$\langle s(x), y\rangle = \langle f^2(x), y\rangle$

$= -\langle f(x), f(y)\rangle$

$= -(-\langle x, f^2(y)\rangle)$

$\langle s(x), y\rangle = \langle x, s(y)\rangle$

Donc s est un endomorphisme symétrique.

Soit $\lambda \in Sp(s)$ et $x \in Ker(s-\lambda Id_E) \setminus \{0_E\}$

$\langle s(x), x\rangle = \langle f^2(x), x\rangle = -\langle f(x), f(x)\rangle = -\|f(x)\|^2 \leq 0$

De plus, $\langle s(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$

Donc $\lambda \|x\|^2 \leq 0$.
Comme $x \neq 0_E$, on a $\lambda \leq 0$.

Donc $Sp(s) \subset \mathbb{R}_-$.

4) a) Soit $(x,y) \in Im(f)^2$

$\langle g(x), y\rangle = \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle = -\langle x, g(y)\rangle$

Donc g est un endomorphisme antisymétrique de $Im(f)$.

b) $Im(f) \cap Ker(f) = \emptyset$ d'après 2)
Donc partout $x \in Im(f)$, $g(x) \neq 0$.

Soit $\lambda \in Sp(t)$ et $x \in Ker(t-\lambda Id_E) \setminus \{0_E\}$
$\langle t(x), x\rangle = \langle g^2(x), x\rangle = -\langle g(x), g(x)\rangle = -\|g(x)\|^2$
< 0 car $g(x) \neq 0$

Or $\langle t(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2$.
Comme $\|x\|^2 > 0$, on a $\lambda < 0$
Donc $Sp(t) \subset \mathbb{R}_-^*$.

5) a) On calcule :

$\langle e_1, g(e_1)\rangle = -\langle g(e_1), e_1\rangle = -\langle e_1, g(e_1)\rangle$
car g est un endomorphisme antisymétrique

Donc $\langle e_1, g(e_1)\rangle = 0$
Donc $(e_1, g(e_1))$ est une famille orthogonale de $E_\lambda(h)$.

Comme elle ne contient pas le vecteur nul, car $e_1 \neq 0_E$ et $e_1 \notin \mathrm{Ker}(g)$, c'est donc une famille libre de $E_\lambda(h)$.

6) a) $\|g(e_k)\|^2 = \langle g(e_k), g(e_k)\rangle$
$= -\langle g^2(e_k), e_k\rangle$
$= -\langle h(e_k), e_k\rangle$
$= -\langle \lambda e_k, e_k\rangle$
$\|g(e_k)\|^2 = -\lambda\|e_k\|^2$

b) $g(e_k') = \dfrac{1}{\|e_k\|} g(e_k)$ par linéarité de g

$= \dfrac{\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{-\lambda\|e_k\|^2}} g(e_k)$

$= \dfrac{\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\|g(e_k)\|^2}} g(e_k)$ par 6)a)

$= \dfrac{\sqrt{-\lambda}}{\|g(e_k)\|} g(e_k)$

$g(e_k') = \sqrt{-\lambda}\, e_k''$

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 21 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EDHEC S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De même, $g(e_n'') = \dfrac{1}{\|g(e_n)\|} g(e_n)$

$$= \frac{1}{\sqrt{\|g(e_n)\|^2}} g(e_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}\,\|e_n\|^2} g(e_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}\,\|e_n\|}$$

Problème :

Partie 1 :

1) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$$I(p,0) = \int_0^1 x^p \, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1$$

$$I(p,0) = \frac{1}{p+1}$$

$$I(0,q) = \int_0^1 (1-x)^q \, dx = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1$$

$$I(0,q) = \frac{1}{q+1}$$

2) Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ et $x \mapsto (1-x)^q$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$.

Donc par intégration par parties,

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \left(-q(1-x)^{q-1}\right) dx$$

$$= 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} \, dx$$

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

3) * Soit $p \in \mathbb{N}$, $I(p,0) = \frac{1}{p+1} = \frac{p!\,0!}{(p+0)!} I(p+0,0)$

Donc H_0 est vraie.

* Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que H_q est vraie

Soit $p \in \mathbb{N}$, $I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q)$ d'après 2)

$= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!\,q!}{(p+q+1)!} I(p+q+1,0)$

par H_q

$I(p,q+1) = \frac{p!\,(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1,0)$

Donc H_{q+1} est vraie.

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}$, H_q est vraie.

4) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$ d'après 3)

$= \frac{p!\,q!}{(p+q)!} \frac{1}{p+q+1}$ d'après 1)

$I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

Partie 2 :

5) $\forall x \in [0,1], \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n \geq 0$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b_n(x) \geq 0$.

De plus, $b_n(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} b_n(x)$

et $b_n(1) = 0 = \lim\limits_{x \to 1^+} b_n(x)$

Donc b_n est continue en 0 et 1, donc sur $\mathbb{R}$.

Enfin on calcule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n dx$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n,n)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\, dx = 1$$

Donc b_n est une densité de probabilité.

6) Une densité de X_0 est donnée par :

$$b_0 : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En intégrant, on obtient donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(X_0 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Donc $X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 21	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EDHEC S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) a) X_n possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\,dx$ converge absolument.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{n+1}(1-x)^n dx$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+1, n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n+1)!\,n!}{(2n+2)!} \text{ d'après 4)}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)dx = \frac{1}{2}$

Donc X_n admet une espérance et $E(X_n) = \frac{1}{2}$

b) De la même manière,

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{n+2}(1-x)^n dx$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+2, n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{n+2}{n+1} I(n+1, n+1) \text{ d'après 2)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_n(x)\,dx = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{n+2}{n+1} \times \frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

d'après 4)

$$= \frac{(n+2)\, \cancel{n!}\, (n+1)!}{(n!)^2 (2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{(n+2)\, (n+1)!}{n!\, 2\cancel{(n+1)}(2n+3)}$$

$$= \frac{(n+2)\, \cancel{n!}}{\cancel{n!}\, 2(2n+3)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_n(x)\,dx = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

Donc X_n admet un moment d'ordre 2, donc une variance et par formule de Koenig-Huyghens,

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2n+4-2n-3}{4(2n+3)}$$

$$V(X_n) = \frac{1}{4(2n+3)}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon)$$

$$\leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2}$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) = 0$

Donc $X_n \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$

Partie 3:

8) Les U_i suivent la loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

9) a) V_{2n+1} représente l'instant d'arrivée de la dernière personne à être arrivée, soit l'instant d'arrivée le plus grand.

Donc $V_{2n+1} = \max(U_1, \dots, U_{2n+1})$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$G_{2n+1}(x) = P(V_{2n+1} \leq x)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i \leq x]\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{2n+1} P(U_i \leq x) \text{ par indépendance des } U_i$$

$$= P(U_1 \leq x)^{2n+1} \text{ car les } U_i \text{ suivent la même loi}$$

$$G_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x^{2n+1} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

10) a) De la même manière qu'en 9),
$V_1 = \min(U_1, \dots, U_{2n+1})$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(V_1 > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i > x]\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{2n+1} P(U_i > x) \quad \text{par indépendance des } U_i$$
$$= \prod_{i=1}^{2n+1} (1 - P(U_i \leq x))$$
$$= (1 - P(U_1 \leq x))^{2n+1}$$

$$P(V_1 > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^{2n+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_1(x) = 1 - P(V_1 > x)$$

$$G_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^{2n+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

11)
```
function v = simul_V1_V2n+1 (n)
    v = grand(1,2*n+1, 'unf', 0,1);
    w = 0 ; z = 1
    for i = 1: 2*n+1
        if w < v(i)
            w = v(i)
        end
        if z > v(i)
            z = v(i)
    end end
```

Suite du programme page 21

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 21 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques EDHEC S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite du programme:

```
    disp(w, 'V2n+1 = ')
    disp(z, 'V1 = ')
endfunction
```

12) c) Le programme renvoit le nombre médian de la suite de nombres: 8, 2, 9, 13, 27, 1, 5

Il renvoit donc : $V = 8$

d) function x = simul-Xn(n)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751