



T9-00053
772292
Maths 2S

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 5

Session : 2021

Épreuve de : Maths 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1

1) a) On a $\deg(Q_k) = d_k$ par $k \in [0, n]$

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k Q_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^m \lambda_k Q_k = 0, \text{ par définition de } m$$

Or les degrés de Q_k sont distincts donc $\sum_{k=0}^m \lambda_k Q_k \neq 0$.

Ainsi il n'existe pas de m , c est absurde.

Donc $\forall k \in [0, n], \lambda_k = 0$

Donc on a montré que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est libre.

b) Si $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de F_n
alors $(Q_0, \dots, Q_n)$ est génératrice de F_n .
Donc, par échelonnage des degrés $\deg(Q_n) = n$

En effet, si $\deg(Q_n) > n$

Alors $\dim F_n = n+1$ et $\text{card}(Q_0, \dots, Q_{n-1}) = n$

Donc ce n'est pas une base de F_n

Donc $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de F_n si $\deg(Q_n) = n$

Il vient par suite que : $\forall k \in [0, n], \deg(Q_k) = k$

Donc c'est une condition nécessaire et suffisante

2) Montrons que: $V_2(h) = 0$ pour $h \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
car le produit à un terme nul

Donc les racines de V_2 sont: $\{j \in \mathbb{N} \mid j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$
 $= \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

b) On a $\text{card}(V_0, \dots, V_n) = n+1$
et $\dim F_n = n+1$

On ~~va~~ Ainsi montrons que la famille $(V_0, \dots, V_n)$ est libre
et on aura montré que c'est une base.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k V_k = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

Montrons par récurrence que $\lambda_j = 0$ pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Pour $j=0$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k V_k(0) = \lambda_0 = 0$

Donc $\lambda_0 = 0$

Supposons que pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$

Alors $\sum_{k=p+1}^n \lambda_k V_k = 0$

En évaluant en $p+1$

$$\sum_{k=p+1}^n \lambda_k V_k(p+1) = 0$$

Or $p+1$ est racine de V_k si $k > p+1$

Donc $\lambda_{p+1} V_{p+1}(p+1) = 0$

Or $p+1$ est racine de V_{p+1} donc $\lambda_{p+1} = 0$

Par récurrence, on a montré que $(v_0, \dots, v_n)$ est libre.
 C'est donc une base de F_n .

2.c) Par récurrence: montrons que $x^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{n}{2}} - \frac{n(n-1)}{2} x^{\frac{n}{2}-1} + o(x^{\frac{n}{2}-1})$

Pour $n=2$, $x^{\frac{2}{2}} = x(x-1) = x^2 - x$

Donc $x^{\frac{2}{2}} = x^2 - \frac{2}{2} \times 1x + o(x^{\frac{2}{2}-1})$

Supposons la propriété pour un n fixé de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Alors $x^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{n}{2}} - \frac{n(n-1)}{2} x^{\frac{n}{2}-1} + o(x^{\frac{n}{2}-1})$

Or $x^{\frac{n+1}{2}} = x^{\frac{n}{2}} \times (x-2)$

Donc $x^{\frac{n+1}{2}} = \left(x^{\frac{n}{2}} - \frac{n(n-1)}{2} x^{\frac{n}{2}-1} + o(x^{\frac{n}{2}-1}) \right) \times (x-2)$

$$= x^{\frac{n+1}{2}} - 2x^{\frac{n}{2}} - \frac{n(n-1)}{2} x^{\frac{n}{2}} + o(x^{\frac{n}{2}})$$

$$= x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n}{2}} \left[2 + \frac{n(n-1)}{2} \right] + o(x^{\frac{n}{2}})$$

$$= x^{\frac{n+1}{2}} - \frac{1}{2} n(n+1) x^{\frac{n}{2}} + o(x^{\frac{n}{2}})$$

Donc la propriété est héréditaire.

On a bien: $\forall n \geq 2, x^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{n}{2}} - \frac{n(n-1)}{2} x^{\frac{n}{2}-1} + o(x^{\frac{n}{2}-1})$

3)a) Soit $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de F_n

On $v_n \in F_n$

Donc il existe une unique famille $o(n, k)$ de réels tels
 que: $v_n = \sum_{k=0}^n o(n, k) v_k$

3b) 1) $\deg(V_2) = 2$ et $U_2 = X^2$
et $\deg(V_0) = 0$

la décomposition est unique,

Donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $U_2 = X^2 + 0 \times V_0$ et puisque $(V_k)_{k \geq 0}$ est libre.
on peut dire que $\sigma(r, 0) = 0$ si $r \in \mathbb{N}^*$

2) Parallelement, $\deg(V_2) = 2$ et $\forall k \in \{0, 1\}$, $\deg(V_k) = k < 2$

Donc puisque la décomposition est unique, et que U_2 est de degré 2,
 $U_2 = V_2 + Q$ avec $\deg(Q) < 2$
↳ ~~on peut~~ grâce à l'identification des coefficients dominants

Donc $\sigma(2, 2) = 1$

Puisque $V_2 = P \cdot X$ on développe avec $\deg P \geq 1$

Alors $\sigma(2, 1) = 1$ puisque seule V_1 peut compenser le degré 1.

Donc $\sigma(2, 1) = 1$

3) Par unicité de la décomposition et en utilisant la question 2.c),

$U_n = X^n + 0 \times X^{n-1}$

← 2.c) + unicité.

On a $U_n = X^n + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-1} + Q$ avec $\deg Q < n-1$
 $\sigma(n, n) = 1$

Donc par récurrence, et puisque le coefficient dominant de V_{n-1} est 1

Alors $\sigma(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

3.c) $U_{n+1} = \sum_{h=0}^{n+1} \sigma(n+1, h) V_h = U_n \times X$
 $= \sum_{h=0}^n \sigma(n, h) V_h \times X$
 $= \sum_{h=0}^n \sigma(n, h) V_h \times (X - h + h)$
 $= \sum_{h=0}^n \sigma(n, h) V_{h+1} + h \sum_{h=0}^n \sigma(n, h) V_h$
 $= \sum_{h=0}^n \sigma(n, h+1) V_h + h \sum_{h=0}^n \sigma(n, h) V_h$

En identifiant, par unicité, il vient: $\forall h \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(n+1, h) = \sigma(n, h-1) + h \sigma(n, h)$

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 5

Session : 2021

Épreuve de : Maths 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$3c] \sigma(n+1, h)$$

$$3d] \text{ Montrer que pour tout } h \in \mathbb{I}1, 2\mathbb{I}, \sigma(n, h) > 0 \\ \text{et } \sigma(n, h) \in \mathbb{N} \\ \text{Donc } h \times \sigma(n, h) > 0$$

$$\text{Or } \sigma(n, h-1) \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc } \forall h \in \mathbb{I}1, 2\mathbb{I}, \sigma(n+1, h) \in \mathbb{N}^*$$

Par récurrence sur n , montrons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n+1, h) \in \mathbb{N}^*$

Pour $n=1$, c'est vérifié, car on a bien $\sigma(2, h) \in \mathbb{N}^*$ pour tout $h \in \mathbb{I}1, 2\mathbb{I}$

Supposons que ce soit vrai pour un n fixé de $\mathbb{N}^*$.

$$\text{A la d'après 3c, } \sigma(n+1, h) = \sigma(n, h-1) + h \times \sigma(n, h) \\ \text{Donc } \sigma(n+1, h) \in \mathbb{N}^* \quad \begin{matrix} \in \mathbb{N}^* \text{ si } h > 1 \\ \text{ou sinon} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \in \mathbb{N}^* \\ \text{si } h=1 \end{matrix}$$

$$\text{Donc pour tout } (h, n) \in \mathbb{I}1, 2\mathbb{I} \times \mathbb{N}^*, \sigma(h, n) \in \mathbb{N}^*$$

3e]

$$U = \text{ones}(5, 5)$$

$$U = \text{ones}(5, 5)$$

$$U(1, 0) = U(2, 0) = U(3, 0) = U(4, 0) = U(5, 0) = 0$$

$$U(1, 1) = U(2, 1) = U(3, 1) = U(4, 1) = U(5, 1) = 1$$

$$U(1, 2) = U(2, 2) = U(3, 2) = U(4, 2) = U(5, 2) = 1$$

$$\text{for } i = 1:5$$

$$\text{for } j = 2:5$$

$$U(i+1, j) = U(i, j-1) + j \cdot U(i, j)$$

end

end

$$\text{disp}(U)$$

4a) $(U_0, \dots, U_n)$ est une base de F_n

$$\text{Or } X^2 \in F_n$$

Puis il existe une unique famille $(s(n, h))_{0 \leq h \leq n}$ de réels tels que

$$X^2 = \sum_{h=0}^n s(n, h) X^h$$

En passant on écrit on se :

Il existe une unique famille $(s(n, h))_{0 \leq h \leq n}$ tels que

$$X^2 = \sum_{h=0}^n s(n, h) X^h$$

$$4b) \text{ On a: } x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} s(n, k) x^k$$

$$\text{et } x^{n+1} = x^2 \times (x-2)$$

$$= \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k (x-2)$$

$$= \sum_{k=0}^n s(n, k) x^{k+1} - 2 \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} s(n, k-1) x^k - 2 \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k$$

$$\text{On a: } s(n, n+1) x^{n+1} + \sum_{k=1}^n [s(n, k-1) - 2s(n, k)] x^k + s(n, 0) x^0$$

Par unicité, on doit avoir: $\forall k \in [1, n]$

$$\underline{s(n+1, k) = s(n, k-1) - 2s(n, k)}$$

$$\Delta) \text{ Donc } s(n, 1) = -s(n, 0) + s(n, 1)$$

$$\text{On a } s(n+1, 1) = s(n, 0) - 2s(n, 1)$$

Or $s(n, 0) = 0$ car sinon cela pose problème et $n \geq 0$
 $\uparrow$
 n n'a pas de degré.

$$\text{Donc } s(n+1, 1) = -2s(n, 1)$$

Par récurrence C'est une suite que l'on reconnaît

$$\text{Posons } U_{n+1} = s(n+1, 1)$$

$$\text{Alors } U_{n+1} = -2U_n$$

$$\text{Donc } U_n = (-1)^{n-1} 2^{n-1} U_1 \text{ Donc } U_n = (n-1)! (-1)^{n-1} \times s(1, 1)$$

$$\text{Or } s(1, 1) = 1$$

$$\text{Donc } \underline{s(n, 1) = (n-1)! \times (-1)^{n-1}}$$

4c) Fixons $2 \in \mathbb{N}^*$

Par récurrence sur h , montrons que le signe de $s(n, h)$ est celui de $(-1)^{n+h}$

C'est vrai pour $h=1$ d'après la propriété valant la question précédente.

Supposons que cela soit vrai pour un h fixé de $\mathbb{N}$, $h \geq 1$

$$s(n+1, h+1) + 2s(n, h+1) = s(n, h)$$

d) On sait que $o(n, n) = 1$

De plus le coefficient dominant de X^2 est 1 est celui de $\sum_{k=0}^2 s(n, k) X^k$ est $s(n, n)$

$$\text{Donc } s(n, n) = 1$$

$$\text{Donc } o(n, n) s(n, n) = 1$$

4e) $s(n, n) = 1$, vu la question précédente.

$$\text{Or } \sum_{k=2-1}^2 o(n, k) s(k, n) = 0$$

$$\text{Donc } o(n, n-1) \times s(n-1, n-1) + o(n, n) s(n, n-1) = 0$$

Donc puisque $n \geq 2$

$$\begin{aligned} o(n, n-1) \times 1 + o(n, n) \times s(n, n-1) &= 0 \\ \text{Donc } s(n, n-1) &= -o(n, n-1) = -\frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 5

Session : 2021

Épreuve de : Maths 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2:

$$Sa) \underline{E(x) = \theta \quad \text{et} \quad V(x) = \theta}$$

Or d'après Boëing Huyans, $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$
 Donc $\underline{E(x^2) = \theta + \theta^2}$

$$b) \underline{X = X^1} \mid$$

$$X^2 = X(X-1) = X^2 - X$$

$$\text{Donc } \underline{X^2 = X^2 + X^1}$$

$$X^3 = X(X-1)(X-2)$$

$$= X^3 + 2X - 3X^2$$

$$\text{Donc } X^3 = X^3 + 3X^2 - 2X$$

$$= X^3 + 3(X^2 + X^1) - 2X^1$$

$$= X^3 + 3X^2 + X^1$$

$$X^4 = X(X-1)(X-2)(X-3)$$

$$= (X^3 + 2X - 3X^2)(X-3)$$

$$= X^4 + 2X^2 - 3X^3 - 3X^3 - 6X + 9X^2$$

$$= X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X$$

$$\text{Donc } X^4 = X^4 + 6X^3 - 7X^2 + 6X$$

$$= X^4 + 6(X^3 + 3X^2 + X^1) - 7(X^2 + X^1) + 6X^1$$

$$= \underline{X^4 + 5X^3 + 6X^2 + 11X^1}$$

c) * D'après le théorème de transfert,
 son moment d'existence; c'est à dire converge absolu

$$E(X^k) = \sum_{j=0}^{+\infty} j^k P\{X=j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} j^k \times e^{-\theta} \frac{\theta^j}{j!}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j^{k+2} = o_p(\theta^j)$
 et $\theta^j = o_p(j!)$

Donc $\lim_{j \rightarrow +\infty} j^{k+2} \frac{\theta^j}{j!} = 0$ donc $\frac{j^k \theta^j}{j!} = o\left(\frac{1}{j^4}\right)$

Donc d'après les critères de convergence des séries à terme positive, la série $\sum_{j=0}^{+\infty} j^k P\{X=j\}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Donc X admet un moment de tout l'ordre.

d) $X^2 \in F_2$ et $(V_0, \dots, V_n)$ est une base de F_2

Donc $\exists (a_0, \dots, a_n)$, $X^2 = \sum_{k=0}^n a_k V_k$ donc $(X^2)^j = \left(\sum_{k=0}^n a_k V_k \right)^j$

Or $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $E(V_k^j)$ existe. Donc $\exists (b_0, \dots, b_{j \times n})$, $(X^2)^j = \sum_{k=0}^{j \times n} b_k V_k$

Donc X^2 admet $E((X^2)^j) = \sum_{k=0}^{j \times n} b_k E(V_k)$

Donc X^2 admet un moment de tout l'ordre.

$$\begin{aligned}
 6b) E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} s(k, \lambda) E(X^k) \\
 &= E(X(X-1) \dots (X-k+1)) \\
 &= \prod_{k=0}^{n-1} E(X-k)
 \end{aligned}$$

$$6.c) E(X^3) = E(X^3)$$

7a) Notons que $\theta > 0$ et $h > 0$

$$\text{Donc } \frac{\theta^h e^{-\theta}}{h!} > 0$$

Or $x \mapsto h(x)$ est C^1 sur $]0; +\infty[$

Pour g admet des dérivées partielles et $g(\theta, h) = h \ln(\theta) - \theta + h$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \partial_h(g(\theta, h)) &= h \times \frac{1}{\theta} - 1 \\
 &= \frac{h}{\theta} - 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \partial_{h\theta}(g(\theta, h)) = \frac{h}{\theta} - 1 = \frac{h - \theta}{\theta}$$

$$b) \underline{X X^2 = (X-2+2) X^2 = X^{3+1} + 2 X^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \text{cov}(X, X^2) &= E(X X^2) - E(X) E(X^2) \\
 &= E(X^{3+1}) + 2 E(X^2) - E(X^2) E(X) \\
 &= \theta^{2+1} + 2 \theta^2 - \theta^2 \times \theta \\
 &= 2 \theta^2
 \end{aligned}$$

$$7.c) \operatorname{cov}(\partial_n(g)(\theta, x), x^2)$$

$$= \operatorname{cov}\left(\frac{x-\theta}{\theta}, x^2\right)$$

$$= \frac{1}{\theta} \operatorname{cov}(x, x^2) - \operatorname{cov}(\theta, x^2)$$

$$= 2\theta^{2-1} - 0$$

$$\text{Or } \operatorname{cov}(\partial_n(g(\theta, x), x^2) \leq V(x^2) V(\partial_n g(\theta, x)), \text{ d'inégalité de Cauchy.}$$

$$\text{Donc } V(x^2) \geq \frac{2^2 \theta^{2n}}{V(g_n(\theta, x))}$$

$$\text{Or } V\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right) = V(x) = 0$$

$$\text{Donc } V(x^2) \geq 2^2 \theta^{2n-1}$$

Partie 3:

8. Notons que : $\forall h \in \mathbb{N}, \theta \mapsto f(\theta, h)$ est dérivable
car : $\theta \mapsto \theta^h$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$
 $\theta \mapsto e^{-\theta}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc $\forall i \in [1, n], \theta \mapsto f(\theta, h_i)$ est dérivable.

Par produit de fonctions dérivables

$\theta \mapsto F(\theta, h_1, \dots, h_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

Notons que pour tout $h_i \in \mathbb{N}, f(\theta, h_i) > 0$
car $\frac{e^{-\theta}}{h_i!} > 0$ et $\theta^h > 0$

Donc $F(\theta, h_1, \dots, h_n)$ est un scalaire dans $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus elle est dérivable.

Donc par dérivabilité de $\ln$ en $\mathbb{R}^{+*}$, G est dérivable
sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Code épreuve : 2883

Nombre de pages : 5

Session : 2021

Épreuve de : Maths 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$8a) G_n(\theta, h_1, \dots, h_n) = \ln \left(\prod_{i=1}^n h_i \ln(\theta) - \theta - h(R!) \right) \\ = \sum_{i=1}^n h_i \ln(\theta) - \theta - h(R!)$$

$$\text{Donc } \partial_n G(\theta, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i - 1}{\theta}$$

$$b) Z_\theta = \sum_{i=1}^n \frac{V_i - 1}{\theta}$$

$$E(Z_\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{E(V_i) - 1}{\theta} = 0$$

Donc Z_θ est centrée

$$\text{Si } V(Z_\theta) = E(Z_\theta^2) \neq 0$$

$$\text{Or } (Z_\theta)(\Omega) = \mathbb{R}^+$$

et Z_θ n'est pas une variable nulle.

$$\text{Donc } E(Z_\theta^2) > 0$$

$$\text{Donc } V(Z_\theta) > 0$$

$$d) \text{ et } I(\theta) = V\left(\sum_{i=1}^n \frac{V_i}{\theta} - 1\right)$$

D'après l'indépendance des $(V_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$
et la borne des conditions

$$I(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n V(V_i) = \frac{n}{\theta^2} > 0.$$

9a) $E(t) = g(\theta)$

Donc T est construite sans biais de $g(\theta)$

b) ✓

10) ✓

b) $\text{cov}(T, Z_0)^2 \leq V(t) \times V(Z_0)$ d'après l'inégalité de Cauchy

Donc $\frac{g'(\theta)^2}{I(\theta)} \leq V(t)$ d'après la partie précédente

11) a) $\text{ech} = \frac{\text{somme des } x_i^2}{n} - \frac{(\text{somme}(X, "c") - n \times \text{cheta})^2}{n \times \text{cheta}}$

car X a n lignes, donc on aura bien N simulation d'expérience répétée n fois.

b) La variance la plus faible est pour la réalisation (10,4) donc elle est associée à la figure C

La figure A est plus stable car il y a plus d'essai
Donc Fig A $\Rightarrow$ (50,5)

En hiérarchisant les variances, Fig B $\Rightarrow$ (20,4)
Fig D $\Rightarrow$ (40,4)

$$12) \begin{array}{l} S_n \sim P(n\theta) \\ E(S_n) = n\theta \\ \text{et } V(S_n) = n\theta \end{array}$$

$$b) E(M_{2,n}) = \frac{1}{n^2} E(S_n(S_n-1) \dots (S_n-2+1))$$

$$\text{On a aussi } \eta(\theta) = \theta^2$$

$$\text{Donc } E(S_n(S_n-1) \dots (S_n-2+1)) = (n\theta)^2$$

$$\text{Donc } E(M_{2,n}) = \theta^2$$

D'après la question précédente X^2 admet une variance (on n'est de tout les ordres, donc une variance)

Ceci est valable pour $\theta > 0$

Donc S_n admet une variance car $S_n \sim P(n\theta)$

Donc $\frac{S_n}{n^2}$ admet une variance

En utilisant la question 8a), on retrouve bien

$$2\theta^{2-1} = \sum_{(h_1, \dots, h_n)} t(h_1, \dots, h_n) \delta_n(F(\theta, h_1, \dots, h_n))$$

En posant t la fonction ~~trans~~ ~~en~~ ~~sa~~ ~~is~~ $(h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n h_i^2$

Donc $M_{2,n}$ est un est estimateur régulier de θ^2 .

$$\text{D'après la question 10.6) } V(M_{2,n}) \geq \frac{(2\theta^{2-1})^2}{n\theta} \geq \frac{2^2 \theta^{2 \cdot 2 - 2}}{n} \geq \frac{2^2 \theta^{2-1}}{n}$$

$$12c) M_{2,n} = S_n^2 - S_n$$

$$\begin{aligned} V(M_{2,n}) &= V(S_n^2) = E(M_{2,n}^2) - E(M_{2,n})^2 \\ &= E(S_n^4 - 2S_n^3 + S_n^2) - (E(S_n^2) - E(S_n))^2 \\ &= \end{aligned}$$

Partie 4:

$$13a) E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \times n \theta = \theta$$

Les $(Y_i)_{i \in [0, n]}$ sont indépendantes

$$\text{Donc } V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Y_i)$$

Donc $\bar{X}_n$ admet une espérance.

[...]

Donc $\bar{X}_n$ est un estimateur régulier du paramètre θ .

$$b) V(\bar{X}_n) \geq \frac{1}{n} \geq \frac{\theta}{n} \quad \text{car } g'(\theta) = 1$$

$$\begin{aligned} 14) \forall a \in \mathbb{R}, E(\psi(a)) &= E(\bar{X}_n) - a E(\bar{X}_n) + E(Y) \\ &= \theta - a \times 0 \\ &= \theta \end{aligned}$$

$\psi(a)$ admet un moment d'ordre 2 car Y admet un moment d'ordre 2 et $\bar{X}_n$ aussi.

Ainsi $\bar{X}_n - Y$ admet un moment d'ordre 2.

Finalement $\psi(a)$ admet un moment d'ordre 2.

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 5

Session : 2021

Épreuve de : Maths

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned}
 15a) W_n &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + (\bar{x})^2 - 2x_i \bar{x}) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \bar{x}^2) - \frac{2\bar{x}}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \bar{x}^2) - \frac{2\bar{x}}{n-1} \times n \bar{x} \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) E(W_n) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n E((x_i - \bar{x})^2) \\
 &= \frac{1}{n-1} E(x_n^2) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n E(x_i^2) \\
 &= \frac{n}{n-1} E(x_n^2) + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n V(x_i) + E(x_i)^2 \right) \\
 &= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n \theta + \theta^2 - \frac{n}{n-1} [V(x_n) + E(x_n)^2] \\
 &= \frac{n}{n-1} [\theta + \theta^2] - \frac{n}{n-1} [\theta + \theta^2] = 0
 \end{aligned}$$

C'est un estimateur biaisé de θ

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

