



T8-00278
218639
Maths S

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 20

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques HEC - Exercice

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

1.

(a)

$$\omega_m^m = e^{2i\pi} = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (\omega_m^k)^m = e^{2ik\pi} = 1$$

Soit $(k, k') \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2$, $k \neq k'$ (on suppose $k' < k$)

$$\frac{\omega_m^k}{\omega_m^{k'}} = \frac{e^{2ik\pi/m}}{e^{2ik'\pi/m}} = e^{2i\pi \frac{k-k'}{m}}$$

$$\text{car } m > k - k' > 0$$

$$e^{2i\pi \frac{k-k'}{m}} \neq 1$$

$$\text{car } \frac{\omega_m^k}{\omega_m^{k'}} \neq 1 \quad \text{car } \omega_m^k \neq \omega_m^{k'}$$

$$\text{donc : } \forall (k, k') \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2, k \neq k' \Rightarrow \omega_m^k \neq \omega_m^{k'}$$

les racines du polynôme $P = X^m - 1$ sont les racines m^{e} de l'unité

car : $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, (\omega_m^k)^m = 1$, P s'écrit sans facteur

$$P = \prod_{k=0}^{m-1} (X - \omega_m^k)$$

b) Si $s \neq 0$ est pas un multiple de m , $\omega^{sq} \neq 1$ donc,

$$\sum_{q=0}^{m-1} \omega^{sq} = \frac{1 - \omega^{sm}}{1 - \omega^s} = \frac{1 - (\omega^m)^s}{1 - \omega^s} = \frac{1-1}{1-\omega^s} = 0$$

(d'après 1. a))

si s est un multiple de m , $\exists k \in \mathbb{Z}$, $s = mk$

donc $\sum_{q=0}^{m-1} \omega^{sq} = \sum_{q=0}^{m-1} \omega^{kmq} = \sum_{q=0}^{m-1} (\omega^{km})^q = \sum_{q=0}^{m-1} 1 = m$

Ainsi, $\sum_{q=0}^{m-1} \omega_m^{sq} = \begin{cases} m & \text{si } s \text{ est un multiple de } m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. a)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A_2) = -2 \neq 0$ donc A_2 est inversible et $A_2^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A_2$

b) A_2 est symétrique à coefficients réels donc diagonalisable

On note P son polynôme caractéristique.

$$P = X^2 - 2 \quad P=0 \Leftrightarrow X = \sqrt{2} \text{ ou } X = -\sqrt{2}$$

donc $\sigma_P(A_2) = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$

Soit $X \in \mathbb{R}^2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A_2 X = \sqrt{2} X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt{2} x & L_1 \\ x - y = \sqrt{2} y & L_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow y = (\sqrt{2}-1)x$$

donc $X \in \text{Vect}(1, \sqrt{2}-1)$

d'où $E_{\sqrt{2}}(A_2) = \text{Vect}(1, \sqrt{2}-1)$

Soit $X \in \mathbb{R}^2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A_2 X = -\sqrt{2} X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\sqrt{2}x \\ x - y = -\sqrt{2}y \end{cases} \Leftrightarrow y = (-1 - \sqrt{2})x$$

donc $X \in \text{Vect}(1, -1-\sqrt{2})$

donc $E_{-\sqrt{2}}(A_2) = \text{Vect}(1, -1-\sqrt{2})$

3. a)

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{i\pi}{2}} & e^{i\pi} & e^{\frac{3i\pi}{2}} \\ 1 & e^{i\pi} & e^{2i\pi} & e^{3i\pi} \\ 1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} & e^{2i\pi} & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$A_4 \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{i\pi}{2}} & -1 & e^{-\frac{3i\pi}{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{-\frac{3i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \bar{A}_4 = 4I_4 \quad \text{donc} \quad A_4 \frac{1}{4} \bar{A}_4 = I_4$$

donc A_4 est inversible et $A_4^{-1} = \frac{1}{4} \bar{A}_4$

$$b) A_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{\frac{3i\pi}{2}} & -1 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I$$

donc $P = X^4 - 16$ est annulateur de A_4

$$c) P = X^4 - 16 = (X^2 - 4)(X^2 + 4) = (X-2)(X+2)(X-2i)(X+2i)$$

Comme les racines de P contiennent les valeurs propres de A_4 , les valeurs propres propres de A_4 sont : $2, -2, 2i, -2i$.

d)

Soit X le vecteur représentant e_0 dans la base canonique et Y celle représentant e_1

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Y \in P$$

$$A_4 Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4Y \in P$$

donc $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, A_4(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) = \lambda_1 Y + 4\lambda_2 X \in P$

(car A_4 représente F_4 dans B_4 et X et Y représentent e_0 et e_1 , car $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, A_4(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) \in P$, e_0 et e_1 sont stables par F_4)

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 20

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques HEC - Ensef

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

3. d) $C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P = X^2 - 4$ est le polynôme caractéristique de C_4

$P = (X-2)(X+2)$ $\Rightarrow 2$ et -2 sont les racines de P , les racines

propres de C_4 car $\text{Sp}(C_4) = \{ -2, 2 \}$

$$C_4 + 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

 $C_1 \ C_2$

$C_2 = 2C_1$ car $E_{-2}(C_4) = \text{Vect}(-2, 1) = \text{Vect}(C_4 + 2I_2)$

$$C_4 - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

 $C_1 \ C_2$

$C_2 = -2C_1$ car $E_2(C_4) = \text{Vect}(2, 1)$

donc $A = \{ (-2, 1), (2, 1) \}$ est une base de vecteurs propres de C_4 .

Comme 2 et -2 sont des racines propres de F_4 , il est aussi des

racines propres de F_4

Donc $u = 3e_0 + e_1 + e_2 + e_3$

et $f = -e_0 + e_1 + e_2 + e_3$ sont des vecteurs propres de $F_{4,12}$

$V = (3, 1, 1, 1)$ et $U = (-1, 1, 1, 1)$ sont des vecteurs propres de F_4

respectivement associés à $\lambda = 2$ pour V et $\lambda = -2$ pour U .

e) $F_4(e_0 + e_2) = 2e_0 + 2e_2 = 2(e_0 + e_2)$, $e_0 + e_2$ est un vecteur propre de F_4 associé à $\lambda = 2$

$$F_4(e_1 - e_3) = (e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{3i\pi}{2}})(e_1 - e_3) = 2e^{\frac{i\pi}{2}}(e_1 - e_3) = -2i(e_1 - e_3)$$

$-2i$ est donc un vecteur propre de F_4 associé au vecteur propre $(0, 1, 0, -1)$

de plus, $(e_0 + e_2, 3e_0 + e_1 + e_2 + e_3)$ forme une famille libre,

d'où $\dim E_2(F_4) \geq 2$ et car $\dim E_{2i}(F_4) \geq 1$ et $\dim E_{-2}(F_4) \geq 1$

d'où $4 \leq \dim E_2(F_4) + \dim E_{2i}(F_4) + \dim E_{-2}(F_4) \leq 4$

le seul des dimensions des sous-espaces propres de F_4 vaut 4,

donc F_4 est diagonalisable, et $E(F_4) = \text{Vect}[(1, 0, 1, 0), (3, 1, 1, 1)]$

$$E_{2i}(F_4) = \text{Vect}(0, 1, 0, -1)$$

$$E_{-2}(F_4) = \text{Vect}(-1, 1, 1, 1)$$

4. a)

$$\begin{aligned} \text{i. } y = f_m(x) &= \sum_{n=0}^m f_n(x) \quad \text{par linéarité de } f_m \\ &= \sum_{n=0}^m \left(\sum_{i=0}^{p_n-1} a_{ni} x^i \right) \end{aligned}$$

i).

$$F_m \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k l_k \right) = \sum_{k=0}^{m-1} a^k F_m(l_k) = \sum_{k=0}^{m-1} a^k \sum_{i=0}^k \omega_m^i l_i$$

ii), $F_m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} l_k \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \sum_{i=0}^k \omega_m^i l_i$

b)

5. a)

$$A_m \bar{A}_m = \begin{pmatrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & & \\ & & (0) & \\ & & (0) & \\ 0 & & & m \end{pmatrix} = m I_m$$

dy $A_m \frac{1}{m} \bar{A}_m = I_m$ dy A_m est inversible et $A_m^{-1} = \frac{1}{m} \bar{A}_m$

b) comme A_m est inversible, F_m est bijectif donc inversible et

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, x = \sum_{k=0}^{m-1} x_k l_k, \quad F_m^{-1}(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \bar{\omega}_m^i x_k \right) l_i$$

c) Soit $X \in M_{m,1}(\mathbb{C})$, ${}^t(\bar{A}_m X) A_m X = {}^t \bar{X} {}^t \bar{A}_m A_m X = {}^t \bar{X} \bar{A}_m A_m X$ ($\bar{A}_m$ est symétrique)
 $= {}^t \bar{X} m I_m X$
 $= m ({}^t \bar{X}) X$

d) $t(\overline{A_n X}) A_n X =$

6. a) Soit $X \neq 0$ tel que $A_n X = \lambda X$

d'après s.c), $n(t(X))X = t(\overline{\lambda X})\lambda X$

de $n(t(X))X = \overline{\lambda} \lambda t(X)X$ car $\forall z \in \mathbb{C}, z \overline{z} = |z|^2$

on a $n(t(X))X = |\lambda|^2 t(X)X$

de car $X \neq 0$ et par positivité du module, $|\lambda| = \sqrt{n}$

b)

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} 1 & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{i(n-1)} \\ \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^i & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{2i} & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{2i(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{(n-1)i} & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{(n-1)2i} & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{(n-1)^2(n-1)} \end{pmatrix}$$

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 20

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques HEC - ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1

d'après 1.b), on voit que $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{is}$ est un entier relatif non nul si s est un multiple de n et 0 sinon, on remarque que de

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & n0 \\ 0 & \dots & \dots & n00 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

c) $A_n^4 = A_n^2 A_n^2 = n^2 I_n$, On a $P = X^4 - n^2$ est annulé de A_n et les racines possibles de A_n sont : $(\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n})$

$$\begin{aligned} 7. a) F_n(l_1 + l_{n-1}) &= F_n(l_1) + F_n(l_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k l_{k1} + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{l_1(n-k)} l_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right) l_{k1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right)^{l_1(n-k)} l_k \end{aligned}$$

$$\text{d'après la formule de Moivre} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right) l_{k1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right)^{l_1(n-k)} l_k$$

$$= l_{01} + i l_{11} + \sum_{k=0}^{n-1} l_{k1}$$

$$b) \quad \underline{U_m(l_1 + l_{m-1}) = m l_{m-1} + m e_1}$$

$$\underline{U_m(l_1 - l_{m-1}) = m l_{m-1} - m e_1}$$

$$\underline{F_m(e_{\cos}) = F_m\left(\frac{1}{2} F_m(l_1 + l_{m-1})\right)}$$

$$= \frac{1}{2} U_m(l_1 + l_{m-1}) = \frac{m}{2} (l_1 + l_{m-1})$$

$$\underline{F_m(e_{\sin}) = F_m\left(\frac{i}{2} F_m(l_1 - l_{m-1})\right) = \frac{i}{n} F_m(l_1 - l_{m-1}) = i \frac{m}{n} (l_1 - l_{m-1})}$$

c) Comme $\forall k \in [0, m-1]$, $\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \neq 0$, donc $(e_1, e_2, \dots, e_{m-1})$ est une famille libre, $(l_1 + l_{m-1}, e_{\cos})$ est libre, car elle est de cardinal, $\underline{\dim \text{Vect}(l_1 + l_{m-1}, e_{\cos}) = \dim Q = 2}$

on note M la matrice de $F_m|_Q$ dans la base $(l_1 + l_{m-1}, e_{\cos}/e_{\sin})$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{le polynôme caractéristique de } M \text{ est } P = x^2 - m$$

les valeurs propres de M sont donc $\pm \sqrt{m}$

$$\text{Soit } x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in E_{\sqrt{m}}(M) \text{ et } Mx = \sqrt{m}x$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \frac{m}{2} y = \sqrt{m} x \\ 2x = \sqrt{m} y \end{cases}$$

$$\text{Or } y = \frac{2}{\sqrt{n}} x$$

$$\text{d'où } x \in \text{Vect} \left(1, \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$E_{\sqrt{n}}(M) \subset \text{Vect} \left(1, \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X \in E_{\sqrt{n}}(M) \quad \text{donc } \frac{n}{2} y = -\sqrt{n} x$$

$$\text{d'où } y = -\frac{2}{\sqrt{n}} x$$

$$E_{-\sqrt{n}}(M) \subset \text{Vect} \left(1, -\frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

Car $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$ sont valeurs propres de $F_{11}A$, ils sont valeurs propres

$$\text{de } F_n \quad \text{et } E_{\sqrt{n}}(F_n) \supset \text{Vect} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{-1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \right)$$

$$\text{et } E_{-\sqrt{n}}(F_n) \supset \text{Vect} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{2}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \right)$$

d) On note M la matrice de $F_{11}A$ des u_i (la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{in}{2} \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on note } p \text{ le polynôme caractéristique de } M,$$

$$p = X^2 - i^2 n = X^2 + n. \quad \text{Les valeurs propres de } M \text{ sont } i\sqrt{n} \text{ et } -i\sqrt{n}$$

$$\text{Soit } X \in E_{i\sqrt{n}}(M), \quad X \in \text{Vect} \left(1, \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\text{Soit } X \in E_{-i\sqrt{n}}(M), \quad X \in \text{Vect} \left(1, -\frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

donc $E_{i\sqrt{n}}(M) = \text{Vect}(1, \frac{z}{\sqrt{n}})$

$E_{-i\sqrt{n}}(M) = \text{Vect}(1, \frac{-z}{\sqrt{n}})$

$i\sqrt{n}$ et $-i\sqrt{n}$ sont des valeurs propres de $F_{n,p}$ de E_n

et $E_{i\sqrt{n}} \supset \text{Vect}(1, \frac{z}{\sqrt{n}} \sin(\frac{2\pi}{n}), \dots, 1 + \frac{z}{\sqrt{n}} \sin(\frac{2(n-1)\pi}{n}))$

et $E_{-i\sqrt{n}} \supset \text{Vect}(1, \frac{-z}{\sqrt{n}} \sin(\frac{2\pi}{n}), \dots, 1 - \frac{z}{\sqrt{n}} \sin(\frac{2(n-1)\pi}{n}))$

e) car $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}$ et $-i\sqrt{n}$ étaient les seules valeurs propres possibles de A_n (6.4) donc de $F_{n,p}$ qu'elles sont valeurs propres, on peut dire

que $\text{sp}(F_n) = \{ \sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n} \}$

Partie II

8. a) soit $f \in \mathbb{I}[1, n-1]$ $\varphi_n(l_1) = l_{2-1}$

$\varphi_n(l_1) = l_{n-1}$

soit $f \in \mathbb{I}[2, n-1]$ $\varphi_n^2(l_2) = \varphi_n(l_{2-1}) = l_{2-2}$

$\varphi_n^2(l_2) = \varphi_n(l_2) = l_{n-1}$

$\varphi_n^2(l_2) = \varphi(l_{n-1}) = l_{n-2}$

d'où $T_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2021

Épreuve de :

Mathématiques HEC-ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie II

b) Soit $h \in \mathbb{N}$ et on définit la suite (P_n) par récurrence (P_n : « $\varphi_n^h(x) = x_{n-h}$ ») où $x \in [0, n]$

* $\varphi_n^h(x) = x_0$ car (P_n) est vraie

* Soit $x \in [0, n-2]$ tel que (P_x) est vraie (on suppose $h \leq n-2$)

$$\varphi_n^h(x) = x_{n-h}$$

$$\text{car } \varphi_n^{h+1}(x) = x_{n-h-1} = \varphi_n^h(x_{n-h})$$

car $(P_{x_{n-h}})$ est vraie et qui valide la récurrence.

$$\text{si } h = n-1, \quad [0, n-1] = \{n-1\} \text{ et } \varphi_n^{n-1}(x_{n-1}) = x_0 = x_{n-1-(n-1)}$$

$$\text{car } \forall x \in [0, n-1], \quad \underline{\varphi_n^h(x) = x_{n-h}}$$

$$\text{de la même manière, si } x \in [0, n-2], \quad \varphi_n^h(x_0) = x_{n-h}, \dots$$

$$\text{par récurrence immédiate, } \underline{\varphi_n^h(x) = x_{n-h+x}}$$

c) Soit $f \in [0, n-1]$, $\varphi_n^m(x_j) = \varphi(\varphi_n^{m-1}(x_j)) = \varphi(x_{j+1})$. Si $j \neq n-1$
 $= \varphi(b)$ si $j = n-1$

donc $\varphi_n^m(x_j) = \begin{cases} \varphi(b) & \text{si } j = n-1 \\ \varphi(x_{j+1}) & \text{si } j \neq n-1 \end{cases}$

$\varphi_n^m = \text{id}$

d) Soit $k \in [1, n-1]$ $T_n^k \subset \mathbb{C}(a)$ on a les racines dont
 toutes les conjuguées sont nulles sauf la $(k+1)^{\text{e}}$ qui vaut 1
 et $T_n^n = I_n$.

q1. a) $T_n^n = I_n$ car $P = X^n - 1$ annule T_n et d'après (a),

$X^n - 1 = \prod_{a=0}^{n-1} (X - \omega_n^a)$ donc les valeurs propres possibles de T_n sont
 les éléments de la famille $(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$

b) Soit $k \in [0, n-1]$, le vecteur $\varphi(F_n(x))$ a pour coordonnées les
 base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & (0) & \\ & & & & \ddots \\ & (0) & & & \\ 1 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^a \\ \omega_n^{2a} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_n^a \\ \omega_n^{2a} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)a} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-q+m} \end{pmatrix}$$

donc $F_n(\lambda_n)$ est une valeur propre de q_n associé

à la valeur propre w_n^q

c) Car d'après le, J_n possède au moins n valeurs propres distinctes (d'après 1.a)), et soit les seules car J_n est de taille n , de plus, elle est diagonalisable car possède n valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension n . On sait que chaque valeur propre w_n^q de A_n est associé à $F_n(\lambda_n)$ qui est répétée dans la base canonique de $\mathbb{C}$ par la $(k+1)^{e}$ colonne de A_n dans A_n est la matrice de passage de J_n vers une base de vecteurs propres de A_n car $A_n^{-1} = \frac{1}{n} A_n$,

$$J_n = \frac{1}{n} A_n D_n A_n$$

10. a) $\text{Circ}_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$.

$0 = (0, \dots, 0)$ de $\text{Circ}_n(\mathbb{C})$ n'est pas nulle et satisfait $\{0\}$.

Soit $(\lambda, M, M') \in \mathbb{C} \times (\text{Circ}_n(\mathbb{C}))^2$, Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n}$

tel que $M = (a_0, \dots, a_{n-1})$ et $M' = (b_0, \dots, b_{n-1})$

$$\lambda M + M' = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \lambda a_1 & \dots & \lambda a_{n-1} \\ \lambda a_{n-1} & \lambda a_0 & \dots & \lambda a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \dots & \lambda a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & \dots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_0 + b_0 & \lambda a_1 + b_1 & \dots & \lambda a_{n-1} + b_{n-1} \\ \lambda a_{n-1} + b_{n-1} & \lambda a_0 + b_0 & \dots & \lambda a_{n-2} + b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_1 + b_1 & \lambda a_2 + b_2 & \dots & \lambda a_0 + b_0 \end{pmatrix} \in \text{Circ}_n(\mathbb{C})$$

$\text{Circ}_m(\mathbb{C})$ est stable par l'addition et par la multiplication
 par un scalaire, c'est-à-dire le vecteur nul et est inclus dans l'espace
 vectoriel $M_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$

Sur $\text{Circ}_m(\mathbb{C})$ est défini etient par un vecteur de $\mathbb{C}^n$, de

$$\dim \text{Circ}_m(\mathbb{C}) = \dim \mathbb{C}^n = n$$

$$\text{et } B = \left(I_n, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Circ}_m(\mathbb{C})$$

$$B = (J_n, J_{n-1}, \dots, J_1)$$

6) Car $(J_n, \dots, J_1)$ est une base de $\text{Circ}_m(\mathbb{C})$ et que

$$\forall (q, q') \in \mathbb{Z}, J_n^q J_n^{q'} = J_n^{q+q'} = J_n^q \text{ où } J_n^q \text{ est l'élément de } \mathbb{Z} \text{ modulo } n$$

Car $J_n^n = I_n$ de fait, $J_n^{q+n} = J_n^q$ de plus pour chaque

élément de la base B de $\text{Circ}_m(\mathbb{C})$ reste dans B après multiplication, $\text{Circ}_m(\mathbb{C})$

est un espace vectoriel distributif par rapport à la somme et

car chaque élément de $\text{Circ}_m(\mathbb{C})$ est la combinaison linéaire des éléments de

B , $\text{Circ}_m(\mathbb{C})$ est stable par la multiplication.

11. a)

$$\sum_{q=0}^{n-1} a_q J_n^q = \begin{pmatrix} a_0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ & \ddots & \\ a_1 & & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & & a_{n-1} \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 a_1 \dots a_{n-1} \\ & \ddots & \\ a_1 \dots a_{n-1} & & a_0 \end{pmatrix} = C(a)$$

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 20

Session : 2027

Épreuve de : Mathématiques HEC-ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2

$$11. a) \quad C(A) = \sum_{q=0}^{n-1} a_q T_n^q = \sum_{q=0}^{n-1} a_q A_n D_n^q A_n^{-1} \\ = A_n \left(\sum_{q=0}^{n-1} a_q D_n^q \right) A_n^{-1}$$

car $C(A)$ est semblable à la matrice diagonale $\sum_{q=0}^{n-1} a_q D_n^q$

car $C(A)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les éléments de la

famille $\left(\sum_{q=0}^{n-1} a_q W_n^q, \sum_{q=0}^{n-1} a_q W_n^{q+1}, \dots, \sum_{q=0}^{n-1} a_q W_n^{q+n-1} \right)$

c) Les valeurs propres de S_n sont : $\left\{ 0, \sum_{q=0}^{n-1} W_n^{q+1}, \sum_{q=0}^{n-1} W_n^{q+n-1} \right\}$

car 0 est valeur propre de S_n , S_n n'est pas inversible.

12. a) car $\forall M \in \text{Circ}_n(\mathbb{C}), \exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$M = \sum_{j=0}^{n-1} a_j T_n^j \text{ et que toute matrice commute avec ses puissances, donc}$$

toute les matrices de $\text{Circ}_n(\mathbb{C})$ commutent avec T_n donc $\text{Circ}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}$

b)

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ $F_n(k)$ est représenté matriciellement par la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne de A_n du $g(F_n(k))$ est représenté par M_{k+1}

c) Car $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $g(F_n(k)) = \lambda_k V_n(k)$, les $F_n(k)$ sont des modes propres de M qui sont diagonalisables car A_n est inversible

$$\text{On a } \frac{1}{n} A_n^{-1} M A_n = A_n^{-1} M A_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

d) $r = \text{rang } f$ car f est l'application qui a tout élément de $M_n(\mathbb{C})$

$$J_n M = M J_n,$$

f est linéaire par distributivité de la somme des $M_n(\mathbb{C})$

