Cet ouvrage a été coordonné par le service de l'instruction publique et de l'action pédagogique et le service de l'accompagnement des politiques éducatives de la direction générale de l'enseignement scolaire du ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

Ce document a fait l'objet d'une relecture critique de plusieurs membres du Conseil scientifique de l'éducation nationale.

# Sommaire

# Avant-propos

Les mathématiques sont omniprésentes dans la vie quotidienne. Il y a mille manières de les faire découvrir aux enfants, dès la maternelle. Les mathématiques sont aussi l'art de relier entre eux différents champs qui les composent et ainsi de faire découvrir des liens entre nombres, espace, symétries, opérations, etc. Elles permettent de développer des capacités et compétences utiles pour l'éducation des enfants : savoir représenter, modéliser, chercher, raisonner, calculer et communiquer.

Le présent guide se centre sur un domaine fondamental des mathématiques : l'enseignement des nombres, du calcul et de la résolution de problèmes arithmétiques au CP. Il a été élaboré autour de l'idée que l'enseignement du nombre au CP résulte d'un équilibre fécond entre construction de connaissances et d'automatismes sur les nombres, sens des opérations et maîtrise des techniques opératoires. Bien évidemment, d'autres domaines des mathématiques sont fondamentaux comme la géométrie, les grandeurs et les mesures mais ne font pas l'objet d'études dans ce guide, ce qui n'indique aucunement une hiérarchie.

Ce guide complète les ressources institutionnelles déjà à disposition des professeurs, à savoir le programme de mathématiques, les attendus de fin de CP, les repères annuels de progression du cycle 2 et les documents ressources pour le cycle 2. Il insiste plus précisément sur les éléments qui suivent.

## Importance du lien entre sens et technique

La construction du sens des opérations et, notamment, la capacité à reconnaître les opérations en jeu dans un problème sont liées aux capacités de l'élève à mobiliser les nombres, à les désigner, à prendre en compte leurs propriétés mais aussi à mettre en œuvre des techniques de traitement et de calcul.

## Importance de la distinction de deux systèmes de numération

Il existe deux systèmes de numération, deux manières de désigner les nombres : d'une part les noms des nombres à l'oral qui se trouvent dans la comptine numérique en français (la numération orale, par exemple, « vingt-trois »), et d'autre part les désignations écrites chiffrées des nombres (la numération écrite chiffrée, par exemple, « 23 »). Ce sont deux systèmes distincts de représentation des nombres qu'il convient de mettre en relation.

## Importance du travail des différents modes de calcul

Les différents modes de calcul (calcul mental, calcul en ligne, calcul posé) se construisent en étroite relation. Si l'enseignement de ces différents modes doit respecter dans un premier temps une chronologie faisant intervenir davantage du calcul mental ou du calcul en ligne, il n'y a pas de hiérarchie entre les différents modes de calcul. Ces différents modes contribuent à donner à l'élève du pouvoir sur les nombres, à les explorer, à les appréhender selon des points de vue différents et à réutiliser ces connaissances pour résoudre des problèmes.

## Importance du rôle de la manipulation et de la verbalisation des élèves dans les apprentissages

L'ensemble du domaine numérique permet d'accompagner chaque élève, depuis la manipulation d'objets jusqu'à l'abstraction. Ce parcours, en en identifiant des grandes étapes, notamment la verbalisation, permet d'harmoniser et de structurer l'enseignement.

Les premiers travaux des élèves sur les nombres et la résolution de problèmes s'appuient systématiquement sur la manipulation, tant pour représenter les situations, les modéliser que pour déterminer ou contrôler les réponses. Progressivement les élèves pourront se passer de cette manipulation au profit de dessins puis de schémas de plus en plus abstraits.

Les travaux sur les nombres et la résolution de problèmes doivent s'accompagner d'une verbalisation par les élèves. La verbalisation des actions lors de la manipulation et de la modélisation dans la résolution du problème favorisera l'accès à l'abstraction. Elle permet à l'enseignant de mieux comprendre ce que fait et pense l'élève pour pouvoir apporter les éventuelles aides appropriées.

## Importance des cheminements cognitifs pour passer de la manipulation à l'abstraction

Pour passer progressivement de la manipulation à l'abstraction, plusieurs cheminements cognitifs peuvent être identifiés. Ils sont initialisés par quelques procédures bien définies dont certaines sont privilégiées par les élèves. Afin de leur permettre de progresser tout en prenant en compte la diversité de leurs procédures et de leurs connaissances, le professeur veillera à ménager des cheminements cognitifs adaptés.

## Importance de la modélisation dans la résolution de problèmes

La résolution de problèmes est au cœur de l'activité mathématique et mobilise un ensemble complexe de savoirs et de compétences. Il est nécessaire d'enseigner des stratégies (efficaces) de résolution de problèmes, notamment dans le domaine arithmétique, qui se fondent sur des schémas aidant les élèves à appréhender la situation, à penser et à construire la modélisation, en vue de résoudre les problèmes posés. Ces stratégies aboutissent *in fine* à l'écriture symbolique mathématique des opérations en jeu.

## Importance d'un texte du savoir

Il est important de développer, lors de phases d'explicitation, de synthèse et d'institutionnalisation, un texte du savoir pour tous (sous forme orale d'abord, faisant intervenir des représentations imagées, et dès que possible sous forme écrite). Ce texte explicite ce qui a été appris et ce qu'il faut retenir en vue d'un réinvestissement dans d'autres situations.

# Plan du guide

Le guide s'appuie à la fois sur des analyses mathématiques, épistémologiques et didactiques, mais aussi sur les résultats de la recherche sur l'enseignement des mathématiques et dans le domaine de la psychologie. Chaque chapitre du guide propose des exemples de séances et de pratiques enseignantes.

L'introduction, à partir d'un exemple de résolution de problèmes, montre comment les connaissances mathématiques construites au CP peuvent et doivent être mises en réseau afin d'amener progressivement les élèves à mobiliser les connaissances et les procédures attendues au CP.

**Le chapitre 1** présente une analyse synthétique des deux systèmes de numération et développe des pistes pour leur enseignement.

**Le chapitre 2** présente les différents modes de calcul (calcul mental, calcul en ligne, calcul posé) et propose des pistes pour les enseigner.

**Le chapitre 3** est consacré à la résolution de problèmes arithmétiques. Il présente différents types de problèmes arithmétiques et décrit leur enseignement au CP. Il met en évidence l'importance de la manipulation et de l'utilisation de schémas pour la modélisation. Il place l'enseignement de la résolution de problèmes en CP dans un continuum du cycle 1 au cycle 3.

**Le chapitre 4** présente une synthèse du matériel pouvant être utilisé en classe de CP. Une liste du matériel pouvant être mis à disposition des élèves en classe est proposée.

**Le chapitre 5** porte sur la place du jeu dans l'apprentissage des nombres et des opérations et propose une grille de critères pour analyser et mettre en œuvre des jeux mathématiques dans les classes.

**Le chapitre 6** propose des outils pour aider les professeurs à choisir, de manière la plus éclairée possible, un manuel sur lequel appuyer leur enseignement.

**Le chapitre 7** propose une programmation sur l'année de CP de l'enseignement progressif de la numération, des modes de calcul et de la résolution de problèmes.

Le guide se termine par une bibliographie.

# Mobiliser et construire des connaissances dans l’activité de résolution de problèmes au CP

Dans cette introduction, à partir d'un exemple de résolution de problèmes, nous apportons des éléments de réponses aux questions suivantes :

— comment permettre aux élèves de se construire des représentations du problème en s'appuyant sur des manipulations, mais également comment dépasser ces dernières pour aller vers davantage d'abstraction en s'appuyant sur la verbalisation ?

— comment faire évoluer les connaissances et procédures mobilisées en fonction de la progression générale mise en œuvre par le professeur et particulièrement des cheminements cognitifs qu'il ménage pour les élèves ?

— quelle place donner à l'institutionnalisation, notamment comment développer des traces écrites du travail effectué ?

# Un problème additif et des exemples de réponses d'élèves

L'énoncé du problème est le suivant : « *Pierre et Paul ont ensemble 21 images, Pierre a 3 images. Combien Paul a-t-il d'images ?* »

Il s'agit de résoudre un problème à une étape relevant des structures additives (du champ additif), du type parties-tout et plus précisément de rechercher le nombre d'éléments d'une partie en connaissant le nombre d'éléments de l'autre partie et du tout.

Les élèves ont déjà rencontré ce type de problème (avec des nombres plus petits). Le plus souvent, ils les ont résolus en mettant en œuvre des procédures personnelles qui ont été comparées notamment avec des procédures plus efficaces. Toutefois, la pertinence de ces dernières n'a pas été perçue par tous.

### ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

À partir de productions d'élèves repérées dans des classes de CP, nous analysons des procédures dont il est peu probable qu'elles soient toutes observables dans la même classe de CP. Toutefois, elles peuvent apparaître ; la tâche du professeur est alors de les repérer dans l'action, de les analyser et de prévoir la manière de les prendre en compte et de les traiter. Le but est de créer les conditions nécessaires à l'appropriation progressive par tous les élèves des procédures de résolution les plus efficaces et les plus adaptées, et de faire évoluer les procédures personnelles de chacun.

Ces procédures se regroupent par famille relevant de raisonnements assez proches ou pouvant présenter des filiations utiles à connaître. La prise en compte de la qualité des connaissances mobilisées, des représentations, supports et registres convoqués nous amène à distinguer les trois grandes stratégies suivantes :

**Stratégie 1.** Les stratégies de dénombrement plutôt élémentaires : comptage, surcomptage ou décomptage, de un en un ou par sauts, etc. ;

**Stratégie 2.** Les stratégies de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections : représentations diverses, par exemple figuratives ou schématiques ;

**Stratégie 3.** Les stratégies de (ou proches du) calcul, plus ou moins explicitées et formalisées : frise numérique, schémas conventionnels, écritures mathématiques formelles (c – a = b) ou plus transitoires (a + ? = c ou a $\xrightarrow{?}$ c).

## Stratégie 1 : dénombrement plutôt élémentaire

Les procédures suivantes (élèves A, B et C) relèvent de cette catégorie.

**Élève A :** après avoir lu le problème, l'élève prend des jetons. Il compte d'abord 3 jetons, les dispose puis complète la collection de jetons jusqu'à 21 avec un peu de difficulté. Il recompte plusieurs fois les jetons disposés en revenant en arrière puis il dit : « *Paul a ces jetons-là* ». Le professeur répète la question du problème. L'élève compte les jetons et répond 18, il demande à vérifier son résultat en recomptant à nouveau et dit : « *c'est ça… dix-huit… non, dix-huit images* ».

**Élève B :** l'élève dessine une collection de 21 rectangles plus ou moins organisée (traces de constellations) en les comptant mentalement un à un. Il en raye 3, puis il compte un à un les rectangles restants et énonce le résultat : « *dix-huit* ».

**Élève C :** l'élève dessine d'abord 3 croix en énonçant en même temps les nombres de 1 à 3, marque un temps d'arrêt et complète ensuite la collection jusqu'à 21 (en laissant un espace entre les deux collections) en surcomptant de 4 à 21. Il compte alors les objets de la deuxième collection un à un et énonce le résultat : « *dix-huit* ».

Ces procédures se caractérisent par la **constitution effective des collections** intervenant dans le problème si l'élève dispose du matériel nécessaire (images, jetons, etc.) ou s'il produit leur représentation à l'aide de dessins plus ou moins figuratifs (rectangles, croix, etc.) au statut intermédiaire entre le schéma épuré et le dessin strictement figuratif. L'élève lit la réponse sur la collection reconstituée ou représentée. Il n'y a pas d'anticipation du résultat mais seulement un constat résultant de la traduction des données représentées à l'aide d'un comptage ou d'un surcomptage plus ou moins rapide. Donner la réponse revient alors à énoncer ce constat.

Afin d'identifier et de repérer ces procédures, le professeur prendra en compte le type de dénombrement (un par un, paquets par paquets), la qualité de la représentation (figurative ou davantage schématique), la présence de nombres écrits, l'organisation des collections qui peut faciliter ou non le comptage des collections.

## Stratégie 2 : dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques ou des abstractions

L'élève optimise, au moins en partie, le dénombrement des quantités en surcomptant ou décomptant, en mobilisant des représentations symboliques. Ces représentations ne relèvent pas de la simple description de la situation. Représentant une partie seulement des quantités, elles traduisent une organisation des collections qui révèle une montée en abstraction, voire un pas vers le calcul. En revanche, l'élève lit et constate le résultat sur la représentation en attribuant le nombre inconnu à la bonne collection. Il s'agit encore de stratégies de dénombrement qui évitent le calcul et pour lesquelles la lecture du résultat provient du constat de l'organisation élaborée de la ou des collections.

Les procédures suivantes (élèves D, E et F) relèvent de cette catégorie.

**Élève D :** l'élève décompte oralement : « *vingt, dix-neuf, dix-huit* », il lève un doigt en même temps qu'il énonce chacun des nombres et s'interrompt après avoir levé trois doigts, symbolisant le nombre d'images de Pierre ; il contrôle en regardant sa main et énonce le résultat en répétant le dernier mot-nombre énoncé : « *dix-huit* ». Dans une certaine mesure, l'élève a pris conscience qu'il doit « retirer » 3 à 21 par un décomptage s'appuyant sur une collection intermédiaire (ses doigts).

**Élève E** *:* après avoir dit à haute voix : « *vingt et un* », l'élève écrit sur sa feuille : « *20, 19, 18* » ; il s'interrompt après avoir écrit ces trois nombres et énonce le résultat : « *dix-huit* »[1]. Cette procédure révèle une prise de conscience semblable à celle de l'élève D. Comme le décomptage ne porte que sur trois nombres, l'élève n'a sans doute pas besoin de compter les nombres ainsi écrits. S'il s'agissait de retirer un nombre plus grand (par exemple 8, 9 ou plus), l'élève devrait sans doute accompagner le décomptage, du comptage des nombres écrits.

1 — Pour aider l'élève à comprendre qu'il ne faut pas écrire le « 21 », le professeur pourra s'appuyer sur du matériel.

**Élève F :** l'élève énonce le nombre 3, puis il surcompte jusqu'à 21 en écrivant au fur et à mesure les nombres : « *4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21* » ; il n'aligne pas ces nombres mais les écrit plutôt dans le désordre sur sa feuille. Il compte ensuite un à un (avec un peu de difficulté pour parcourir ce qu'il a écrit) le total de nombres ainsi écrits et note le résultat : « *18* ». Là encore, cette procédure révèle une prise de conscience proche du calcul ; il cherche à déterminer par un surcomptage comment « aller de 3 à 21 ». Cela revient à « ajouter » 18 à 3 en s'appuyant sur la collection des écritures des nombres.

Notons que cette prise de conscience est une caractéristique commune à ces trois procédures qui peut laisser penser que l'élève, en mobilisant conjointement une organisation de la collection (liée au support) et une procédure de dénombrement, se rapproche d'une procédure de calcul.

## Stratégie 3 : stratégies de (ou proches du) calcul, plus ou moins explicitées et formalisées

Les deux productions suivantes (élèves G et H) relèvent de cette catégorie.

**Élève G :** il énonce sur le mode interrogatif : « *trois pour aller à vingt et un* » ; il réfléchit un moment puis écrit successivement :

$$3 \xrightarrow[7]{} 10 \qquad 10 \xrightarrow[11]{} 21$$

$$7 + 11 = 18$$

***Figure 1.*** Production de l'élève G.

Il énonce le résultat : « *Paul a dix-huit images* ».

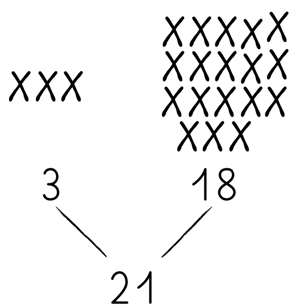
**Élève H :** l'élève dit : « *Je dois calculer vingt et un moins trois* » et écrit : « *21 – 3 =* ». Il commente : « *Je ne sais pas calculer directement… je fais vingt et un moins un, vingt* » et il écrit : « *21 – 1 = 20* », puis il énonce et écrit de la même façon « *20 – 2 = 18… comme ça j'ai enlevé trois.* ». Et il complète l'écriture soustractive : « *21 – 3 = 18* ».

Cette catégorie renvoie aux procédures qui traduisent la situation, explicitement ou non, par une écriture mathématique (3 + ? = 21 ou ? + 3 = 21 ou 21 – 3 = ?) et induisent un calcul ou non (dans ce dernier cas, l'élève peut alors éventuellement recourir à un dénombrement pour trouver la réponse). Les procédures de ce type mobilisent alors des registres faisant appel à des outils et connaissances mathématiques plus élaborés qui vont se décliner notamment selon les paramètres explicités suivants :

- les représentations, en particulier la frise numérique permettant des déplacements un à un ou une ligne numérique permettant des sauts associés à des calculs ;
- les procédures de calcul qui peuvent prendre plusieurs modes : **calcul en ligne**, **calcul mental** ou encore **calcul posé** ;
- les niveaux de formalisation mathématique : ils se traduisent par des écritures ou des formulations plus orales (comme par exemple dans le cas : « **pour trouver le nombre qui manque dans 3 + ? = 21, je peux chercher 21 – 3 = ?** ») ;
- les calculs intermédiaires plus ou moins adaptés aux nombres en jeu.

Notons que le professeur peut rencontrer des procédures difficiles à classer dans une de ces trois catégories car elles semblent présenter des caractéristiques de chacune de celles-ci. La production de l'**élève I** en est un exemple.

**Élève I :** l'élève dessine 21 croix en deux collections comme l'élève C mais écrit : « *3* » et « *18* », fait une ébauche d'arbre de calcul symbolisant les relations entre les nombres et écrit : « *21* ».




Il est difficile d'interpréter cette procédure qui semble relever de chacune des trois catégories ci-dessus. Un entretien avec l'élève permet toutefois de mieux comprendre sa démarche, sans savoir s'il s'agit d'une restitution fidèle ou d'une reconstitution.

***Figure 2.*** Production de l'élève I.

La question qui se pose au professeur de CP est donc celle-ci : comment gérer cette hétérogénéité de réponses (dont nous n'avons donné qu'un échantillon à travers ces neuf élèves) ? Comment qualifier ces différentes réponses et amener tous les élèves à reconnaître et à traiter le problème posé comme un problème additif se traduisant par une soustraction ou une addition à trou ?

# Comment créer les conditions de la réussite des élèves ?

Un objectif majeur est d'amener l'élève de fin de CP à reconnaître et résoudre des problèmes du type parties-tout à partir d'énoncés dont l'objet est de déterminer le cardinal d'une des parties connaissant l'autre partie et le tout ou de déterminer le cardinal du tout connaissant chacune des parties. Le document relatif aux attendus propose des exemples de problèmes devant être réussis au CP. Toutefois, il ne précise pas explicitement le degré de formalisation de la réponse alors qu'il existe différents chemins pour produire la réponse attendue.

On peut donc considérer que, pour ce type de problème, l'élève doit pouvoir, dans le domaine numérique évoqué, proposer une réponse juste exprimée sous forme d'une écriture additive ou soustractive traduisant la relation existant entre les trois nombres et s'accompagnant éventuellement d'un schéma. Si une réponse donnée sous la forme d'une écriture additive est acceptable (par exemple 11 + 16 = 27), il doit pouvoir comprendre qu'une des écritures soustractives associées à celle-ci (par exemple 27 – 11 = 16) traduit également la situation.

## Mettre en réseau les connaissances des élèves

Le travail du professeur est d'organiser l'apprentissage, en proposant aux élèves une suite de situations permettant de ménager à la fois des moments où l'élève pourra franchir lui-même ou avec ses pairs des étapes correspondant à un passage plutôt « naturel », et des moments où l'enseignant intervient plus directement pour apporter de l'information ou justifier ce franchissement par un apport indispensable.

Il s'agit donc pour le professeur de penser à une progression qui allie à la fois un jeu sur les variables des énoncés de problèmes (la taille des nombres par exemple), des moments d'acquisition de connaissances par les élèves et des moments de réinvestissement lors de résolution de problèmes (**mise en réseau de ces connaissances**) mais aussi des moments où le professeur apportera des informations permettant certains sauts conceptuels. Dans tous les cas, cela nécessite des moments d'institutionnalisation de sa part, des moments où il identifie avec et pour tous les élèves les montées en abstraction. Cela nécessite aussi qu'il organise les moments de **verbalisation**.

En termes de résolution de problèmes, l'objectif est de permettre à un élève lisant un énoncé de reconnaître (explicitement ou implicitement) le modèle sous-jacent et de mettre en œuvre les procédures permettant de le résoudre.

Rappelons que le but n'est pas d'enseigner aux élèves de CP (ni à ceux de l'école élémentaire) une classification formelle de problèmes élémentaires telle qu'elle peut être présentée dans des recherches en didactique des mathématiques[2], mais d'amener les élèves à reconnaître progressivement différents problèmes pouvant relever des structures additives (champs additifs) et multiplicatives et d'automatiser la reconnaissance de l'opération.

2 — Notamment une nomenclature associée et l'utilisation systématique d'un format de schéma permettant au chercheur de décrire et de modéliser le raisonnement associé à un type de problème.

# Interroger les domaines numériques, les procédures de dénombrement ou de calcul mobilisables

Le choix des nombres intervenant dans le problème peut amener l'élève à privilégier certaines procédures. C'est le cas pour les procédures de surcomptage ou de décomptage ; c'est aussi le cas pour provoquer le passage de ces procédures de dénombrement (stratégie 1 ou stratégie 2) à des procédures de calcul (stratégie 3). La taille des nombres en jeu constitue un élément important permettant de faire évoluer les procédures des élèves. De grands nombres rendent les stratégies de dénombrements coûteuses et peuvent favoriser le recours au calcul.

Ainsi, la mobilisation de calculs faisant appel à des faits numériques mémorisés constitue, pour l'élève, une économie qui justifie leur apprentissage et leur mémorisation. Il en est de même des différentes procédures de calcul et de leur évolution. Reproduire systématiquement le décomptage de 21 à 18 peut être considéré comme plus coûteux que la décomposition en deux calculs faisant appel à deux faits numériques mémorisés : « $21 - 1 = 20$ » (décomposition canonique de 21) puis « $20 - 2 = 18$ » (complément à 20 sachant que la décomposition « $1 + 2 = 3$ » relève des apprentissages du cycle 1) puis du seul fait numérique « $21 - 3 = 18$ ».

Toutefois cette prise de conscience ne peut se faire que si l'élève a mémorisé les faits numériques susceptibles d'être convoqués. Cela nécessite donc que le professeur ménage des moments de calcul mental et des moments de travail des techniques de calcul en ligne afin de constituer un **répertoire** suffisant de faits numériques pouvant être rappelés à bon escient lors de la résolution du problème (compléments à 10, doubles, etc.). Cela implique également un travail régulier sur l'exploration et l'enrichissement des décompositions additives de certains nombres (écritures additives et soustractives).

La résolution de problèmes est donc à mettre en relation avec l'enseignement de la numération et du calcul. L'apprentissage de la numération et notamment des différentes décompositions des nombres permet d'enrichir et d'optimiser les procédures de résolution de problèmes.

Inversement, la résolution de problèmes utilise les connaissances installées à cette occasion en numération et justifie en retour l'apprentissage de ces connaissances. **Cette relation entre numération et résolution de problèmes dépasse largement l'intérêt d'un travail sur les décompositions additives des nombres.**

Pour conclure, un premier principe pour élaborer une progression sera de penser une alternance entre moments de découverte, d'exploration des décompositions des nombres, mises en relation de ces connaissances avec des techniques de calcul (mentales ou en ligne puis posées), et moments de résolution d'un type de problème.

Un retour sur la résolution du problème avec d'autres variables numériques – plus grandes ou prenant en compte les propriétés des nombres relativement à la multiplication (multiples) ou de la division (diviseurs) – complète et renforce ces premiers apprentissages.

Le professeur peut jouer sur les variables numériques pour faire évoluer les procédures des élèves. Il peut aussi jouer sur le contexte évoqué par l'énoncé du problème et notamment sur les grandeurs en jeu afin d'amener l'élève à repérer que ce sont des procédures semblables et des opérations qui lui permettent de résoudre le problème. Par exemple en faisant intervenir dans la même structure d'énoncés d'autres grandeurs (**continues** ou **discrètes**) comme les prix, les longueurs ou les masses[3].

# Cheminements cognitifs et adaptations de l'enseignement

Nous avons proposé, dans la première partie de l'introduction, une classification en trois grandes stratégies qui se déclinent en procédures. Ces procédures se distinguent par le type de raisonnement mis en œuvre ou par le type de dénombrement ou de calcul mobilisé. Ainsi, une procédure s'appuyant sur un surcomptage est différente d'une autre convoquant un décomptage. Notons à ce propos que la mobilisation du comptage est plus fréquente chez les élèves de CP que celle du décomptage, qui nécessite une connaissance plus approfondie de la suite numérique liée à la possibilité de l'explorer « à reculons ».

De même, des ruptures correspondant à des sauts conceptuels distinguent les différentes procédures. C'est le cas du passage de la manipulation effective d'objets (dans notre cas, des images ou des objets représentant ces images) à la représentation par un dessin figuratif de ces objets puis à un schéma plus ou moins figuratif (représenter la collection par des rectangles est plus proche du dessin de l'image que la représenter à l'aide de croix, de ronds ou de points). C'est aussi le cas du passage d'une collection non organisée à une collection faisant apparaître une partition en deux sous-collections ou une décomposition particulière du ou des nombres. C'est également le cas du passage d'un dénombrement oral (s'appuyant sur le dessin ou le schéma) à l'écriture de nombres par l'élève.

L'objectif est d'amener progressivement l'élève à faire le calcul en utilisant les symboles des nombres. L'élève doit prendre conscience de la « puissance » des nombres, qui permettent d'anticiper le résultat d'une action. La manipulation ou le dessin changeront alors de statut. Ils permettront dans un premier temps de trouver le résultat et plus tard de le vérifier. Ils seront par la suite reconnus comme « inutiles » quand l'élève sera capable d'anticiper, voire de calculer. Toutefois, pour certains élèves en difficulté, ce recours à des objets matériels ou à des dessins peut s'avérer profitable plus longtemps.

3 — Exemple de problème : « *Florence et Sonia ont mis ensemble leur argent pour acheter un livre à 21 €. Florence a donné 18 €. Combien Sonia a-t-elle donné ?* »

Une étape déterminante, emblématique de l'enseignement des mathématiques au CP par rapport à la maternelle, se situe dans le passage d'une procédure de dénombrement (comptage, surcomptage ou décomptage) à la traduction de celle-ci en termes d'écritures additives ($7 + 5 = 12$) ou soustractives ($12 - 7 = 5$). Cette étape suppose notamment que l'élève donne du sens à ces écritures par la mobilisation de faits numériques reconstruits puis progressivement mémorisés.

Enfin, il est raisonnable de penser qu'une autre rupture (ou saut conceptuel), en relation avec la précédente, réside dans le passage de l'écriture additive à l'écriture soustractive et ce, notamment quand il s'agit d'un calcul proche du surcomptage. En effet, l'écriture additive (à trou) traduit plus spontanément le surcomptage (« pour aller à ») que l'écriture soustractive. Ce passage relève alors dans un premier temps davantage du respect d'une convention d'écriture (introduite par le professeur et ayant du sens pour les mathématiciens) que d'une montée plus « naturelle » en abstraction. Toutefois cela ne doit pas conduire le professeur à différer l'introduction d'une écriture soustractive qui témoignera d'une conceptualisation plus élevée. Notons que l'écriture soustractive est sans doute plus naturelle que l'écriture additive quand il s'agit du problème « *Pierre avait 21 images. Il en a perdu 3. Combien lui en reste-t-il ?* ».

Comment amener progressivement l'élève à produire des procédures se rapprochant puis faisant appel à un calcul ? Comment amener l'élève à passer de la manipulation (effective ou s'appuyant sur une représentation plus ou moins figurative) à l'abstraction ? Comment développer les verbalisations qui vont accompagner progressivement ces étapes ?

## Exemple de deux cheminements cognitifs

Nous pouvons identifier plusieurs cheminements cognitifs possibles permettant de passer progressivement de la manipulation à la mise en œuvre de calculs pour résoudre le problème. Ces cheminements sont initialisés par quelques procédures bien définies, dont certaines sont privilégiées par les élèves. Nous présentons ci-après deux cheminements qui nécessitent des interventions différentes et adaptées du professeur. Nous nous limitons ici aux procédures initialisées par un surcomptage ou un décomptage.

### DU SURCOMPTAGE AU CALCUL, DE L'ÉNONCÉ DU RÉSULTAT À LA MODÉLISATION

Le but est d'amener les élèves qui ont mobilisé une procédure relevant ou s'appuyant sur un surcomptage à passer progressivement et par étapes à des procédures de calcul. Ces étapes sont souvent nécessaires pour les élèves les moins performants. Elles leur permettent d'accéder progressivement aux procédures efficaces. D'autres élèves peuvent s'en dispenser.

**Passage de la manipulation d'objets au surcomptage sur des schémas.** Le passage d'une production s'appuyant exclusivement sur la manipulation (élève A) à celle s'appuyant sur des dessins de rectangles (élève B) peut se faire par la mise en évidence des points de ressemblance dans la démarche. Il est possible de favoriser ce saut conceptuel en proposant dans un premier temps des objets physiques de plus en plus simples (images, rectangles de papier, jetons, cubes ou bâtonnets) puis en épurant progressivement le dessin, du dessin d'images à celui de rectangles (élève B) puis de bâtons ou de croix (élève C). Ce passage de la manipulation à des dessins ou des schémas ne doit être envisagé que lorsque la résolution s'appuyant sur la manipulation est maîtrisée par l'élève. Il ne se fait pas brutalement, mais progressivement ; l'élève pourra ainsi traiter aisément certains problèmes par un simple schéma, mais pourra avoir besoin de recourir à la manipulation d'objets pour un autre type de problèmes.

**Passage du surcomptage (oral) à l'écriture des nombres en chiffres.** Bien que non obligatoire, ce passage peut encourager ensuite le recours à la frise numérique (complète ou non) ou à la ligne numérique. Le professeur s'attachera à mettre en relation le dénombrement un à un des objets – et conjointement leur énoncé oral – avec leur écriture chiffrée et l'équivalence entre compter les croix et utiliser les nombres.

**Passage du surcomptage s'appuyant sur des écritures chiffrées au surcomptage avec appui sur la frise numérique.** Ce passage est assez naturel dans la mesure où l'écriture en ligne des nombres est proche d'une disposition de ces nombres sur la frise numérique.

**Passage du surcomptage sur la frise numérique à celui d'un calcul par bonds sur cette frise numérique ou sur une ligne numérique.** Ce passage devient plus naturel et permet d'expliciter la procédure mise en œuvre par l'élève H. Cela peut impliquer soit un appui sur une ligne numérique présentant les différentes étapes (bonds), soit l'introduction de notations semblables à celles employées par l'élève H et leur traduction en une écriture additive.

**Passage du calcul sur la frise numérique ou sur une ligne numérique à des procédures faisant intervenir des écritures formelles.** Ce passage sera fait progressivement en s'appuyant sur une automatisation progressive des faits numériques associés.

**Rappelons que la déclinaison de ces différents passages ne constitue pas des étapes obligatoires pour tous les élèves.** Certains peuvent s'en passer alors que d'autres ont besoin d'en explorer une ou plusieurs. C'est au professeur d'adapter son enseignement aux difficultés rencontrées ou non par chaque élève dans ce passage progressif de la manipulation à l'abstraction en s'appuyant sur les verbalisations des élèves.

## DU DÉCOMPTAGE AU CALCUL

Un autre cheminement va consister à optimiser progressivement les procédures de décomptage pour déboucher sur des procédures de calculs se traduisant par des écritures soustractives. Les différentes étapes sont analogues à celles proposées pour aller du surcomptage au calcul.

Par exemple, pour le passage de la procédure mise en œuvre par l'élève D à celle mise en œuvre par l'élève E, il suffit de montrer que le recours au comptage auxiliaire sur les doigts peut être remplacé par le comptage du nombre d'écritures chiffrées inscrites.

### CONCLUSION

Ces deux cheminements cognitifs sont différents, même s'ils mobilisent des outils identiques (comptage sur les doigts, écritures chiffrées, frise numérique, etc.) et présentent des étapes semblables (en termes de montée en abstraction). Ils se différencient par les faits numériques, les écritures et les opérations mobilisées (addition puis soustraction dans le premier cas, soustraction dans le second cas).

En fonction de la procédure individuelle de l'élève, le professeur pourra prendre en compte les différents cheminements en adaptant son intervention. Cela suppose qu'il puisse les identifier en classe à partir des productions des élèves. Cela nécessite une observation fine des élèves lors des activités de classe. En revanche, le nombre limité de procédures proposées spontanément par les élèves peut amener le professeur à enrichir la palette des procédures produites afin de faciliter certains des passages explicités ci-dessus. Pour cela, il pourra introduire lui-même certaines procédures n'ayant pas été produites par les élèves de la classe, par exemple en évoquant les productions (orales ou écrites) d'autres élèves rencontrées dans une autre classe.

## Des modalités d'institutionnalisation

Lors des moments de synthèse et d'institutionnalisation, le professeur s'attache à faire expliciter les productions des élèves. Quand il le juge possible, le professeur hiérarchisera les procédures mises en œuvre en prenant en compte leur efficacité et leur économie afin de montrer qu'elles ne se valent pas toutes. De manière à réduire le temps consacré à ces moments de synthèse, le nombre de procédures exposées est limité ; ce choix effectué par le professeur répond à deux critères au moins : exposer la ou les procédures efficaces, permettre à l'élève de se repérer dans la hiérarchie de procédures et de franchir des étapes du cheminement dans lequel il s'est inscrit.

En fonction de la qualité et de la diversité des productions des élèves, il peut apporter des exemples de procédures ménageant les étapes nécessaires pour faire évoluer certaines procédures non mobilisées par les élèves de la classe. Quand les productions des élèves sont suffisamment riches, pour les rendre accessibles, il peut aussi introduire des éléments de formalisation mathématique (schémas ou écritures) et identifier, voire introduire la ou les procédures attendues. Dès que les performances des élèves dans le domaine de la lecture et de l'écriture le permettent, **ces institutionnalisations doivent s'appuyer sur des écrits**. Ces moments sont aussi l'occasion d'identifier les énoncés qui relèvent d'un même type de problème.

# Le traitement des erreurs

Revenons maintenant sur l'erreur produite par un élève qui propose comme solution «*21 + 3 = 24*» au problème précédent. Cet élève n'a pas reconnu une situation de soustraction. Avant de l'aider à développer un raisonnement lui permettant d'élaborer une réponse juste, un moyen de lui montrer son erreur est d'attirer son attention sur la pertinence de sa réponse. Le professeur pourra par exemple lui demander : «*Si Paul a 24 images et si Pierre en a 3, combien en ont-ils à eux deux ?*»

Nous avons ici une modalité de traitement individualisé de l'erreur. Celui-ci peut être complété avantageusement par un traitement collectif. Ainsi, lors de la phase collective d'explicitation des productions des élèves, le professeur peut écrire au tableau l'ensemble des réponses des élèves et demander à la classe quelles sont les réponses qui ne sont pas acceptables ; les élèves doivent justifier leurs propositions en argumentant leurs choix. Cette modalité de travail s'installe sur la durée. En début d'année, les élèves peuvent éprouver beaucoup de difficulté à répondre à cette demande qu'ils ne comprennent pas. Le professeur pourra alors, lors d'une phase collective, poser des questions du type de celle évoquée ci-dessus. Puis dans un second temps, plusieurs élèves (souvent les élèves les plus performants en mathématiques) relayent le professeur. Sur une année, cette pratique concerne de plus en plus d'élèves, y compris ceux en difficulté. Cet apprentissage est toutefois fragile et doit être repris suffisamment de fois et sur une période longue dépassant souvent une année pour amener les plus faibles à se l'approprier.