Equation de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Soit M(u,v) sur l'hyperbole, on a donc

$$\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}=1 \quad \text{ou encore} \quad \frac{u^2b^2-a^2v^2}{a^2b^2}=1 \quad \text{et donc} \quad u^2b^2-a^2v^2=a^2b^2$$

Soit (T) la tangente à l'hyperbole en M, on sait que son équation est :

$$\frac{xu}{a^2}-\frac{yv}{b^2}=1$$

Les asymptotes (D) et (D') à l'hyperbole on pour équation

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{et} \quad y=\frac{-b}{a}x$$

Soit A le point d'intersection de (T) et (D)

En remplaçant y par $\frac{b}{a}x$ dans l'équation de (T) on a :

$$\frac{xu}{a^2}-\frac{bvx}{ab^2}=1 \quad \text{d'où on tire} \quad x=\frac{a^2b}{ub-av} \quad \text{puis en remplaçant} \quad y=\frac{ab^2}{ub-av}$$

Donc A a pour coordonnées $\left(\frac{a^2b}{ub-av},\frac{ab^2}{ub-av}\right)$,

De même pour B point d'intersection de (T) et (D')

On trouve que B a pour coordonnées $\left(\frac{a^2b}{ub+av},\frac{-ab^2}{ub+av}\right)$,e de

Calculons l'aire de AOB

C'est l'aire de AOI plus l'aire de BOI

On prend comme base OI soit l'abscisse de I et comme hauteur l'ordonnée (en valeur absolue) de A pour OAI ou de B pour OBI,

Il ne reste qu'à chercher l'abscisse de I, en remplaçant y par 0 dans l'équation de (T),

On trouve $x_I=\frac{a^2}{u}$

donc Aire AOB= $\frac{|y_A|x_I}{2}+\frac{|y_B|x_I}{2} = \frac{x_I}{2}(|y_A|+|y_B|)$

$$|y_A|+|y_B|=\frac{ab^2}{ub-av}+\frac{ab^2}{ub+av} = ab^2\left(\frac{1}{ub-av}+\frac{1}{ub+av}\right) = ab^2\left(\frac{ub+av+ub-av}{u^2b^2-a^2v^2}\right)$$

Or on a vu au début que $u^2b^2-a^2v^2=a^2b^2$

donc

$$|y_A|+|y_B| = ab^2\left(\frac{2ub}{a^2b^2}\right) = \frac{2ub}{a}$$

Finalement comme $x_I=\frac{a^2}{u}$, aire AOB= $\frac{a^2}{2u}\frac{2ub}{a}$ = **ab**.

Méthode du déterminant :

$$\overrightarrow{OA}\left(\frac{a^2b}{ub-av},\frac{ab^2}{ub-av}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB}\left(\frac{a^2b}{ub+av},\frac{-ab^2}{ub+av}\right) \quad \text{et}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{a^2 b}{ub-av} & \frac{a^2 b}{ub+av} \\ \frac{a b^2}{ub-av} & \frac{-a b^2}{ub+av} \end{vmatrix} = \left(\frac{a^2 b}{ub-av}\right)\times\left(\frac{-a b^2}{ub+av}\right) - \left(\frac{a b^2}{ub-av}\right)\times\left(\frac{a^2 b}{ub+av}\right)$$

$$= \frac{-2a^3 b^3}{(ub-av)(ub+av)} = \frac{-2a^3 b^3}{a^2 b^2} = -2ab$$

Aire (AOB) = $\frac{1}{2}|det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA})| = \frac{1}{2}|-2ab| =$ ***ab***

Soit I le milieu de [AB]

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 b}{ub-av} + \frac{a^2 b}{ub+av}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 b(ub+av+ub-av)}{(ub-av)(ub+av)} = \frac{1}{2}\,\frac{2a^2 b\,u b}{a^2 b^2} = u$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a b^2}{ub-av} + \frac{-a b^2}{ub+av}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a b^2(ub+av-ub+av)}{(ub-av)(ub+av)} = \frac{1}{2}\,\frac{2a b^2 a v}{a^2 b^2} = v$$

Donc I et M sont confondus.