

PREPA 2021 - ECS - Scientifique

Mathématiques option scientifique

501079

SURGET

ARNO

06/09/2002

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

5 0 1 0 7 9



Né(e) le

0 6 / 0 9 / 2 0 0 2

Signature

Sujet

Nom

S U R G E T

Prénom (s)

A R N O

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 1 /

0 7

Numéro de table

2 2 9

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 7

$$1) \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3 = -3A}$$

Ainsi, $A^3 + 3A = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. Le polynôme $P(X) = X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$ est donc un polynôme annulateur de A .

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow X(X^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X^2 + 3 = 0$$

Or, $X^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 = -3$, ce qui est impossible vu que P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Ainsi, $P(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$. L'unique racine réelle de P est 0.

On a donc l'inclusion: $\Sigma_p(A) \subset \{0\}$

Vérifions que $0 \in \Sigma_p(A)$

$$0 \in \Sigma_p(A) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} / AX = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ z = x \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

Le vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient donc, $0 \in \Sigma_p(A)$.

On en déduit donc que $\Sigma_p(A) = \{0\}$

D'après les calculs précédents, $X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow X \in \text{Vect}((1,1,1))$.

Or, $\dim \text{Vect}((1,1,1)) = 1 \neq 3$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne vaut pas 3, donc A n'est pas diagonalisable.

2) J et S sont symétriques réelles, donc J et S sont diagonalisables

$$SJ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$JS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien $SJ = JS$

3) $\Sigma_p(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ - Déterminons les sous-espaces propres de S .

$$X \in \text{Ker}(S) \Leftrightarrow SX = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(S) = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

$$X \in \text{Ker}(S - \sqrt{3}I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{3})x - y = 0 \\ -x - \sqrt{3}y + z = 0 \\ y - (1+\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y - z = 0 \\ (1-\sqrt{3})x - y = 0 \\ y - (1+\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y - z = 0 \\ y - (1+\sqrt{3})z = 0 \\ y(3\sqrt{3}-1) + (1-\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y - z = 0 \\ y - (1+\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

- 4) On admet que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J .
Réciproquement, tout vecteur propre de J est vecteur propre de S .

Ainsi, J et S ont les mêmes vecteurs propres, ces matrices sont donc diagonalisables dans une base commune de vecteurs propres.

Dès lors, il existe une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

$$5) l_1(M) = \sum_{j=1}^n m_{1,j}$$

l_1 est une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Soient M_1 et M_2 deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, λ un réel.

Numéro d'inscription

5 0 1 0 7 9



Né(e) le

06 / 09 / 2002

Signature

Surgel

Nom

S U R G E T

Prénom (s)

A R N O

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 /

07

Numéro de table

229

Commencez à composer dès la première page

$$\begin{aligned}
 l_1(\lambda M_1 + M_2) &= \sum_{j=1}^n [\lambda M_1 + M_2]_{1,j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \lambda [M_1]_{1,j} + [M_2]_{1,j} \\
 &= \lambda \sum_{j=1}^n [M_1]_{1,j} + \sum_{j=1}^n [M_2]_{1,j} \\
 &= \lambda l_1(M_1) + l_1(M_2)
 \end{aligned}$$

l_1 est linéaire

On en conclut que l_1 est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$

6) K_n est non vide (il contient notamment la matrice nulle).

$\forall M \in K_n, M \in E_n$.

Soient M_1 et M_2 deux matrices de K_n , λ un réel

$$a(\lambda M_1 + M_2) = a(\lambda M_1 + M_2)$$

$$= \lambda a(M_1) + a(M_2) \quad \text{car } a \text{ est linéaire}$$

$$= \lambda \times 0 + 0$$

$$= 0$$

Ainsi, $\lambda M_1 + M_2 \in K_n$.

K_n est par conséquent un sous-espace vectoriel de E_n

7) Soit $M \in E_n$. $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $l_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \text{ soit } {}^t M = (m_{ij}) \quad \text{avec } m_{ij} = m_{ji} \\ l_i({}^t M) = \sum_{j=1}^n m_{ij} \quad c_j({}^t M) = \sum_{i=1}^n m_{ij} \\ = \sum_{j=1}^n m_{ji} = \sum_{i=1}^n m_{ji} \\ = c_i(M) = l_j(M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1({}^t M) = \sum_{i=1}^n m_{ii} = \sum_{i=1}^n m_{ii} = d_1(M) \\ d_2({}^t M) = \sum_{i=1}^n m_{i, n-i+1} = \sum_{i=1}^n m_{n-i+1, i} \\ = \sum_{i=1}^n m_{i, n-i+1} = d_2(M) \end{aligned}$$

Donc que $M \in E_n$, on en déduit que $l_i({}^t M) = c_j({}^t M) = d_1({}^t M) = d_2({}^t M) = a(M)$.
Ainsi, $\boxed{{}^t M \in E_n \text{ et } a({}^t M) = a(M)}$

8) Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$.

$$\text{Ainsi, } \forall \lambda \in \mathbb{R}, M - \lambda J_n = \begin{pmatrix} m_{11}-\lambda & \dots & m_{1n}-\lambda \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}-\lambda & \dots & m_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

On voit que $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $l_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M) = a(M)$.

$$\text{Or, } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, l_i(M - \lambda J_n) = \sum_{j=1}^n (m_{ij} - \lambda) = l_i(M) - \lambda n = a(M) - \lambda n$$

De même, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_j(M - \lambda J_n) = a(M) - \lambda m$.

$$\text{Et } d_1(M - \lambda J_n) = d_2(M - \lambda J_n) = a(M) - \lambda m.$$

Ainsi, $M - \lambda J_n \in K_n \Leftrightarrow a(M - \lambda J_n) = 0$

$$\Leftrightarrow a(M) - \lambda m = 0$$

$$\Leftrightarrow a(M) = \lambda m$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{a(M)}{m}$$

Il existe donc un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in K_n$ avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$$9) M \in E_n, W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$MW_n = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n m_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n m_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(M) \\ \vdots \\ a(M) \end{pmatrix}$$

$$= a(M) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= a(M) W_n.$$

W_n n'étant pas nul, W_n est un vecteur propre de M et la valeur propre associée est $a(M)$.

$$10) \forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2,$$

$$l_i(A) = c_j(A) = d_1(A) = d_2(A) = 0$$

$$l_i(j) = c_j(j) = d_1(j) = d_2(j) = 3$$

$$l_i(S) = c_j(S) = d_1(S) = d_2(S) = 0$$

A, j et S sont donc magiques, et $\mu(j) = 3$, $\mu(A) = \mu(S) = 0$

$$11) \quad \forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad M = \frac{M + {}^t M}{2} + \frac{M - {}^t M}{2}.$$

$$M = M_2 + M_1 \quad \text{avec} \quad M_1 = \frac{M + {}^t M}{2}, \quad M_2 = \frac{M - {}^t M}{2}$$

$${}^t M_2 = \frac{1}{2} ({}^t M + M) = \frac{M + {}^t M}{2} = M_2 \quad ; \quad M_2 \text{ est symétrique}$$

$${}^t M_1 = \frac{1}{2} ({}^t M - M) = -\frac{M - {}^t M}{2} = -M_1 \quad ; \quad M_1 \text{ est antisymétrique}$$

Vérifions l'unicité de ce couple.

On a montré que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille 3 et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille 3.

$$M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t M = M \text{ et } {}^t M = -M$$

$$\Leftrightarrow M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

La somme est directe: on a

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).$$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe donc un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que $M = M_1 + M_2$ avec $\begin{cases} M_1 \text{ antisymétrique} \\ M_2 \text{ symétrique} \end{cases}$

12a) K_3 étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_3$ (d'après 6), et comme M et ${}^t M$ appartiennent à K_3 (d'après 7), $\frac{M + {}^t M}{2}$ et $\frac{M - {}^t M}{2}$ appartiennent aussi à K_3 non qu'un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

M_1 et M_2 appartiennent donc à K_3

Numéro d'inscription

5 0 1 0 7 9



Né(e) le

0 6 / 0 9 / 2 0 0 2

Signature

Sujet

Nom

S U R G E T

Prénom (s)

A R N O

20 / 20

Ecricone

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 3 /

0 7

Numéro de table

2 2 9

Commencez à composer dès la première page.

$$12b) {}^tA = {}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$${}^tS = S$$

A est antisymétrique et appartient à K_3 d'après 7a).

S est symétrique et, de même, appartient à K_3 d'après 7a).

Ainsi, $M_1 \in K_3 \cap A_3(\mathbb{R})$ et $A \in K_3 \cap A_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R} / M_1 = \alpha A}$

$M_2 \in K_3 \cap S_3(\mathbb{R})$ et $S \in K_3 \cap S_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{\exists \beta \in \mathbb{R} / M_2 = \beta S}$

13) D'après 7a) et 12b), toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la

forme : $M = \alpha A + \beta S$

La famille (A, S) est donc génératrice de $M_3(\mathbb{R})$.

Montrons qu'elle est libre

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xA + yS = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & x-y & x \\ -x & 0 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ -x & 0 & x \\ 0 & x & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y & x \\ -x & -x & y \\ x & y & -x \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & x-y & x \\ -x & -x & y \\ x & y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y & x \\ -x & -x & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

(A, S) est bien libre

Donc une base de K_3 est : (A, S)

D'après 8), $\left(M - \frac{a(n)}{3}j, \underbrace{\frac{a(n)}{3}j}_{\in \text{Vect } j}\right) \in E_3$ avec $M - \frac{a(n)}{3} \in K_3$

Cette décomposition étant unique et une base de K_3 étant (A, S) , on obtient par concaténation de bases une base de E_3 , qui est (A, j, S)

Problème

1a) fonction $V = \text{sim} - V(n, a)$

$X = \text{grand}(1, n, 'inf', 0, a)$

$V = X(1)$

for $k = 2:n$

if $X(k) \geq X(k-1)$ then

$V = X(k)$

else $V = V$

end

endfunction

1b) À partir de ce graphique, on peut conjecturer que V_n converge vers $a = 1$,
c'est un estimateur convergent de a

2a) $X_1 \sim U([0, a])$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition F_{X_1} de X_1 est:

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{a} & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

2b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(V_n \leq x)$

$$= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$

$$= P((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x))$$

$$= P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance des } X_i$$

$$= (F_{X_1}(x))^n \quad \text{car les } X_i \text{ suivent la même loi}$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

2c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \leq 0}} F_n(x) = 0 = \left(\frac{0}{a}\right)^n = F_n(0).$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} F_n(x) = 1 = \left(\frac{a}{a}\right)^n = F_n(a).$$

F_n est continue en 0 et en a .

De plus, d'après les théorèmes précédents, F_n est continue et dérivable sur $[0, a]$, continue sur $] -\infty, 0[$ et $]a, +\infty[$.

F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, d'où V_n est une variable à densité.

En dérivant F_n là où cela est possible, on obtient une densité f_n de V_n ,

définie par:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) Comme $\forall i \in [1, n], X_i \in [0, a], V_n \in [0, a]$.

V_n est bornée, donc elle admet une espérance

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } E(V_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx \\ &= \int_0^a x \frac{n}{a^n} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^n dx \\ &= \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a \\ &= \frac{n}{a^n} \frac{a^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$E(V_n) = \frac{n}{n+1} a$$

$E(V_n) \neq a$, donc l'estimateur V_n n'est pas sans biais

4) $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(|V_n - a| \geq \varepsilon) &= 1 - P(|V_n - a| \leq \varepsilon) \\ &= 1 - P(-\varepsilon \leq V_n - a \leq \varepsilon) \\ &= 1 - P(a - \varepsilon \leq V_n \leq a + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = 1 - F_n(a + \varepsilon) + F_n(a - \varepsilon)$$

Si $0 < \varepsilon < a$, alors $F_n(a + \varepsilon) = 1$ et $F_n(a - \varepsilon) = \left(\frac{a - \varepsilon}{a}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Si $\varepsilon > a$ alors $F_n(a + \varepsilon) = 1$ et $F_n(a - \varepsilon) = 0$

Dans tous les cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = 0$.

V_n converge en probabilité vers a , l'estimateur V_n est donc convergent

Numéro d'inscription

5 0 1 0 7 9



Né(e) le

06 / 09 / 2002

Signature

Surgat

Nom

S U R G E T

Prénom (s)

A R N O

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 /

07

Numéro de table

229

Commencez à composer dès la première page.

$$5) \quad n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{R}$$

$$P(n(a - V_n) \leq k) = P(na - nV_n \leq k)$$

$$= P(-nV_n \leq k - na)$$

$$= P(nV_n \geq na - k)$$

$$= P(V_n \geq \frac{na - k}{n})$$

$$= P(V_n \geq a - \frac{k}{n})$$

$$= 1 - P(V_n \leq a - \frac{k}{n})$$

$$= 1 - F_n(a - \frac{k}{n})$$

$$\text{si } \frac{k}{n} < 0, \quad F_n(a - \frac{k}{n}) = 1 \quad \text{d'où } P(n(a - V_n) \leq k) = 0.$$

$$\text{si } \frac{k}{n} > a, \quad F_n(a - \frac{k}{n}) = 0 \quad \text{d'où } P(n(a - V_n) \leq k) = 1.$$

$$\text{si } \frac{k}{n} \in [0, a], \quad P(n(a - V_n) \leq k) = 1 - \left(\frac{a - \frac{k}{n}}{a}\right)^n$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{k}{an}\right)^n$$

$$= 1 - e^{n \ln(1 - \frac{k}{an})}$$

$$\text{Ainsi, } P(n(a - V_n) \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 - e^{n \ln(1 - \frac{k}{an})} & \text{si } k \in [0, an] \\ 1 & \text{si } k > an \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{fonction continue} \\ \text{sur } \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$$\text{Soit } X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{a}\right). \quad P(X \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 - e^{-\frac{k}{a}} & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

Or, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\ln\left(1 - \frac{k}{an}\right) = \frac{-k}{an} + o\left(\frac{k^2}{a^2n}\right) \text{ d'où } n \ln\left(1 - \frac{k}{an}\right) = \frac{-k}{a} + o\left(\frac{k^2}{a^2n}\right).$$

$$\text{Ainsi, } 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{k}{an}\right)} = 1 - e^{\frac{-k}{a} + o\left(\frac{k^2}{a^2n}\right)} \\ \underset{+\infty}{\sim} 1 - e^{\frac{-k}{a}}$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} an = +\infty$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n/a - V_n \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 - e^{\frac{-k}{a}} & \text{si } k \geq 0 \end{cases} \\ = F_X(k)$$

La suite $(n/a - V_n)_{n \geq 1}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$

7e) V_n est bornée d'après 3), donc V_n admet un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} E(V_n^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x) dx \\ &= \int_0^a x^2 \frac{n}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^{n+1} dx \\ &= \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^a \end{aligned}$$

$$E(V_n^2) = \frac{\frac{n}{n+2} a^2}{\frac{n}{n+2} a^2} = \frac{n}{n+2} a^2$$

7b) Soit $\sigma_a(V_n)$ le risque quadratique de V_n , et $\sigma_a(V_n)$ son biais

$$\sigma_a(V_n) = (\sigma_a(V_n))^2 + V(V_n)$$

$$= (E(V_n) - a)^2 + E(V_n^2) - E^2(V_n) \text{ d'après la formule de Hérisz - Huygens}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}a - a\right)^2 + \frac{n}{n+2}a^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}a^2$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}a^2 + a^2 \left(\frac{(n+1)^2 n - (n+2)n^2}{(n+2)(n+1)^2} \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{n+2 + (n+1)^2 n - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{n+2 + n^3 + 2n^2 + n - n^3 - 2n^2}{(n+1)^2(n+2)} \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{2n+2}{(n+1)^2(n+2)} \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{2(n+1)}{(n+1)^2(n+2)} \right)$$

$$\sigma_a(V_n) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_a(V_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)} = 0. \text{ On retrouve le résultat déterminé}$$

en 4) selon lequel l'estimateur V_n est convergent

8) fonction $y = \sin - M(n, a)$

$$y = 2/n * \text{grand}(1, n, 'unf', 0, a)$$

$$X = \text{grand}(1, n, 'unf', 0, a)$$

$$Y = \text{sum}(X)$$

$$y = 2/n * Y$$

endfunction

$$\begin{aligned} 9) \quad E(\bar{X}_n) &= E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1}{n} n \frac{a}{2} \quad \text{car } \forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i \sim U(0, a) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(\bar{X}_n) = \frac{a}{2}}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_n) &= V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \quad \text{par indépendance des } X_i \\ &= \frac{1}{n^2} n V(X_1) \\ &= \frac{1}{n} \frac{a^2}{12} \quad \text{car } \forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i \sim U(0, a) \end{aligned}$$

$$\boxed{V(\bar{X}_n) = \frac{a^2}{12n}}$$

$$\begin{aligned} E(M_n) &= E(2\bar{X}_n) \\ &= 2 E(\bar{X}_n) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= 2 \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$E(M_n) = a$$

M_n est donc un estimateur sans biais de a

10) Soit $r_a(M_n)$ le risque quadratique de M_n et $b_a(M_n)$ en biais.

$$\begin{aligned} r_a(M_n) &= (b_a(M_n))^2 + V(M_n) \\ &= 0 + V(M_n) \\ &= V(2\bar{X}_n) \\ &= 4V(\bar{X}_n) \\ &= \frac{4a^2}{12n} \end{aligned}$$

$$\boxed{r_a(M_n) = \frac{a^2}{3n}}$$

Numéro d'inscription

5 0 1 0 7 9



Né(e) le

06 / 09 / 2002

Signature

Suz

Nom

S U R G E T

Prénom (s)

A R N O

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05 /

07

Numéro de table

229

Commencez à composer dès la première page.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{3n^2} = 0.$$

L'estimateur M_n est donc convergent

17)

La suite de variables aléatoires (X_n) est composée de variables indépendantes, de même loi, de même espérance $\frac{a}{2}$ et de même variance non nulle $\frac{a^2}{12}$.

Ainsi, on peut appliquer le théorème de la limite centrée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \frac{a}{2}}{\frac{a^2}{12}} \leq k\right) = \phi(k) \quad \text{avec } \phi \text{ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} \frac{M_n - a}{\frac{a^2}{12}} \leq 2k\right) = \phi(k)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} (M_n - a) \leq \frac{24k}{a^2}\right) = \phi(k)$$

Soit $u = \frac{24k}{a^2}$. Ainsi, $a^2 u = 24k$ et $k = \frac{a^2 u}{24}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} (M_n - a) \leq u\right) = \phi\left(\frac{a^2 u}{24}\right)$$

$(\sqrt{n} (M_n - a))$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale

$$13) \quad r_a(V_n) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$r_a(M_n) = \frac{a^2}{3n} = \frac{2a^2}{6n}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } 6n - (n+1)(n+2) \\ &= 6n - (n^2 + 3n + 2) \\ &= 6n - n^2 - 3n - 2 \\ &= -n^2 + 3n - 2 \end{aligned}$$

Étudions le polynôme $P(X) = -X^2 + 3X - 2$

$$\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1$$

Il a donc deux racines réelles distinctes : $X_1 = \frac{-3-1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$

$$X_2 = \frac{-3+1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Ainsi, $\forall n \geq 2, P(n) \leq 0$

$$\Rightarrow 6n - (n+1)(n+2) \leq 0$$

$$\Rightarrow 6n \leq (n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{6n} \geq \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_a(M_n) \geq r_a(V_n)}$$

V_n est donc un meilleur estimateur que M_n pour $n \geq 2$

En effet, on observe sur la figure 3 que, à mesure que n augmente, V_n se rapproche plus rapidement de a que M_n .

$$14a) \quad n \in \mathbb{N}^*, t \in]a, 2a]$$

$$\begin{aligned} P(V_n \leq k) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq k) \\ &= P((X_1 \leq k) \cap \dots \cap (X_n \leq k)) \\ &= P(X_1 \leq k) \times \dots \times P(X_n \leq k) \text{ par indépendance des } X_i \\ &= P(X_1 \leq k) (P(X_2 \leq k))^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } P(X_2 \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \frac{k}{2a} & \text{si } k \in [0, a] \\ 1 & \text{si } k > a \end{cases} \quad (*) \quad \text{et} \quad P(X_1 \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \frac{k}{2a} & \text{si } k \in [0, 2a] \\ 1 & \text{si } k > 2a \end{cases} \quad (**)$$

$$\text{D'où, } \forall t \in]a, 2a], \quad P(V_n \leq k) = \frac{k}{2a} \times 1^{n-1}$$

$$\boxed{P(V_n \leq k) = \frac{k}{2a}}$$

14b) D'après (*) et (**), la fonction de répartition de V_n est F_{V_n} et :

$$\boxed{F_{V_n}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \frac{k}{2a} \left(\frac{k}{a}\right)^{n-1} & \text{si } k \in [0, a] \\ \frac{k}{2a} & \text{si } k \in]a, 2a] \\ 1 & \text{si } k > 2a \end{cases}}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{a}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{si } k \in [0, a]$. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{V_n}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq a \\ \frac{k}{2a} & \text{si } k \in]a, 2a] \\ 1 & \text{si } k > 2a \end{cases} \quad (F_{V_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R})$$

$$15a) \quad M_n = 2 \bar{X}_n$$

$$= \frac{2}{n} (X_1 + \dots + X_n)$$

$$= \frac{2}{n} X_1 + \frac{2}{n} (X_2 + \dots + X_n)$$

$$= \frac{2}{n} X_1 + \frac{n-1}{n} \frac{n}{n-1} \frac{2}{n} (X_2 + \dots + X_n)$$

$$= \frac{2}{n} X_1 + \frac{n-1}{n} \frac{2}{n-1} (X_2 + \dots + X_n)$$

$$\boxed{M_n = \frac{2}{n} X_1 + \frac{n-1}{n} M'_n}$$

Exercice 2

$$1) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y) e^{-(x^2 + y)}$$

$g: (x, y) \mapsto x^2 + y$ est C^2 en $\mathbb{R}^2$ car polynomiale
Par caract. C^2 de la fonction exponentielle, $h: (x, y) \mapsto e^{-(x^2 + y)}$ est C^2 en $\mathbb{R}^2$

En tant que produit de fonctions C^2 en $\mathbb{R}^2$, f est C^2 en $\mathbb{R}^2$

Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$d_1 f(x, y) = 2x e^{-(x^2 + y)} + (x^2 + y) (-2x) e^{-(x^2 + y)}$$

$$d_1 f(x, y) = 2x e^{-(x^2 + y)} (1 - x^2 - y)$$

$$d_2 f(x, y) = e^{-(x^2 + y)} + (x^2 + y) (-2y) e^{-(x^2 + y)}$$

$$d_2 f(x, y) = e^{-(x^2 + y)} (1 - 2x^2 y - y^2)$$

2) Soit $a = (x, y)$ un point critique de f .

$a = (x, y)$ est un point critique de f $\Leftrightarrow \nabla f(a) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x e^{-(x^2 + y)} (1 - x^2 - y) = 0 \\ e^{-(x^2 + y)} (1 - 2x^2 y - y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 1 - x^2 - y = 0 \\ 1 - 2x^2 y - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = 0 \text{ alors } 1 - y = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Si } x \neq 0 \text{ alors } \begin{cases} 1 - x^2 - y = 0 \\ 1 - 2x^2 y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Numéro d'inscription

5 0 1 0 7 9



Né(e) le

0 6 / 0 9 / 2 0 0 2

Signature

Sujet

Nom

S U R G E T

Prénom(s)

A R N O

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 6 / 0 7

Numéro de table

2 2 9

Commencez à composer dès la première page.

$$\begin{aligned} 3) \quad \partial^2_{1,1} f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= 2 \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= (2 - \sqrt{2}) e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2_{2,2} f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= -2 \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= -2 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 1) \right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= -2\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\partial^2_{1,2} f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \partial^2_{2,1} f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$$

La Hessienne de f en $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est : $H = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$; elle est diagonale

H est diagonale donc $\Sigma_p(H) = \left\{ (2-\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}}, -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \right\}$. Or,
 $-2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0$ et $(2-\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}} > 0$.

$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est un point selle ; f n'a ni extremum local en $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\begin{aligned} 4) \quad \partial^2_{1,1} f(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}) &= 2 \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= (2 + \sqrt{2}) e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{2,2}^2 f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= -2 \left(\frac{-2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) e^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -2(-\sqrt{2}) e^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$d_{1,2}^2 f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = d_{2,1}^2 f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

Ainsi, la Hessienne de f en $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est: $H = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$

H est diagonale, $\text{Sp}(H) = \{(2+\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}}, 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\} \subset \mathbb{R}_+^*.$

Ainsi, f admet un minimum local en $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\begin{aligned}
 5) \quad d_{1,1}^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) &= 2 \left(-2 \times \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{3}{4}} \\
 &= -2 e^{-\frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{2,2}^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) &= -2 \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) e^{-\frac{3}{4}} \\
 &= -2 \times \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{4}} \\
 &= -3 e^{-\frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{1,2}^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) &= d_{2,1}^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = -2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) e^{-\frac{3}{4}} \\
 &= -\sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

La Hessienne de f en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ est donc $H = e^{-\frac{3}{4}} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$

H est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

$$\lambda \in \Sigma_p(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0.$$

L'équation $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ a deux racines réelles distinctes.

A a donc deux valeurs propres distinctes. Ainsi, A est diagonalisable, d'où H est diagonalisable.

Déterminer les valeurs propres de A.

$$\Delta = 9$$

$$\lambda_1 = \frac{-5-3}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\lambda_2 = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\Sigma_p A = \{-4, -1\}$$

$$\text{Ainsi, } \Sigma_p H = \{-4e^{-\frac{3}{4}}, -e^{-\frac{3}{4}}\}, \text{ d'où } \Sigma_p(H) \subset \mathbb{R}^*$$

Le point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ correspond donc à un maximum local de f

$$\begin{aligned} 6a) \quad 0 \leq |f(x,y)| &= |x^2+y| e^{-(x^2+y^2)} \\ &\leq (|x|^2 + |y|) e^{-\max(|x|,|y|)^2} \end{aligned}$$

$$0 \leq |f(x,y)| \leq ((\max(|x|,|y|))^2 + \max(|x|,|y|)) e^{-\max(|x|,|y|)^2}$$

$$\text{et } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$6c) \text{ Soit } h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$$

h est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$O_1, K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \max(|x|, |y|) \leq n\}$$

$$= h^{-1}([-\infty, n])$$

Comme l'intervalle $]-\infty, n]$ est fermé, K est bien un fermé de $\mathbb{R}^2$

7) La flèche partant du point de coordonnées $(1, 0)$ sur la figure 1 n'est pas réduite à un point, d'où $\nabla f(1, 0) \neq 0$.

La fonction f ne semble pas admettre un extremum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ au point de coordonnées $(1, 0)$.

8) Soit $g: y \mapsto 1 + y - y^2$ définie sur $[-1, 1]$.

D'après le théorème général, g est dérivable sur $[-1, 1]$, et $\forall y \in [-1, 1]$,

$$g'(y) = -2y + 1$$

$$-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$g' \text{ est donc } \begin{cases} \text{positive sur } [-1, \frac{1}{2}] \\ \text{négative sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

D'où le tableau de variations de g :

y	-1	$\frac{1}{2}$	1
$g'(y)$		+	-
$g(y)$	-1	1,25	1

$$g(-1) = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$g(1) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1,5 - 0,25 = 1,25$$

Le minimum de g sur $[-1, 1]$ est -1 atteint en $y = -1$

Le maximum de g sur $[-1, 1]$ est $1,25$ atteint en $y = \frac{1}{2}$

Numéro d'inscription

5 0 1 0 7 9



Né(e) le

0 6 / 0 9 / 2 0 0 2

Signature

Suz

Nom

S U R G E T

Prénom (s)

A R N O

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 7

/ 0 7

Numéro de table

2 2 9

Commencez à composer dès la première page

6b) Les colonnes composés, $\lim_{u \rightarrow +\infty} (u^2 + u) e^{-u^2} = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

A large rectangular area with horizontal blue lines, intended for writing. The lines are evenly spaced and cover the entire width of the area. The area is bounded by a thin black line on the top, bottom, and sides.

