

PREPA 2021 - ECS - Scientifique

Mathématiques option scientifique

502550

PARENT

MAXIME

26/09/2001

Note de délibération : 17.1 / 20

Numéro d'inscription

5 0 2 5 5 0



Né(e) le

26 / 09 / 2001

Signature

Nom

P A R E N T

Prénom(s)

M A X I M E

17.1 / 20

Ecricome

Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 / 04

Numéro de table

14

Commencez à composer dès la première page

Exercice 1:

Partie 1:

$$1/ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -3A$$

Un polynôme annulateur de A est donc $X^3 + 3X$.La seule valeur propre possible de A est 0. (c'est la seule racine réelle du polynôme annulateur $X^3 + 3X$).

Vérifions que 0 est bien valeur propre de A:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

En notant C_i la i -ème colonne de A, on observe que $-C_1 - C_2 = C_3$. Donc $\text{rg}(A - 0I_3) = \text{rg}(A) \neq 3$. Autrement dit, $0 \in \text{Sp}(A)$. Et donc, $\boxed{\text{Sp}(A) = \{0\}}$.Cherchons $E_0(A)$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ x = x \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, donc $\dim E_0(A) \neq 3$, autrement dit, $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2/ J et S sont deux matrices symétriques à coefficients réels.
 Donc J et S sont diagonalisables.

$$SJ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; JS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien, $JS = SJ = 0_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

3/ $\mathcal{S}_p(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Déterminons les vecteurs propres de S :

• $E_0(S)$: Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Sx = 0$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} y = x \\ y = z \\ y = y \end{cases} \quad (\Rightarrow) x \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad E_0(S) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

• $E_{\sqrt{3}}(S)$: Soit $x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Sx - \sqrt{3}x = 0$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (1 - \sqrt{3})x - y = 0 \\ -x - \sqrt{3}y + z = 0 \\ y - (1 + \sqrt{3})z = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} (1 - \sqrt{3})x - y = 0 \\ -x - \sqrt{3}y + z = 0 \\ (1 - \sqrt{3})(x - z) = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

On admet cette question car les calculs risquent d'être trop longs. (Un moyen plus simple devrait nous donner le résultat je pense).

4/ S et J ont les mêmes vecteurs propres. Donc il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constituée de ces vecteurs propres telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient deux matrices diagonales, ces coefficients étant

égaux aux valeurs propres de S et de T respectivement.

Partie 2:

5/ Soit $(M, N, \alpha) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} l_1(\alpha M + N) &= \sum_{j=1}^n (\alpha m_{1,j} + n_{1,j}) \quad (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = N \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n m_{1,j} + \sum_{j=1}^n n_{1,j} \\ &= \alpha l_1(M) + l_1(N) \end{aligned}$$

Donc l_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6/ $0_{E_n} \in K_n$ car la somme de la matrice nulle est bien nulle.

Donc K_n est non vide.

• Soit $(M, N, \alpha) \in (K_n)^2 \times \mathbb{R}$. Montrons que $(\alpha M + N) \in K_n$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $l_i(\alpha M + N) = \alpha l_i(M) + l_i(N)$ par linéarité de l_i .

$$= \alpha \times 0 + 0 \quad \text{car } M \text{ et } N \text{ sont dans } K_n.$$

$$= 0$$

En procédant de la même façon pour $c_j(\alpha M + N)$, $d_1(\alpha M + N)$ et $d_2(\alpha M + N)$, on obtient : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$l_i(\alpha M + N) = c_j(\alpha M + N) = d_1(\alpha M + N) = d_2(\alpha M + N) = 0$$

Donc $(\alpha M + N) \in K_n$.

K_n est alors un sous-espace vectoriel de E_n .

7/ Soit $M \in E_n$. On a, ${}^t M = (m_{j,i})_{1 \leq j,i \leq n}$

$$\text{On a, } l_j({}^t M) = \sum_{i=1}^n m_{j,i} = c_j(M) \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

$$d_1({}^t M) = d_1(M) \quad \text{car } \text{diag}({}^t M) = \text{diag}(M).$$

$$d_2({}^t M) = d_2(M).$$

Donc comme $M \in E_n$, ${}^t M$ aussi. ${}^t M$ est bien un élément de E_n .

$$s({}^t M) = d_1({}^t M) = d_2(M) = s(M). \quad \text{Donc } s({}^t M) = s(M).$$

8/ Soit $\Pi \in \mathbb{E}_n$. Raisonnons par analyse-synthèse:

Analyse: $\Pi - \lambda J_n = (m_{ij} - \lambda)_{1 \leq i, j \leq n}$. Si $(\Pi - \lambda J_n) \in K_n$, on a:

$$\sigma(\Pi - \lambda J_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l_i(\Pi - \lambda J_n) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ g_j(\Pi - \lambda J_n) = 0 & \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ d_1(\Pi - \lambda J_n) = 0 \\ d_2(\Pi - \lambda J_n) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n m_{ij} - \lambda = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_{ij} - \lambda = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_{ii} - \lambda = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_{i, n-i+1} - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n m_{ij} = \lambda n \\ \sum_{i=1}^n m_{ij} = \lambda n \\ \sum_{i=1}^n m_{ii} = \lambda n \\ \sum_{i=1}^n m_{i, n-i+1} = \lambda n \end{cases}$$

En particulier, prenons $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n m_{ii}}{n}$ (toutes les sommes sont égales).

Synthèse: $\Pi - \frac{\sum_{i=1}^n m_{ii}}{n} J_n = \Pi - \frac{s(\Pi)}{n} J_n$.

$$\sigma(\Pi - \lambda J_n) = \sigma(\Pi) - \frac{s(\Pi)}{n} \sigma(J_n) \text{ car } \sigma \text{ linéaire}$$

$$= \sigma(\Pi) - \frac{s(\Pi)}{n} n \quad (J_n \in \mathbb{E}_n \text{ et } \alpha(J_n) = n).$$

$$= \sigma(\Pi) - s(\Pi) = 0. \quad \text{Donc } \Pi - \frac{s(\Pi)}{n} J_n \in K_n$$

L'unique réel λ tel que $\Pi - \lambda J_n \in K_n$ est $\boxed{\lambda = \frac{s(\Pi)}{n}}$.

9/ Soit $\Pi \in \mathbb{E}_n$. W_n vecteur propre de Π associé à la valeur propre

$$\Leftrightarrow \Pi W_n - \alpha W_n = 0$$

$$\& \text{, } \Pi W_n = \begin{pmatrix} l_1(\Pi) \\ \vdots \\ l_n(\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(\Pi) \\ \vdots \\ s(\Pi) \end{pmatrix}. \text{ Donc,}$$

$$\Pi W_n - \alpha W_n = 0 \Leftrightarrow s(\Pi) - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = s(\Pi).$$

$$\text{On a donc, } \Pi W_n = s(\Pi) W_n$$

Donc, $\boxed{W_n \text{ est vecteur propre de } \Pi \text{ associé à la valeur propre } s(\Pi).}$

Partie 3:

$$10/ \cdot l_1(A) = l_2(A) = l_3(A) = 0 ; a_1(A) = a_2(A) = a_3(A) = 0 ;$$

$$d_1(A) = 0 = d_2(A). \quad \boxed{\text{Donc } A \text{ est magique et } s(A) = 0}$$

$$\cdot l_2(J) = l_2(J) = l_3(J) = 3 ; a_1(J) = a_2(J) = a_3(J) = 3 ;$$

$$d_1(J) = 3 = d_2(J) \quad \text{Donc } \boxed{J \text{ est magique et } s(J) = 3.}$$

$$\cdot l_1(S) = l_2(S) = l_3(S) = 0 ; a_1(S) = a_2(S) = a_3(S) = 0 ;$$

Numéro d'inscription

5 0 2 5 5 0



Né(e) le

26 / 09 / 2001

Signature

Nom

P A R E N T

Prénom(s)

M A X I M E

17.1 / 20

Ecricome

Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 04

Numéro de table

14

Comptez à composer des la première page.

 $d_1(S) = 0 = d_2(S)$. Donc S est magique et $s(S) = 0$.

11/ Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{pmatrix}$. On peut la décomposer comme ceci :

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{\lambda_1 + \lambda_4}{2} & \frac{\lambda_3 + \lambda_7}{2} \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_4}{2} & \lambda_5 & \frac{\lambda_6 + \lambda_9}{2} \\ \frac{\lambda_3 + \lambda_7}{2} & \frac{\lambda_6 + \lambda_9}{2} & \lambda_9 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_2 - \lambda_5}{2} & \frac{\lambda_3 - \lambda_6}{2} \\ \frac{\lambda_4 - \lambda_7}{2} & 0 & \frac{\lambda_6 - \lambda_9}{2} \\ \frac{\lambda_7 - \lambda_9}{2} & \frac{\lambda_8 - \lambda_9}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}} = \frac{1}{2}(M + {}^t M) + \frac{1}{2}(M - {}^t M)$$

À vrai dire, la place des coefficients diagonaux n'assure pas réellement l'unicité de ces deux matrices, mais si l'on veut les exprimer en fonction de M , nous n'avons pas ^{grand} le choix.

Donc on a $M = M_1 + M_2$, avec $M_1 = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$
 M_1 antisymétrique et M_2 symétrique.

q.t. : $s(M) = s({}^t M)$.

$$12/a) \cdot \forall i \in [1, n], \quad l_i(M_1) = \frac{1}{2}(l_i(M) - l_i({}^t M)) = 0$$

$$\forall j \in [1, n], \quad g_j(M_1) = \frac{1}{2}(g_j(M) - g_j({}^t M)) = 0$$

$$d_i(M_1) = \frac{1}{2}(d_i(M) - d_i({}^t M)) = 0 = \frac{1}{2}(d_i(M) - d_i(M)) = 0$$

Donc $M_1 \in K_3$.

Malheureusement, je n'ai pas $M_2 \in K_3$.

b) On admet cette question.

13/ En supposant que π_1 et π_2 appartiennent à K_3 , et qu'il existe deux réels tels que $\pi_1 = \alpha A$ et $\pi_2 = \beta S$. - - -

On passe à l'exercice suivant.

Exercice 2:

1/ $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Par continuité de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition. De plus, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Par produit de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$:

f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

• $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire (car f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = \boxed{2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)} \\ \partial_2 f(x, y) &= -2ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = \boxed{-2ye^{-(x^2+y^2)}(1+x^2+y^2)} \end{aligned}$$

$$2/ (x, y) \text{ est point critique de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) = 0 \\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2-2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-x^2-y^2) = 0 \\ 1-2y(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1-x^2-y^2 = 0 \\ 1-2y(x^2+y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 2y(x^2+y^2) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1-x^2 \\ (2-2x^2)(1+x^2-x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc, les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ sont :

$$(0; \frac{1}{\sqrt{2}}); (0; -\frac{1}{\sqrt{2}}); (\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}); (\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$3/ \nabla^2 f(0; \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 2(1-\frac{1}{\sqrt{2}})e^{-1/2} & -2 \times 0(1+\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ -2 \times 0(1+\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) & -2(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}))e^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})e^{-1/2} & 0 \\ 0 & \partial_{2,2}^2 f(0; \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}$$

La hessienne de f en $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ est bien diagonale.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ sont donc ces coefficients, c'est-à-dire $\partial_{1,1}^2 f(0; \frac{1}{\sqrt{2}}) = (2-\sqrt{2})e^{-1/2}$ et $\partial_{2,2}^2 f(0; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}))e^{-1/2} = (-2\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})e^{-1/2} = (-1-\sqrt{2})e^{-1/2}$

$(2-\sqrt{2})e^{-1/2} \in \mathbb{R}_+^*$ et $(-1-\sqrt{2})e^{-1/2} \in \mathbb{R}_-^*$. Donc,

f admet un point selle en $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4/ De même, $\partial_{1,2}^2 f(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$. Donc les valeurs propres de $\nabla^2 f(0; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sont: $\partial_{1,1}^2 f(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2}(2(1+\frac{1}{\sqrt{2}})) \in \mathbb{R}_+^*$ et $\partial_{2,2}^2 f(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2}(-2-\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})(-\frac{1}{\sqrt{2}})) = e^{-1/2}(-2(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})) \in \mathbb{R}_-^*$.
Donc f admet un point selle en $(0; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$5/ \partial_{1,1}^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = 2((1 - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}))(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) - 1)e^{-(1/2+1/4)} = -2e^{-3/4}$$

$$\partial_{2,2}^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = -2(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(1 - 1(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2})))e^{-3/4} = (-1-2)e^{-3/4} = -3e^{-3/4}$$

$$\partial_{1,2}^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = -\sqrt{2}(1 + (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}))e^{-3/4} = -\sqrt{2}e^{-3/4}$$

On a bien: $\nabla^2 f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = H = e^{-3/4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$

$$\lambda \in \text{Sp}(H) \Leftrightarrow H - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow (-2e^{-3/4} - \lambda)(-3e^{-3/4} - \lambda) - (e^{-3/4})^2 \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 5e^{-3/4}\lambda + 4e^{-3/2} = 0 \quad \Delta = 25e^{-3/2} - 4 \times 4e^{-3/2} = 9e^{-3/2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-5e^{-3/4} + 3\sqrt{e^{-3/2}}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-5e^{-3/4} - 3\sqrt{e^{-3/2}}}{2}$$

Donc H possède deux valeurs propres distinctes, donc

H est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

Il est clair que $\frac{-5e^{-3/4} - 3\sqrt{e^{-3/4}}}{2} < 0$
 et $\sqrt{e^{-3/2}} = e^{-3/4} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

On a $e^{-3/4} = \frac{1}{e^{3/4}} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{3}{e^{3/4}} \leq \frac{3}{e}$ Il n'arrive pas à le montrer, mais j'admet que $\frac{-5e^{-3/4} + 3\sqrt{e^{-3/4}}}{2} < 0$, et que donc les deux valeurs propres de H sont strictement négatives.

On peut en déduire, que le point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ est un maximum local de f.

6/ b) $\lim_{u \rightarrow +\infty} (u^2 + u)e^{-u^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u^2} + u e^{-u^2} = 0 + 0$ par croissance comparée.
 On a : $\lim_{u \rightarrow +\infty} (u^2 + u)e^{-u^2} = 0$.

7/ En s'appuyant sur la figure 1, la fonction f semble admettre un maximum au point (1, 0).

8/ g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. (donc sur $[-1; 1]$).

$\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = 1 - 2y.$ $g'(y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2y \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq y$

On a :

y	-1	$\frac{1}{2}$	1
g'	+	0	-
g	-1	$\xrightarrow{5/4}$	1

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$g(-1) = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$g(1) = 1 + 1 - 1 = 1$$

Donc, sur $[-1; 1]$, g admet comme minimum -1 et comme maximum $\frac{5}{4}$.

Numéro d'inscription

5 0 2 5 5 0



Né(e) le

26 / 09 / 2001

Signature

Nom

P A R E N T

Prénom (s)

M A X I M E

17.1 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques option scientifique

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03

/ 04

Numéro de table

14

Commencez à composer dès la première page

Problème :Partie 1 :1/a) fonction $V = \text{sim_V}(n, a)$ $V = \max(\text{grand}(1, n, 'unf', 0, a))$

endfunction.

b) On peut conjecturer que l'estimateur V_n , estime a avec une précision avoisinant les 5%. Évidemment, plus n est grand, mieux on estime a .

2/a) Appelons la fonction de répartition de X_i , F_{X_i} .

On a :

$$F_{X_i} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{a} & \text{si } x \in [0; a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

b) Si $x < 0$, $F_{V_n}(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{V_n}(x) = P(V_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$

 $= P(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x])$. Par mutuelle indépendance des X_i on a :

$$F_{V_n}(x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x) = (F_{X_1}(x))^n$$

Donc on a :

$$F_{V_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (\frac{x}{a})^n & \text{si } x \in [0; a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

c) F_{V_n} est continue sur $]-\infty; 0[$, $[0; a]$ et $]a; +\infty[$.

et, $\lim_{x \rightarrow 0} F_n(x) = 0 = F_n(0)$, et, $\lim_{x \rightarrow a^+} F_n(x) = 1 = F_n(a)$

Donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus F_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 ou en a .

Et, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1$. Donc,

V_n est une variable aléatoire à densité

En dérivant F_n là où elle est $\mathcal{C}^1$, on obtient une densité de

V_n :

$$f_n: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0; a] \\ \frac{n}{a^n} x^{n-1} & \text{si } x \in [0; a] \end{cases}$$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \cdot x^{n-1} = x^n = o_{+\infty}(e^{-x})$ car $e^x x^n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

Et comme, selon le cours, $\int$

V_n admet une espérance car $V_n \in [0; a]$.

$$E(V_n) = \int_0^a \frac{n}{a^n} x^n dx = \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \frac{n a^{n+1}}{a^n} \times \frac{1}{n+1} = 0$$

$$E(V_n) = \frac{an}{n+1}$$

l'estimateur V_n n'est pas sans biais,

car $E(V_n) \neq a$ ($\frac{n+1}{n} V_n$ est par exemple un estimateur sans biais de a).

4/ Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, V_n à densité

$$P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = 1 - P(|V_n - a| < \varepsilon) = 1 - P(|V_n - a| \leq \varepsilon)$$

$$= 1 - P(-\varepsilon \leq V_n - a \leq \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon + a \leq V_n \leq \varepsilon + a)$$

$$= 1 - F_n(\varepsilon + a) + F_n(a - \varepsilon)$$

5/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(n(a - V_n) \leq t) &= P(a - V_n \leq \frac{t}{n}) = P(-V_n \leq \frac{t}{n} - a) = P(V_n \geq a - \frac{t}{n}) \\ &= 1 - P(V_n \leq a - \frac{t}{n}) \\ &= 1 - P(V_n \leq a - \frac{t}{n}) \quad \downarrow V_n \text{ à densité} \\ &= 1 - F_n(a - \frac{t}{n}). \end{aligned}$$

~~Donc~~ $P(n(a - V_n) \leq t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - F_n(a - \frac{t}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, 1 - F_n(a - \frac{t}{n}) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } a - \frac{t}{n} < 0 \\ 1 - (\frac{a - \frac{t}{n}}{a})^n & \text{si } 0 \leq a - \frac{t}{n} \leq a \\ 1 - 1 & \text{si } a - \frac{t}{n} > a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (1 - \frac{t}{an})^n & \text{si } 0 \leq t \leq an \\ 1 & \text{si } t > an \end{cases}$$

← ce cas nous intéresse peu : pour n assez grand, $t > an$ ne sera plus vérifié.

Cherchons $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (1 - \frac{t}{an})^n$. On a, $\forall t \in [0; an]$,

$$(1 - \frac{t}{an})^n = \exp(n \ln(1 - \frac{t}{an})). \text{ On sait que, comme } \frac{t}{an} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\ln(1 - \frac{t}{an}) \sim -\frac{t}{an} \text{ i.e. } n \ln(1 - \frac{t}{an}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{t}{a}.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - \frac{t}{an}) = -\frac{t}{a}$. Par composition de $x \mapsto 1 - e^{-x} \in \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (1 - \frac{t}{an})^n = 1 - e^{-t/a}.$$

Donc finalement on a : $P(n(a - V_n) \leq t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t/a} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Donc, $\boxed{(n(a - V_n))_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ où } X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{a})}$.

7/a) $0 \leq V_n \leq a \Rightarrow 0 \leq V_n^2 \leq a^2$. Donc V_n^2 admet une espérance. Autrement dit,

V_n admet un moment d'ordre 2. Par le théorème de transfert,

$$E(V_n^2) = \int_0^a \frac{n}{a^n} x^{n+1} dx = \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^a = \boxed{\frac{n a^2}{n+2}}$$

b) $r(V_n) = (t(V_n))^2 + V(V_n)$

$$= (E(V_n) - a)^2 + E(V_n^2) - E(V_n)^2$$

$$= -2a E(V_n) + a^2 + E(V_n^2) = -2a \frac{an}{n+1} + a^2 + \frac{na^2}{n+2}$$

Formule de Koenig-Huygens.

$$= \frac{-2a^2(n+2)n + a^2(n+1)(n+2) + na^2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2a^2n^2 - 4a^2n + a^2n^2 + 3a^2n + 2a^2 + n^2a^2 + na^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \boxed{\frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}}$$

Partie 2:

8/ fonction $y = \text{sim} - \text{M}(n, a)$

$s = 0$

for $k = 1:n$

$s = a \cdot \text{rand}() + s$

end

$y = 2s/n$

endfunction.

9/ $\bar{X}_n$ admet une espérance, car $0 \leq \bar{X}_n \leq \frac{an}{n} = a$,
et une variance car $0 \leq \bar{X}_n^2 \leq a^2$.

On a: $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$ par linéarité de l'espérance.

$$= \frac{1}{n} n \frac{a}{2} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

et, $V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{\text{mutuelle indépendance des } X_i}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)$

$$= \boxed{\frac{1}{n} \frac{(a-1)^2}{12}}$$

$E(\Pi_n) = 2E(\bar{X}_n) = 2 \frac{a}{2} = a$. Donc Π_n est un estimateur sans biais de a .

10/ On a donc, $r(\Pi_n) = V(\Pi_n)$

$$= 4V(\bar{X}_n) = \boxed{\frac{(a-1)^2}{3n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r(\Pi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)^2}{3n} = 0.$$

Donc, Π_n est un estimateur convergent.

11/ Procédons de la même manière qu'à la question 5:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}$,

Numéro d'inscription

502550



Né(e) le

26 / 09 / 2001

Signature

Nom

PARENT

Prénom (s)

MAXIME

17.1 / 20

Ecricome

Épreuve : Mathématiques option scientifique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 / 04

Numéro de table

14

$$P(V_n | \theta_n - a) \leq t = P(\theta_n \leq \frac{t}{V_n} + a) = F_{\theta_n}(\frac{t}{V_n} + a).$$

Ici, il faudrait connaître F_{θ_n} , ce que nous n'avons pas.

$$13/ \text{ En } a, r(V_n) = \frac{a^2}{(n+1)(n+2)} \text{ et } r(\theta_n) = \frac{(a-1)^2}{3n}$$

En a donc, $r(V_n) \leq r(\theta_n)$

Sur cette figure 3 on observe bien que plus n est grand, plus l'estimation de V_n sera précise. Tandis que l'estimation de θ_n , à partir d'un certain rang, sera similaire, aussi grand que soit n . On pourra donc préférer V_n pour un n assez grand, car c'est un estimateur qui ne peut être que plus précis.

Partie 3:

14/a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]a; 2a]$,

$$\begin{aligned} P(V_n \leq t) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) \quad \text{nécessairement, } \forall i \in \{1; n\}, X_i \leq t \\ &= P(X_1 \leq t) = F_{X_1}(t) \\ &= \frac{t}{2a} \quad \text{car } F_{X_1}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2a} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases} \end{aligned}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

mutuelle indépendance des X_i

$$F_n(t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) = P(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t]) \stackrel{\text{mutuelle indépendance des } X_i}{=} \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t) = F_{X_1}(t) (F_{X_2}(t))^{n-1}$$

$$\begin{aligned} &0 \text{ si } x < 0 \\ &\frac{x}{2a} \text{ si } 0 \leq x \leq 2a \\ &1 \text{ si } x > 2a \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.1 / 20

$$\bar{F}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^{n+1} & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \frac{t}{2a} & \text{si } a < t < 2a \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^{n+1} = +\infty \quad \forall t \in [0; a]$, donc la suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas en loi (la question suivante nous indique le contraire, j'ai dû faire une erreur).

$$\begin{aligned} c) \quad \mathbb{P}(V_n > \frac{3}{2}a) &= 1 - \mathbb{P}(V_n \leq \frac{3}{2}a) \\ &= 1 - F_n(\frac{3}{2}a) \\ &= 1 - \frac{3a}{2 \cdot 2a} \quad \left. \begin{array}{l} a < \frac{3}{2}a < 2a \end{array} \right\} \\ &= 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

15/a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_n = 2\bar{X}_n &= \frac{2}{n} X_1 + \frac{2}{n} (X_2 + \dots + X_n) \\ &= \frac{2}{n} X_1 + \frac{2}{n} \cdot \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{n} X_1 + \bar{\eta}'_n - 2\bar{\eta}_n \\ \Rightarrow \quad \bar{\eta}_n &= -\frac{2}{n} - \bar{\eta}'_n \end{aligned}$$

FIN.



