

Bonjour,

Le problème c'est que cela ne fonctionne que si les nombres ont été choisis pour cela,

Pour comprendre étudions le cas général : Soit c et d des nombres strictement positifs on cherche A et B strictement positifs tels que :

$$c - \sqrt{d} = (a - b)^2 = (a^2 + b^2 - 2ab)$$

On cela si a et b sont solutions de :

$$\begin{cases} c = a^2 + b^2 \\ \sqrt{d} = 2ab \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que le système est symétrique par rapport aux inconnues a et b,}$$

donc si on trouve les solutions de a celles de b seront les mêmes,

Reste à résoudre par substitution

$$\begin{cases} c = a^2 + b^2 \\ b = \frac{\sqrt{d}}{2a} \end{cases} \quad \text{ou encore en remplaçant b dans la première équation : } c = a^2 + \frac{d}{4a^2}$$

On en tire une équation bicarrée en a : $4a^4 - 4ca^2 + d = 0$ qui se ramène à une équation de degré 2 en posant $X = a^2$

$$4X^2 - 4cX + d = 0 \text{ dont le discriminant est } \Delta = 16c^2 - 16d = 16(c^2 - d),$$

Donc le problème a une solution si $c^2 - d$ est positif et cette solution ne sera pas trop affreuse seulement si $c^2 - d$ est un carré (d'un entier par exemple)

Ex 1: Pour $c=2$ et $d=3$ on a $c^2 - d = 1$, on trouve alors $X = 3/2$ ou $X = 1/2$

$$\text{donc } a = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } a = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } b = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{d'où } 2 - \sqrt{3} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Ex 2 : $c=3$ et $d=5$, $c^2 - d = 4$ (carré)

On trouve

$$3 - \sqrt{5} = \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Ex 3 : Prenons $d=11$, comment choisir c pour avoir une solution, en fait d doit être la différence de deux carrés, on trouve assez vite $36 - 25 = 11$

Donc $c=6$ et $d=11$, $c^2 - d = 25$ (carré)

On trouve

$$6 - \sqrt{11} = \left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

Remarque : Vous avez pris $c=3$ et $d=6$, alors $c^2 - d = 3$ ce n'est pas un carré, les solutions existent mais sont bien moins simples,

$$3-\sqrt{6}=\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}\right)^2,$$