Calcul infinitésimal et invitation à l'analyse

Fonctions Exponentielle et Logarithme

T.D-V
Mohamed ATOUANI

John Neper et Henry Briggs

Lisez à Euler, lisez à Euler, c'est notre maître à tous.
(Pierre-Simon de Laplace)

... our students of mathematics would profit much more from a study of Euler's "Introductio in Analysin Infinitorum", rather than of the available modern textbooks.
(André Weil)

Table des matières

1 Premières motivations et premières propriétés

1.1 Introduction historique

Le mot "logarithme" apparaît au 17ème siècle. L'un des éléments principaux dans les mathématiques de cette époque, mais également en ce qui concerne l'astronomie et d'autres sciences, est l'omniprésence des calculs. Les savants de l'époque calculaient, calculaient, et calculaient encore. Pour cette raison, des tentatives de simplification de ces calculs furent entamées, notamment lors de l'utilisation de très grands nombres, et les logarithmes furent le fruit le plus riche de ces recherches, dont l'usage a vu s'étendre bien au-delà de simples applications calculatoires. Cette notion naît en 1614 dans la publication *Mirifici logarithmorum canonis descriptio (La Description de la règle merveilleuse des logarithmes)* de l'écossais John Neper (ou Napier). Le mot vient du grec *logos*, qui signifie le rapport ou la relation, et de *arithmeticos* qui désigne le nombre. Détaillons plus précisément ce que cela veut dire.

L'une des vertus des logarithmes était notamment de simplifier les multiplications. Par exemple, comment faire pour multiplier les nombres 7230749164 et 38627939921 ? Calculatrice interdite ! L'une des propriétés remarquables des logarithmes est de **transformer une multiplication en une addition**. Au lieu d'avoir à multiplier ces deux nombres, on pourra faire une addition, entre deux autres nombres, et déduire du résultat de l'addition le résultat final de la multiplication. Comment imaginer un tel processus ? L'astuce découverte par Napier consiste à travailler avec les puissances d'un nombre x fixé comme nous allons le voir dans ce qui suit.
Par exemple : $100 \times 1000 = 10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5 = 100000$. On voit que le résultat de cette multiplication est liée au fait que la somme de 2 et 3 soit égale à 5. De même, lorsque nous écrivons :

$$10000 \times 100000 = 10^4 \times 10^5 = 10^9 = 1000000000$$

Le résultat de la multiplication est lié à celui de l'addition : $4 + 5 = 9$. Autrement dit, multiplier 10 par lui même 4 fois et ensuite multiplier ce même 10 par lui même 5 fois, revient à multiplier 10 par lui même $4 + 5 = 9$ fois. Prenons un autre exemple :

$$64 \times 256 = 2^6 \times 2^8 = 2^{14} = 16384.$$

On peut là encore associer le résultat de cette multiplication à celui de l'addition $6+8 = 14$. Plus généralement, si x désigne un nombre réel et a et b sont deux entiers naturels alors on voit aisément la validité de la formule

$$\boxed{x^a x^b = x^{a+b}}$$

Cette propriété d'apparence anodine, est d'importance capitale pour nous. En effet, l'opération à gauche de l'égalité est une multiplication tandis que celle de droite est une addition. Nul n'ignore que les multiplications sont bien plus compliquées que les additions. Transformer alors une multiplication en une addition serait alors un exploit mathématique remarquable.

Imaginons alors vouloir faire la multiplication de 5.35 par 5.63 au centième près. On obtient à la main le nombre 30.12. Essayons de le faire alors avec l'idée de notre bon vieux Neper. Il s'agit de fixer un nombre x et de trouver des entiers naturels a et b tels que $5.35 = x^a$ et $5.63 = x^b$. En prenant $x = 1.001$ et après "*quelques calculs*", on obtient

$$5.35 = (1.001)^{1678} \quad \text{et} \quad 5.63 = (1.001)^{1729}.$$

Ainsi notre super-multiplication devient

$$\begin{aligned} 5.35 \times 5.63 &= (1.001)^{1678} \times (1.001)^{1729} \\ &= (1.001)^{(1678+1729)} \\ &= (1.001)^{3407} \\ &= 30.12. \end{aligned}$$

Ainsi le tour est joué. Nous tenons à vous mettre en garde que nos égalités ici sont seulement vraies au centième près. Notre super-multiplication revient essentiellement à calculer la somme $1678+1729$ mais ... attendez ! ! ! Comment a-t-on pu trouver 1678 et 1729 *in the first place* ? Si l'on doit calculer toutes les puissances de 1.001 pour avoir le bon entier à utiliser alors la tâche semble insurmontable et notre procédé tombe dans ce cas à l'eau. Selon Neper il n'en est rien. En effet, il suffit qu'un seul homme se dédie à la tâche de calculer les 100 000 (par exemple) premières puissances de 1.001, tâche certes ardue, mais qu'il suffit de faire qu'une seule fois pour que toute l'humanité en profite. Notre brave Neper s'est lui même dédié à établir les premières tables logarithmiques. Ainsi, afin d'effectuer n'importe quelle multiplication, il suffit de localiser les entiers a et b et leur somme $a+b$ sur notre table logarithmique. Notons que le nombre $x = 1.001$ fixé au départ est appelé la base du logarithme. Dans le cadre de notre exemple, on dit que 1678 est le logarithme dans la base $x = 1.001$ du nombre 5.35, autrement dit la puissance à laquelle on doit éléver le nombre x afin d'obtenir 5.35.

Si l'on s'amuse maintenant à appliquer ce même procédé à d'autres multiplications en cherchant davantage de précision, on se heurte très vite à des complications. D'abord, la base choisie pour notre exemple ne permet pas d'avoir de bonnes approximations et ces dernières nécessitent des bases bien plus proches de 1 comme le nombre $x = 1.0000000001$. Par ailleurs, la deuxième difficulté apparente est que les puissances entières ne sont pas suffisantes pour couvrir tous les nombres. Nous avons ainsi besoin de généraliser les puissances à des nombres rationnels et même à des nombres réels. Avant que l'on se lance dans cette aventure mathématique, que nous trouvons à titre personnel très amusante et très instructive, tâchons de prendre encore quelques exemples et de faire des remarques utiles pour la suite de cet article.

Influencé par les idées de Neper, le mathématicien anglais Henry Briggs a su les améliorer à bien des égards. Ainsi, le logarithme à base 10 fait son apparition entre les mains de ce dernier. En effet, afin de simplifier les calculs, Briggs a voulu coûte que coûte trouver une manière simple permettant de calculer le logarithme d'un nombre comme 34.5678 à partir du logarithme de 3.45678. Plus généralement, on cherche un moyen facile pour calculer le logarithme de $10x$ en fonction de celui de x. La propriété fondamentale du logarithme nous dit que

$$\log(10x) = \log 10 + \log x.$$

Le tout serait alors de trouver une bonne valeur de $\log 10$ dans une base convenablement choisie. Si on part du nombre $b = 1.0000000001$ comme base de notre logarithme, on trouve "*après calcul*" que

$$\log 10 \simeq 23025850931.$$

Briggs a pensé qu'additionner cette valeur systématiquement dans nos calculs du logarithme n'était pas tout à fait naturel. Pour contourner cette difficulté, il fallait une base dans laquelle

$\log 10 = 1$ et la relation *loc.cit* devient alors

$$\boxed{\log(10x) = 1 + \log x}$$

Ainsi, calculer le logarithme de $10x$ revient à incrémenter de 1 celui de x. Rien de plus trivial ! Mais comment procéder du coup ? Les idées les plus simples sont les plus géniales, Briggs ne manquant pas de génie, propose de diviser tous les logarithmes dans la base $b = 1.0000000001$ par le nombre $\log 10 \simeq 23025850931$. En notant $\log_{10}(x)$ les nombres $\frac{\log(x)}{\log 10}$, la relation logarithmique

$$\log_{10}(xy) = \log_{10}(x) + \log_{10}(y)$$

reste valable et comme promis on obtient bien la relation

$$\log_{10}(10x) = 1 + \log_{10}(x).$$

Sauf mention du contraire, on notera dans la suite de cet article log au lieu de $\log_{10}$ pour désigner le logarithme en base 10.

Le logarithme à base 10 apparaît dans beaucoup d'applications scientifiques comme dans le **décibel**, qui est une unité utilisée dans la mesure du niveau sonore. En effet, si I désigne l'intensité du son mesurée en watt par mètre carré alors le niveau décibel du son est donné par la formule

$$\boxed{\textbf{Niveau sonore} = 10\log(I \times 10^{12})\ \text{db}}$$

Cette équation explique pourquoi tourner le volume de votre amplificateur audio du double ne fait augmenter le son que de quelques décibels. En effet, si on double l'intensité du son on obtient

$$\begin{aligned}\textbf{Niveau sonore}(2I) &= 10\log(2I \times 10^{12}) \\ &= 10\log(2) + 10\log(I \times 10^{12}) \\ &\simeq 3 + \textbf{Niveau sonore}(I).\end{aligned}$$

Ainsi, doubler l'intensité du son revient à augmenter le niveau sonore d'environ 3 décibels. Nous verrons plus loin d'autres applications scientifiques du logarithme de Briggs.

1.2 Puissances rationnelles

Pour construire notre brave fonction nous commençons par poser $\log(10) = 1$. Ensuite, le logarithme de 100 sera égal à 2, celui de 1000 sera égal à 3 etc... Nous obtenons ainsi la première définition suivante

Définition. Si un nombre N est une puissance de 10, le logarithme du nombre N sera égal au nombre n tel que $N = 10^n$. On le notera $n = \log N$.

Cette première définition satisfait la propriété demandée : si $a = 10^n$ et $b = 10^m$, on aura :

$$\log(a \times b) = \log 10^n 10^m = \log 10^{n+m} = n + m = \log a + \log b$$

Cependant, vous en conviendrez, cette définition se restreint aux puissances de 10. Comment pourrait-on espérer que l'on puisse simplifier la multiplication de 7230749164 et 38627939921 ? En effet, on voit déjà qu'on devra parfois attribuer à certains nombres des valeurs décimales et non entières. Par exemple, on peut imaginer qu'un entier n peut avoir un logarithme de $\log n = 1.5$. Nous attendrons alors : $10^{1.5} = n$. Mais comment donner du sens à cette égalité faisant intervenir une puissance non entière ?

Pour cela, nous devrions peut être étendre la notion de puissance : nous allons définir ce que veut dire $10^{p/q}$ pour p et q entiers. Pour cela nous traitons le cas général de $x^{p/q}$, où x désigne un nombre réel strictement positif. Comment faire ?

Une méthode fréquente pour établir ou étendre des définitions est la conservation de bonnes propriétés de base. En l'occurence, on veut que pour tous rationnels a et b, on ait toujours :

$$\boxed{x^a \times x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^a y^a = (xy)^a} \tag{1}$$

Prenons un exemple. Les exemples parlent mieux : On voudrait donner un sens à $x^{1/2}$. On a $0 < 1/2 < 1$, donc on voudrait, idéalement, que $x^{1/2}$ soit entre $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.
En multipliant ce nombre par lui même, on obtient : $x^{1/2} \times x^{1/2} = (x^{1/2})^2 = x^1 = x$. Autrement dit, $x^{1/2}$ est un nombre qui, multiplié par lui même, donne x. Dites moi, y en a-t-il beaucoup, des nombres comme ça ? Non, il y en a exactement deux : $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$. Par ce que nous avons dit précédemment, nous n'avons pas le choix ! Il faut définir $x^{1/2}$ comme étant égal à $\sqrt{x}$.

De même, pour un entier $q \geq 1$, on demandera à $x^{1/q}$ de satisfaire : $(x^{1/q})^q = x^1 = x$. Ainsi, on définira $x^{1/q}$ comme étant la racine q-ième positive de x [1]. On voit, en prolongeant nos idées, que nos propriétés **obligent** la définition suivante :

Définition. Pour p et q entiers, q positif, on définit le nombre $x^{p/q}$ comme étant égal à

$$(\sqrt[q]{x})^p = (x^{1/q})^p.$$

Par exemple, on a :

$10^{1.527} = 10^{1527/1000} = (\sqrt[1000]{10})^{1527} = 33.65115693754907...$ à condition de savoir calculer $\sqrt[1000]{10}$.

On peut calculer plus facilement $\sqrt[3]{10}$ et $\sqrt{10}$ pour donner :

$$10^{1.5} = 10 \times 10^{0.5} = 10\sqrt{10} = 31.6228...$$
$$10^{2.666...} = 100 \times 10^{2/3} = 100 \times (\sqrt[3]{10})^2 = 464.1588...$$

La définition qu'on vient de donner aux puissances rationnelles, intuitivement évidente, nécessite toutefois quelques justifications. Tout d'abord, il faut montrer que la puissance p/q-ème d'un nombre strictement positif x ne dépend pas de p et de q mais uniquement du rapport p/q. Autrement dit,

$$p/q = r/s \Longrightarrow x^{p/q} = x^{r/s}.$$

1. Ce nombre existe bien comme nous le verrons dans un appendice plus loin

Pour se faire, on élève les deux membres de l'égalité de droite à la puissance qs pour obtenir d'un côté

$$\begin{aligned}(x^{p/q})^{qs} &= ((x^{1/q})^p)^{qs} && \text{par définition de } x^{p/q}\\ &= (x^{1/q})^{pqs} && \text{car puissance entière}\\ &= ((x^{1/q})^q)^{ps}\\ &= x^{ps}.\end{aligned}$$

De l'autre côté on obtient

$$\begin{aligned}(x^{r/s})^{qs} &= ((x^{1/s})^r)^{qs}\\ &= ((x^{1/s})^{rqs}\\ &= ((x^{1/s})^s)^{qr}\\ &= x^{qr}\end{aligned}$$

Nous prétendons que c'est quasiment fini : l'égalité $p/q = r/s$ est équivalente à l'égalité $ps = qr$. Il s'en suit que

$$x^{ps} = x^{qr},$$

ou encore que

$$(x^{p/q})^{qs} = (x^{r/s})^{qs}.$$

Par la stricte croissance de la fonction $y \longmapsto y^{qs}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit que $x^{p/q} = x^{r/s}$. Jackpot !

Nous devons maintenant justifier les régles (1) de calcul sur les puissances rationnelles. En effet, si a et b sont deux nombres rationnels alors on peut écrire $a = p/q$ et $b = r/q$, ainsi

1.

$$\begin{aligned}x^a x^b &= x^{p/q} x^{r/q}\\ &= (x^{1/q})^p (x^{1/q})^r && \text{par définition de } x^{p/q}\\ &= (x^{1/q})^{p+r} && \text{car puissance entière}\\ &= x^{(p+r)/q}\\ &= x^{p/q+r/q}\\ &= x^{a+b}\end{aligned}$$

2. D'un côté

$$\begin{aligned}((x^a)^b)^{q^2} &= ((x^{p/q})^{r/q})^{q^2}\\ &= (x^{p/q})^{rq}\\ &= x^{pr}.\end{aligned}$$

De l'autre

$$\begin{aligned}(x^{ab})^{q^2} &= (x^{pr/q^2})^{q^2}\\ &= ((x^{1/q^2})^{pr})^{q^2}\\ &= (x^{1/q^2})^{prq^2}\\ &= ((x^{1/q^2})^{q^2})^{pr}\\ &= x^{pr}.\end{aligned}$$

Le résultat en découle par stricte croissance de la fonction $y \longmapsto y^{q^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On laisse au lecteur le soin de démontrer par un calcul similaire la propriété $x^a y^a = (xy)^a$.

1.3 Puissances réelles

Maintenant que nous avons défini correctement les puissances rationnelles, obtient-on tous les nombres réels de cette façon ? En effet, nous avons vu que les puissances entières de 10 ne suffisent pas pour parcourir tous les nombres. Pour cela, nous avons étendu les puissances entières aux puissances rationnelles, mais ces dernières restent insuffisantes. Par exemple, il n'existe aucune fraction p/q telle que

$$10^{p/q} = 2.$$

Cette égalité est équivalente à $p/q = \log(2)$, autrement dit le nombre $\log(2)$ est rationnel, ce qui n'est pas. En effet, $10^{p/q} = 2$ est équivalente à $10^p = 2^q$. Or cette dernière égalité contredit le théorème fondamental de l'arithmétique.
Que signifie alors $10^{\sqrt{2}}$? Ou encore 10^{π} ? L'idée ici serait de définir les puissances réelles en utilisant les approximations rationnelles. En d'autres termes, $10^{\sqrt{2}}$ serait la limite de la suite

$$10^1, \quad 10^{1.4}, \quad 10^{1.41}, \quad 10^{1.414}, \quad 10^{1.4142} \dots$$

Plus généralement, si (a_n) désigne une suite rationnelle tendant vers a et x un réel tel que $x > 0$, ce nombre serait $\lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n}$. On aurait envie de noter $\lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n} = x^a$, initiative très dangereuse pour l'instant car cela suppose que l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} x^{a_n} = x^{(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)}$$

est vérifée. Cette dernière égalité est équivalente la continuité de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & a & \mapsto & x^a \end{array}$$

qui séquentiellement, se traduit par le fait que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et toute suite (a_n) convergeant vers a $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$. Mais attention, à aucun moment avons-nous montrer l'existence de la fonction f en question pour tout nombre réel a et encore moins avons-nous démontré sa continuité ! ! ! Rappelons que nous disposons uniquement d'une fonction monotone

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & a & \mapsto & x^a. \end{array}$$

Afin que la notation x^a soit justifiée pour a réel, il faudrait pouvoir démontrer le théorème suivant

Théorème. Il existe une unique fonction monotone et continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$f_{|\mathbb{Q}} = g.$$

Ce qui n'est pas évident, mais cela change de la définition minable $x^y = e^{y\ln(x)}$.

Par ailleurs, mis à part le problème de notation, notre définition des puissances réelles soulève encore quelques questions subtiles. En effet, si (a'_n) est une deuxième suite rationnelle convergeant vers a, qu'est ce qui garantit que $\lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{a'_n}$ alors qu'on peut avoir $x^{a_n} \neq x^{a'_n}$ pour tout entier naturel n. Par exemple, la suite

$$10^2, \quad 10^{1.5}, \quad 10^{1.42}, \quad 10^{1.415}, \quad 10^{1.4143} \dots$$

permet aussi suivant notre définition de définir le nombre $10^{\sqrt{2}}$, là encore rien ne permet de dire que les morceaux se collent bien à l'infini. Curieux, n'est ce pas ? De surcroît, comment peut-on prouver que $(x^a)^b = x^{ab}$, où a et b désignent deux réels quelconques ? Cette dernière égalité revient à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x^{a_m})^{b_n} = \lim_{i\to\infty} x^{a_i b_i}.$$

Là encore chose pas très évidente.

La clef de ces questions est le théorème *loc.cit*. Par exemple, avec l'existence et la continuité en poche, nous garantissons que si (a'_n) est une autre suite convergeant vers a alors

$$\lim_{n\to\infty} x^{a'_n} = x^{(\lim_{n\to\infty} a'_n)} = x^{(\lim_{n\to\infty} a_n)} = \lim_{n\to\infty} x^{a_n},$$

car $\lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$. De même, maintenant qu'il est possible d'adopter la notation $x^a = \lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n}$, on peut démontrer facilement la règle $x^a x^b = x^{a+b}$. En effet, en écrivant $x^b = \lim\limits_{n\to\infty} x^{b_n}$ on obtient

$$\begin{aligned} x^a x^b &= \lim_{n\to\infty} x^{a_n} \times \lim_{n\to\infty} x^{b_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} x^{a_n} x^{b_n} \\ &= \lim x^{a_n+b_n} \quad \text{car puissances rationnelles} \\ &= x^{a+b} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir la conscience "*tranquille*", nous admettrons notre théorème pour la suite de l'article.

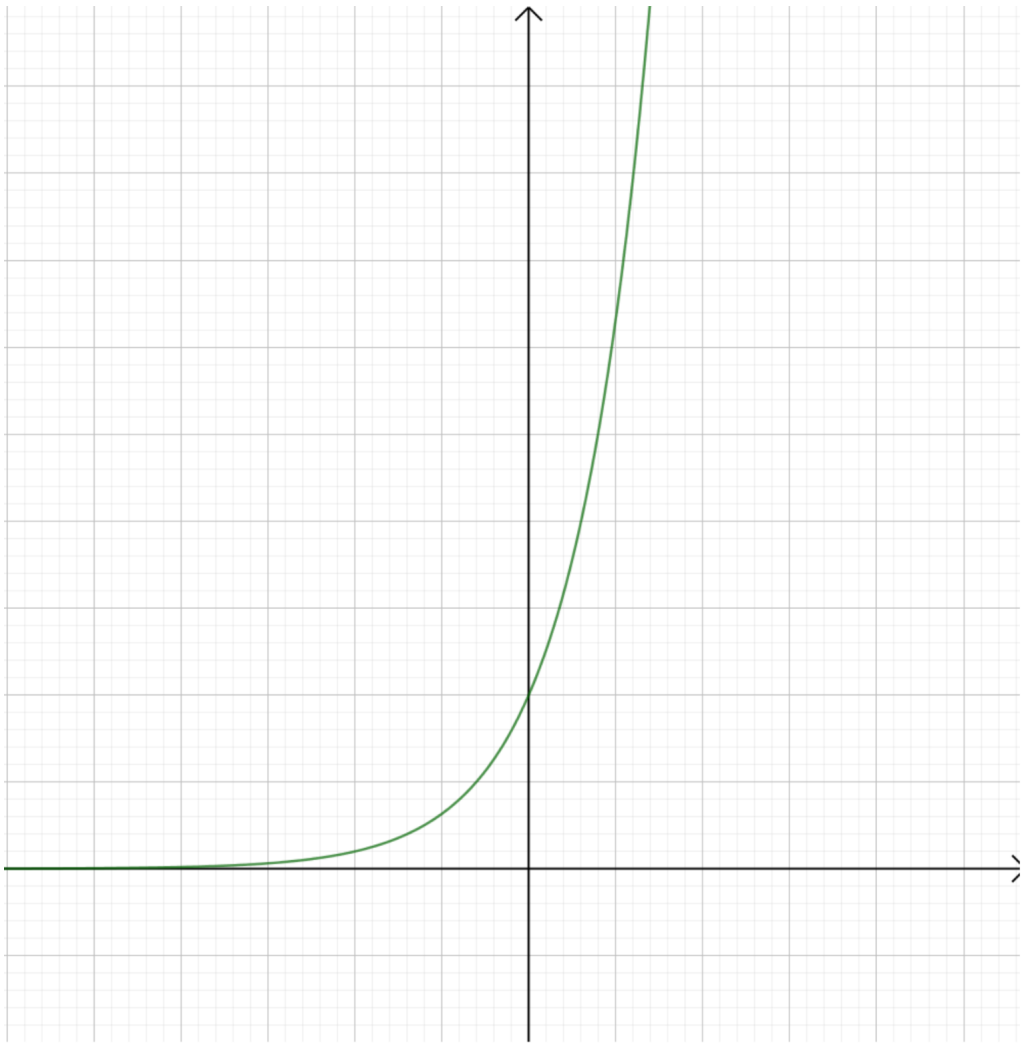
Revenons en à nos logarithmes. Considérons en particulier la fonction $x \longmapsto 10^x$. Cette fonction est strictemnet croissante, i.e. :

$$a > b \Rightarrow 10^a > 10^b$$

Maintenant, le logarithme serait donc la fonction inverse : à un réel positif y, $\log(y)$ serait le nombre x vérifiant $10^x = y$. Par exemple :

$$\log(2) = 0.30102999566... \iff 10^{0.30102999566...} = 2$$

En fait, il est possible de définir cette fonction logarithme précisément parce que lorsque l'on fait varier x, Tous les réels sont couverts par la fonction $x \longmapsto 10^x$. Par exemple, voici la courbe de la fonction $y = 10^x$:



On voit en particulier qu'elle est continue, c'est à dire que l'on peut la tracer "sans lever le crayon", ce qui permet de définir le logarithme pour tous les réels positifs.

Nous verrons un premier moyen de calculer effectivement le logarithme dans la section suivante. Remarquons qu'il suffit de calculer les valeurs de $\log(x)$ pour x entre 0 et 10. En effet, on peut toujours se ramener au calcul d'un log d'un "petit nombre" :

$$\log(2234) = \log(1000 \times 2.234) = 3 + \log(2.234)$$

C'est un travail long [2], mais il suffit de le faire une fois pour en bénéficier des avantages. Comme nous l'avons dit, la propriété fondamentale des logarithmes est la suivante :

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Servons nous en pour calculer le produit de tout à l'heure :

2. Très long, notamment au moment où cette notion a émergé. Ceux qui calculaient devaient vraiment "avoir la foi". À titre indicatif, un mathématicien a extrait 54 racines carrées successives de 2 pour calculer log(2). Heureusement, des méthodes plus rapides ont vu le jour.

$$\begin{aligned}\log(7230749164 \times 38627939921) &= \log(10^9 \times 7.230749164 \times 10^{10} \times 3.8627939921)\\ &= \log(10^{19} \times 7.230749164 \times 3.8627939921)\\ &= 19 + \log(7.230749164 \times 3.8627939921)\\ &= 19 + \log(7.230749164) + \log(3.8627939921)\\ &= 19 + \log(1.446084843305545395)\end{aligned}$$

Ainsi : $7230749164 \times 38627939921 \approx 10^{19} \times 10^{1.446084843305545395} = 2.79308944... \times 10^{20}$. De la propriété fondamentale des logarithmes, et de sa construction, on en déduit quelques autres :

Propriétés du logarithme. Pour tous $a, b > 0$, on a :

1. $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
2. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ (et même sur $\mathbb{R}$) : $\log(a^r) = r\log(a)$.
3. $\log(1) = 0$
4. La fonction log est strictement croissante et continue.

2 Applications

2.1 Nombre de chiffres de nombres géants

On souhaite déterminer le nombre de chiffres de 3^{421238} sans le calculer. Comment faire ?

On sait que si un entier positif n vérifie $10^{m-1} \leq n < 10^m$, alors ce dernier a m chiffres. Sachant que la fonction $\log_{10}$ est strictement croissante, cela équivaut à :

$$m - 1 \leq \log_{10}(n) < m \iff m = [\log_{10}(n)] + 1$$

où la fonction $x \mapsto [x]$ est la partie entière. Ainsi, il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\log_{10}(3^{421238}) &= 421238 \times \log_{10}(3)\\ &= 421238 \times 0.477121254...\\ &\simeq 200981.603...\end{aligned}$$

Notre nombre a donc 200982 chiffres. On peut s'apercevoir que ce résultat est clairement plausible car $3^2 = 9$, qui est assez proche de 10. Or, le nombre de chiffres est de l'ordre de $421238/2$ en étant inférieur soit autour de 200000.

2.2 Dérivée logarithmique

L'une des applications spectaculaires de la dérivée logarithmique est la rapidité avec laquelle on peut dériver une fonction strictement positive définie par une expression contenant des produits, quotients et des puissances. Un exemple vaut mieux qu'un long discours.

On voudrait dériver la fonction f définie sur $]2,+\infty[$ par l'expression

$$f(x)=\frac{(x^2+3)(x+1)^{1/2}}{x-2}.$$

En composant à gauche les deux membres de l'égalité par la fonction ln on obtient

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= \ln\left[\frac{(x^2+3)(x+1)^{1/2}}{x-2}\right]\\ &= \ln\left[(x^2+3)(x+1)^{1/2}\right]-\ln(x-1)\\ &= \ln(x^2+3)+\ln(x+1)^{1/2}-\ln(x-2)\\ &= \ln(x^2+3)+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\ln(x-2).\end{aligned}$$

En dérivant les deux membres de l'égalité on obtient

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x}{x^2+3}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x-2},$$

ou encore

$$\begin{aligned}f'(x) &= f(x)\left(\frac{2x}{x^2+3}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x-2}\right)\\ &= \left[\frac{(x^2+3)(x+1)^{1/2}}{x-2}\right]\left(\frac{2x}{x^2+3}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x-2}\right).\end{aligned}$$

Incroyable, n'est ce pas ? !

2.3 Séisme

Le logarithme de Briggs permet aussi de mesurer l'intensité d'un séisme, d'où la fameuse échelle logarithmique de **Richter**. En effet, cette magnitude notée R est donnée par la formule

$$R=\log\left(\frac{a}{T}\right)+B,$$

où a désigne l'amplitude maximale mesurée sur le sismogramme en micromètres, T la période de l'onde sismique exprimée en secondes et B une constante d'étalonnage exprimant la perte d'intensité de l'onde sismique en fonction de son éloignement par rapport à l'épicentre du séisme.

Par exemple, pour un trembelement de terre situé à 10 000 km de la station de mesure, la constante B vaut environ 6.8. Si le sismogramme enregistre une amplitude maximale $a=10$ micromètres et une période $T=1s$, alors la magnitude du séisme est donnée par

$$R=\log\left(\frac{10}{1}\right)+6.8=1+6.8=7.8.$$

Un séisme de cette magnitude cause énormément de dégâts près de son épicentre.

2.4 Potentiel hydrogène : pH

Le potentiel hydrogène, noté **pH**, est une mesure de l'acidité d'une solution utilisant là encore une échelle logarithmique. Le pH d'une solution est le logarithme en base 10 de l'inverse de la concentration de l'hydronium $[H_3O^+]$:

$$\mathbf{pH} = \log \frac{1}{[H_3O^+]} = -\log[H_3O^+].$$

La concentration de l'ion d'hydronium est exprimée en moles par litre. Par exemple, une banane a un pH autour de 4.6, le pH du vinaigre est de 3 tandis que l'eau pure a un pH égal à 7.

3 Le point de vue des intégrales et première définition de la fonction exponentielle

3.1 Construction intégrale

À une époque où le théorème fondamental de l'analyse n'était pas encore établi, les calculs d'aires suscitent l'intérêt des savants. Au 17ème siècle, l'un des problèmes importants est la quadrature de l'hyperbole, ou l'aire sous la courbe $y = 1/x$ entre 1 et a pour $a > 1$. Après des échecs, Grégoire de Saint-Vincent (1647) et Alfons Anton de Sarasa (1649) découvrent que **l'aire en dessous de cette courbe est une fonction logarithmique de a.**
Dans ce qui précède, nous avons défini les puissances réelles, non sans difficultés techniques ! Dans ce qui suit, nous présentons une nouvelle approche permettant de les contourner assez facilement. En effet, nous cherchons à construire une fonction f définie et **dérivable** sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) \times f(y). \tag{2}$$

Pour éviter que cette fonction soit nulle, nous supposons de plus que $f(1) \neq 0$. Si on pose $a = f(1) > 0$, alors la relation (2) implique que pour x rationnel, la fonction f est donnée par l'expression $f(x) = a^x$. Une façon de faire pour trouver une telle fonction sur tout $\mathbb{R}$ est de résoudre l'équation fonctionnelle (2). Supposons d'abord qu'une telle fonction existe, la connaissance de sa dérivée pourrait alors nous permettre de trouver une bonne définition de f. En effet,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\times f(h)-f(x)}{h} \\ &= f(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} \\ &= f(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= f'(0) \times f(x). \end{aligned}$$

On se heurte alors à une autre difficulté technique, la dérivée de la fonction f s'exprime encore en fonction de f. Cela nous mène donc nulle part. Heureusement que les choses se

passent bien mieux en investigant la fonction réciproque de la fonction f, notée $f^{-1} = \log_a$. En effet,

$$\begin{aligned}\log_a'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{f'(0) \times f(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{f'(0) \times x}.\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $c = f'(0)$, nous avons obtenu que $\log_a'(x) = 1/cx$. La dérivée de f^{-1} est d'une simplicité incroyale, qu'il suffit d'intégrer afin d'obtenir la fonction $\log_a$. Notre stratégie consiste alors à commencer par définir la fonction f^{-1} et en déduire par les techniques de l'analyse une construction des puissances réelles. Puisque $\log_a(1) = 0$, nous pouvons définir la fonction $\log_a$ de la façon suivante

$$\log_a x = \frac{1}{c}\int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

Afin d'éviter les complications calculatoires, il est **naturel** de prendre $c = 1$ auquel cas le logarithme **naturel** est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt,$$

en espérant que cette intégrale correponde bien à une fonction logarithme dans une base donnée. La fonction ln ainsi définie vérifie la relation logarithmique

$$\boxed{\forall x, y > 0 \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

En effet, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que la dérivée de notre fonction ln ainsi définie est donnée par la formule $\ln'(x) = 1/x$. Soit $y > 0$ et posons $g_y(x) = \ln(xy)$. La fonction g_y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g_y'(x) = y \times \ln'(xy) = y \times \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}.$$

On obtient ainsi $\ln' = g_y'$. Cela signifie en particulier qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x > 0 \quad g_y(x) = \ln(x) + C,$$

ou encore que

$$\forall x > 0 \quad \ln(xy) = \ln(x) + C.$$

Or $\ln(y) = g_y(1) = \ln(1) + C = C$. Le résultat en découle.

La fonction ln est strictement croissante car sa dérivée $x \mapsto 1/x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Toutefois, cette dérivée devient très petite quand $x \to \infty$. Par conséquent, la fonction ln croît de plus en plus lentement. Cela signifie-t-il que ln est bornée ? La réponse est NON. Nous avons en effet les relations

$$\ln(2^n) = n\ln(2) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = -n\ln(2).$$

Sachant que $\ln(2) > 0$ par définition, il vient de la relation de gauche que ln est non majorée. De même, la relation de droite permet d'affirmer que notre fonction est non minorée. Par continuité, ln atteint tous les nombres réels et établit ainsi une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que ln admet une fonction réciproque qu'on appelle **exponentielle** et qu'on note **exp**. Nous commençons par démontrer que la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même. En effet, pour tout nombre $y > 0, \ln'(y) \neq 0$, exp étant réciproque de ln, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \frac{1}{\ln'(\exp(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} \\ &= \exp(x).\end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction exponentielle transforme la somme en produit. Plus précisement, nous avons pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).} \tag{3}$$

En effet, on peut écrire $x = \ln(r)$ et $y = \ln(s)$ ou encore que $r = \exp(x)$ et $s = \exp(y)$. Cela implique que

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp(\ln(r) + \ln(s)) \\ &= \exp(\ln(r \times s)) \\ &= r \times s \\ &= \exp(x) \times \exp(y).\end{aligned}$$

Venons-en maintenant à la définition du fameux nombre **e**, base du logarithme népérien. La relation algébrique (3) implique que pour tout nombre $x \in \mathbb{Q}$

$$\exp(x) = \exp(1.x) = [\exp(1)]^x.$$

En réalité, cette relation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par continuité de la fonction exponentielle. Cela suggère de définir le nombre e comme $\exp(1)$. On obtient ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = [\exp(1)]^x = e^x}$$

Notons au passage que notre définition du nombre e est équivalente à la relation

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln(e) = 1.$$

Nous avons ainsi réussi à contruire une fonction exponentielle de base e, non seulement pour les nombres rationnels mais aussi pour les nombres irrationnels. Comment peut-on alors définir la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ pour une base $a > 0$ donnée ? En effet, on peut écrire a sous la forme $e^{\ln(a)}$ et on obtient pour tout nombre $x \in \mathbb{Q}$

$$a^x = [e^{\ln(a)}]^x = e^{x \ln(a)}.$$

Le membre de droite de cette dernière égalité étant valable pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$, cela suggère la définition de a^x pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous récupérons ainsi la définition

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = e^{x \ln(a)}}$$

Maintenant que nous comprenons les subtilités de cette définition, elle perd son statut de définition minable. Il reste donc à montrer qu'elle garantit les règles de calculs sur les puissances. Nous laisserons le lecteur faire ces vérifications de routine.

3.2 Dérivée des fonctions puissances

Nous pouvons, enfin, établir la règle générale de la dérivation des fonctions puissances. Soit f_s la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression $f_s(x) = x^s$, où s désigne un nombre réel fixé. Nous souhaitons montrer que f_s est dérivable et

$$\forall x > 0 \quad f_s'(x) = s x^{s-1},$$

généralisant ainsi la même formule valable jusque là pour $s \in \mathbb{Q}$. En effet, nous pouvons écrire $f_s(x) = e^{s \ln(x)}$, formule impliquant trivialement la dérivabilité de f_s sur son domaine de définition. De plus, la règle de dérivation des fonctions composées permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad f_s'(x) &= s \ln'(x) \times \exp'(s \ln(x)) \\ &= \frac{s}{x} e^{s \ln(x)} \\ &= \frac{s}{x} \times x^s \\ &= s x^{s-1}, \end{aligned}$$

car $\exp' = \exp$. Cette formule permet d'établir une formule encore plus générale, à savoir $(f^s)' = s f' f^{s-1}$, où f désigne une fonction strictement positive sur son domaine de définition et s un nombre réel quelconque. Quelques exemples concrets vous parleront certainement mieux.

Exemples.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression $f(x) = x^{\sqrt{5}}$. Nous avons

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \sqrt{5} x^{\sqrt{5}-1}.$$

2. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi/2[$ par l'expression $g(x) = (\cos x)^\pi$. Par ce qui précède on obtient

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad g'(x) = -\pi \sin x (\cos x)^{\pi-1},$$

car $\cos' = -\sin$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression $h(x) = x^x$. Afin de dériver la fonction h, il suffit de l'écrire sous la forme $h(x) = e^{x \ln x}$ et on obtient la formule

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x} = (\ln x + 1) x^x.$$

3.3 Dérivée des fonctions exponentielles

Nous souhaitons dans cette partie démontrer que pour $a > 0$, la fonction exponentielle f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = a^x$ est dérivable, de fonction dérivée égale à $x \mapsto \ln(a)a^x$. Sans surprise, nous pouvons écrire la fonction f_a sous la forme $f_a(x) = \exp[x\ln(a)]$. Là encore, la règle de dérivation des fonctions composées affirme que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a'(x) &= \ln(a) \times \exp'[x\ln(a)] \\ &= \ln(a) \times \exp[x\ln(a)] \\ &= \ln(a) \times a^x \\ &= \ln(a) \times f_a(x).\end{aligned}$$

On voit alors que e est le seul nombre a pour lequel $f_a' = f_a$, car $\ln(e) = 1$. D'où son importance en calcul infinitésimal. Cette dérivée permet d'établir une formule encore plus générale, à savoir $(a^u)' = \ln(a)u'a^u$, où u désigne une fonction dérivable sur son domaine de définition et $a > 0$. La preuve est relativement facile et est laissée au lecteur.

Exemples.

1. Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = 2^x$. La dérivée de f est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \ln(2) \times 2^x.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = 2^{\sin x}$. La fonction g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= \ln(2)\sin'(x)2^{\sin x} \\ &= \ln(2)\cos(x)2^{\sin x}.\end{aligned}$$

4 Croissance et décroissance exponentielles

Dans cette section nous nous intéressons aux lois de croissance et de décroissance exponentielles et décrivons au passage quelques applications soulignant l'importance des fonctions logarithme et exponentielle. Ainsi, dans nos investigations futures, y désignera une quantité qui croît ou décroît avec un taux d'accroissement proportionnel à tout instant t à la quantité y présente. Plus précisément, si on note y_0 la quantité initiale (quand $t = 0$) alors y est solution de l'équation différentielle

$$y' = ky, \tag{4}$$

où la constante k est positive si y est positive et croissante, auquel cas le phénomène décrit suit une croissance exponentielle. La constante k est négative si y est positive et décroissante et dans ce cas il s'agit d'une décroissance exponentielle.
La fonction nulle est clairement solution de l'équation (4). Nous supposons donc que $y \neq 0$, en divisant (4) par y on obtient

$$\frac{y'}{y} = k.$$

On reconnaît ici sans surprise une dérivée logarithmique. Ainsi en intégrant de part et d'autres cette égalité on obtient $\ln|y| = kt + C$, ou encore en composant à gauche par la fonction exponentielle $|y| = e^{kt+C}$. La fonction y est ainsi donnée par

$$\boxed{y = \pm e^C e^{kt}}.$$

La constante $\lambda = \pm e^C$ est déterminée en fonction de la condition initiale $y_0 = y(0)$. Avant de passer aux exemples, nous tenons à souligner que cette façon de faire ne plaît pas aux mathématiciens, soucieux de rigueur. En effet, diviser par une fonction y qui peut avoir quelques valeurs d'annulation laisse franchement à désirer. Nous vous proposons une façon plus propre pour se faire. Soit g la fonction définie par l'expression $g(t) = ye^{-kt}$. L'idée est alors de montrer que la fonction g est constante en montrant que sa dérivée est nulle. En effet

$$\begin{aligned} g'(t) &= y'e^{-kt} - kye^{-kt} \\ &= (y' - ky)e^{-kt} \\ &= 0 \times e^{-kt} = 0. \end{aligned}$$

Il existe du coup une constante λ telle que $g = \lambda$. Cela signifie en particulier que pour tout t,

$$ye^{kt} = \lambda,$$

ou encore que $y = \lambda e^{-kt}$, CQFD.

4.1 La loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton s'énonce de la façon suivante : "La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et celle du milieu ambiant". Par exemple, l'eau chaude refroidit jusqu'à atteindre la température de l'air ambiant. Plus précisément, si $T(t)$ désigne la température de l'objet à l'instant t et T_a la température ambiante, alors

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a),$$

où k désigne la constante de proportionnalité de la loi de Newton. Si on pose $\widetilde{T}(t) = T(t) - T_a$, on obtient l'équation différentielle

$$\widetilde{T}'(t) = -k\widetilde{T}(t).$$

Or on sait que la solution de cette équation est donnée par $\widetilde{T}(t) = \widetilde{T}_0 e^{-kt}$. Par conséquent la loi de refroidissement de Newton est donnée par

$$T(t) - T_a = (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

Application. On met un oeuf dur à 100°C dans de l'eau à 17°C. Au bout de 6 minutes, la température de l'oeuf atteint les 30°C. Au bout de combien de temps atteindra-t-il 19°C ?
Dans notre situation $T_0 = 100°$, $T_a = 17°$ mais la constante k est pour l'instant inconnue. Or

$$T(6) = 17 + (100 - 17)e^{-6k} = 17 + 83e^{-6k} = 30,$$

ce qui implique en particulier que $e^{-6k} = 13/83$ ou encore $k = \frac{1}{6}\ln(83/13) \simeq 0.31$. Ainsi la température à l'instant t est donnée par $T(t) = 17 + 83e^{-0.31t}$. Du coup

$$\begin{aligned} T(t) = 19 &\iff 17 + 83e^{-0.31t} = 19 \\ &\iff 83e^{-0.31t} = 2 \\ &\iff 0.31t = \ln(83/2) \\ &\iff t = \ln(83/2)/0.31 \simeq 12 \text{ minutes.} \end{aligned}$$

Ainsi l'oeuf mettra 12 minutes pour atteindre 19°C.

4.2 La radioactivité

La radioactivité est le phénomène physique dans lequel des noyaux atomiques se désintègrent en se transformant en d'autres atomes. Par exemple le carbone-14 est un isotope radioactif du carbone qui se transforme en azote. La chaleur générée par la radioactivité maintient le noyau terrestre sous forme liquide. De plus, ce phénomène naturel entretient la combustion au sein du soleil à travers des réactions thermonucléaires transformant l'hydrogène en hélium.
Les expérimentations montrent que le taux d'accroissement à un instant t donné de la désintégration d'un élément, mesuré par le nombre de noyaux qui se transforment par unité de temps, est proportionnel au nombre de noyaux radioactifs présents. Par conséquent, la radioactivité est décrite par l'équation différentielle $y' = -ky, k > 0$. La solution de cette équation est donnée par la formule

$$y(t) = y_0 e^{-kt}, \tag{5}$$

où y_0 désigne naturellement le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant initial.

4.2.1 Demi-vie

La demi-vie d'un élément radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux se désintègre. Il est intéressant de noter que cette grandeur est une constante qui dépend uniquement de la substance radioactive et pas du nombre de noyaux initialement présents dans l'échantillon. L'équation (4) permet de comprendre pourquoi. En effet,

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{2}y_0 &\iff y_0 e^{-kt} = \frac{1}{2}y_0 \\ &\iff e^{-kt} = \frac{1}{2} \\ &\iff -kt = -\ln(2) \\ &\iff t = \frac{\ln(2)}{k}. \end{aligned}$$

On voit alors que la demi-vie dépend uniquement de la constante k, caractéristique de l'élément radioactif en question.

4.2.2 Polonium-210

Le polonium fut le premier élément radioactif découvert par Pierre et Marie Skłodowska-Curie au cours de leurs recherches sur la radioactivité. Le mot polonium a été choisi en hommage aux origines polonaises de Marie Curie née Skłodowska. Le polonium-210 est l'isotope du polonium ayant un nombre de masse égal à 210. Il a une vie radioactive relativement courte qu'on peut mesurer en jours. Son équation de désintégration est donnée par

$$y(t) = y_0 e^{-5\times 10^{-3} t}.$$

La demi-vie du polonium-210 est ainsi donnée par

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{5\times 10^{-3}} \simeq 139 \text{ jours.}$$

4.2.3 Carbone-14

Le carbone-14 est un isotope radioactif du carbone dont la demi-vie est d'environ 5734 années. Cet isotope est utilisé dans la datation d'évènements passés sur la terre. Le processus de datation est fondé sur la mesure de l'activité radiologique du carbone-14 contenu dans le corps organique dont on souhaite connaître l'âge. Pour trouver l'âge d'un animal pour lequel 15% du carbone-14 s'est désintégré on commence par déterminer la constante k. En effet

$$k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{5734} \simeq 1.2\times 10^{-4}.$$

Il suffit maintenant de résoudre en t l'équation $y(t) = 0.85 y_0$. En effet

$$\begin{aligned} y(t) = 0.85 y_0 &\iff y_0 e^{-1.2\times 10^{-4} t} = 0.85 y_0 \\ &\iff e^{-1.2\times 10^{-4} t} = 0.85 \\ &\iff -1.2\times 10^{-4} t = \ln(0.85) \\ &\iff t = -\frac{\ln(0.85)}{1.2\times 10^{-4}} \simeq 1354 \text{ années.} \end{aligned}$$

5 Approche séquentielle

5.1 La racine q-ième d'un nombre positif

Dans ce premier appendice, nous démontrons que tout nombre réel $y > 0$ admet une unique racine q-ième positive, où q désigne un entier naturel non nul. Autrement dit, nous allons justifier l'existence du nombre $y^{1/q}$, où encore que l'équation $x^q = y$ admet une unique solution $x > 0$.
Pour se faire, nous commençons par montrer l'existence de la racine carrée d'un nombre positif y avec notre petite théorie des suites. Nous supposons uniquement que toute suite décroissante et minorée est convegente, propriété fausse dans $\mathbb{Q}$. L'idée serait donc de construire une suite décroissante et minorée convergeant vers un nombre ℓ vérifiant $\ell^2 = y$.

Héron d'Alexandrie part d'une intuition géométrique assez ingénieuse lui permettant de construire une telle suite. Il prétend en effet que chercher la racine carrée de y revient à chercher un carré d'aire égale à y, auquel cas, cette racine sera égale au côté du carré. À la première itération, Héron part d'un rectangle d'aire égale à y et de côté y_0 tel que $y_0^2 > y$. L'autre côté du rectangle mesurera donc y/y_0. L'astuce consiste alors à transformer ce rectangle petit à petit en un carré de même aire en prenant à la deuxième itération un rectangle dont l'un des côtés mesure

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y}{y_0}\right),$$

qui est la moyenne arithmétique des deux côtés du premier rectangle. On réitère ce même procédé pour trouver une suite définie par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{y}{y_n}\right). \tag{6}$$

Cela fait, il nous reste à montrer que notre suite (y_n) est convergente, ayant une limite ℓ vérifiant $\ell^2 = y$. Avant de faire cette démonstration, prenons un exemple concret. Pour $y = 2$, on peut prendre $y_0 = 3/2$ et il est facile de vérifier que $y_0^2 > 2$. La suite (y_n) est ainsi donnée par la formule

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{2}{y_n}\right).$$

En calculant les premiers termes de cette suite on obtient

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.416666666666666\cdots \\ y_2 &= 1.414215686274509\cdots \\ y_3 &= 1.414213562374689\cdots \\ y_4 &= 1.414213562373095\cdots . \end{aligned}$$

Incroyable ! Les décimales de y_4 correspondent aux premières décimales de $\sqrt{2}$. À vos calculatrices pour vous en convaincre.

Revenons au cas général. Pour montrer que la suite (y_n) est décroissante, on sait que $y_0^2 > y$ et il suffit alors de montrer la condition

$$y_n^2 > y \implies \big(y_{n+1} < y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1}^2 > y\big).$$

Une récurrence simple permettra alors de conclure. En effet,

$$\begin{aligned} y_n - y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{y}{y_n}\right) \\ &= \frac{y_n^2 - y}{2y_n} > 0. \end{aligned}$$

D'où $y_n > y_{n+1}$. Par ailleurs on a

$$y_n^2 - y_{n+1}^2 = (y_n - y_{n+1})(y_n + y_{n+1}) < 2y_n(y_n - y_{n+1}) = y_n^2 - y,$$

car $y_n + y_{n+1} < 2y_n$. Cela montre en particulier que $y_{n+1}^2 > y$. Bingo !
On a ainsi démontré que la suite de termes positifs (y_n) est décroissante. D'où sa convergence.
La relation de récurrence (2) montre alors que la limite ℓ de notre suite (y_n) vérifie la relation

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{y}{\ell}\right),$$

qui est équivalente à $\ell^2 = y$. Re-Bingo !

La suite permettant de définir la racine q-ième d'un nombre positif y est une généralisation évidente de la suite de Héron. En effet, nous prenons $y_0^q > y$ et

$$y_{n+1} = \frac{1}{q}\left((q-1)y_n + \frac{y}{y_n^{q-1}}\right).$$

De la manière, on démontre que la suite (y_n) ainsi définie est convergente en démontrant qu'elle est décroissante et minorée. La seule subtilité technique est l'inégalité

$$y_n^q - y_{n+1}^q < y_n^q - y.$$

Elle découle du fait

$$a^q - b^q = (a-b)(a^{q-1} + a^{q-2}b + a^{q-3}b^2 + \cdots + ab^{q-2} + b^{q-1}),$$

où $a = y_n$ et $b = y_{n+1}$. On obtient alors notre résultat en remarquant que $a^k b^{q-1-k} < a^k a^{q-1-k} = a^{q-1}$, ce qui implique en particulier que $a^q - b^q < qa^{q-1}(a-b)$.

5.2 Construction séquentielle de la fonction log

Nous donnons dans cet appendice très instructif une construction séquentielle (utilisant la théorie des suites convergentes) de notre dulcinée fonction log. Nous commençons par supposer qu'une telle fonction existe et analyser ses propriétés. Autrement dit, on suppose l'existence d'une fonction

$$\begin{array}{rccc} \log & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \log(x), \end{array}$$

vérifiant la relation $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. On suppose de plus que cette fonction est suffisamment sympathique pour qu'elle admette une dérivée en 1 égale à 1. Autrement dit, la fonction log est dérivable en 1 telle que $\log'(1) = 1$. Nous verrons plus loin pourquoi on impose cette dernière condition, mais d'abord démontrons que si $x > 0$ alors

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1.$$

En effet, si $x > 1$ alors $x^{1/n} > 1$, ceci implique pour tout $n \geq 1$ l'existence d'un nombre $x_n > 0$ tel que $x^{1/n} = 1 + x_n$. Pour arriver à nos fins, il suffit de montrer que la suite (x_n) tend vers 0. La formule du binôme de Newton donne

$$(1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \text{ d'autres termes } > 0.$$

Cela implique que $x > 1 + nx_n$ ou encore que $0 < x_n < (x-1)/n$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure. Le cas $x = 1$ est trivial et celui où $x < 1$ se traite en posant

$x = 1/y$, auquel cas $y > 1$ et $x^{1/n} = 1/y^{1/n}$, ce qui se ramène au premier cas.

On peut montrer par récurrence que la relation logarithmique $\log(xy) = \log(x)+\log(y)$ implique que pour tout entier naturel n, $\log(x^n) = n\log(x)$. Cette dernière relation implique en particulier que

$$\log\left((x^{1/n})^n\right) = n\log(x^{1/n}),$$

d'où $\log(x^{1/n}) = \log(x)/n$. Supposons comme plus haut que $x > 1$ et que $x^{1/n} = 1 + x_n$. On obtient dans ce cas $\log(x) = n\log(1 + x_n)$, ou encore que

$$\log(x)/nx_n = \log(1 + x_n)/x_n. \tag{7}$$

Le membre de droite de cette égalité est de la forme $\log(1+h)/h$, qui n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction log en 1. Or nous l'avons supposée dérivable en 1 de dérivée égale à 1. Par ce qui précède, la suite (x_n) tend vers 0 et par conséquent $\log(1+x_n)/x_n$ tend vers 1. Puisque $\log(x)$ ne dépend pas de n, (3) implique que

$$\begin{aligned}\log(x) &= \lim_{n\to\infty} nx_n \\ &= \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1).\end{aligned}$$

En résumé, s'il existe une fonction log transformant le produit en somme et dérivable en 1 de dérivée égale à 1 alors cette fonction serait donnée par la formule

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1).$$

Nous tenons à vous mettre en garde que pour l'instant nous n'avons pas établi l'existence d'une telle fonction, ni avons-nous démontré la convergence de la suite $(n(x^{1/n} - 1))$. Mais cela ne saurait tarder.

Nous démontrons ainsi le théorème suivant

Théorème. Pour tout $x > 0$, la suite $(n(x^{1/n} - 1))$ tend vers une limite qu'on note $f(x)$. La fonction f ainsi définie est strictement croissante, dérivable et vérifie

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f'(x) = 1/x$$

Nous traitons d'abord le cas $x > 1$. Posons $x_n = n(x^{1/n}-1)$, auquel cas $x_n > 0$. Autrement dit, on a pour tout $n \geq 1$

$$x = (1 + x_n/n)^n. \tag{8}$$

Nous souhaitons démontrer ici la décroissance de la suite (x_n). Pour se faire, nous commençons par prouver que pour tout $y > 0$, la suite (y_n) donnée par $y_n = (1 + y/n)^n$ est croissante. La formule du binôme de notre regretté Newton donne

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}\frac{y^k}{k!}.$$

Sachant que tous les termes dans les deux sommes sont positifs, il suffit de remarquer que pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\frac{n!}{(n-k)!} \leq \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!},$$

ce qui revient à montrer que

$$1 \leq \frac{n+1}{n+1-k}.$$

Ceci étant une évidence, nous retournons à notre suite (x_n). En prenant $y = x_n$ et par croissance de la suite (y_n), on obtient

$$x = (1 + x_n/n)^n < [1 + x_n/(n+1)]^{n+1}.$$

Or on sait aussi d'après (4) que

$$x = [1 + x_{n+1}/(n+1)]^{n+1} < [1 + x_n/(n+1)]^{n+1}.$$

Ceci implique donc que

$$1 + x_{n+1}/(n+1) < 1 + x_n/(n+1),$$

ou encore que $x_{n+1} < x_n$. Ainsi la suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, d'où sa convergence. Le cas $0 < x < 1$ se traite en posant $x = 1/z$ où $z > 1$, auquel cas on obtient

$$n(x^{1/n} - 1) = \frac{n(1 - z^{1/n})}{z^{1/n}}.$$

Or $z^{1/n} \to 1$ et $n(1 - z^{1/n}) \to -f(z)$. Le résultat en découle.
Maintenant que la convergence est établie, passons à la relation logarithmique. Nous avons en effet

$$\begin{aligned} f(xy) - f(x) - f(y) &= \lim n((xy)^{1/n} - 1) - \lim n(x^{1/n} - 1) - \lim n(y^{1/n} - 1) \\ &= \lim n((xy)^{1/n} - x^{1/n} - y^{1/n} + 1) \\ &= \lim n(x^{1/n} - 1)(y^{1/n} - 1) \\ &\to_{n\to\infty} f(x) \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $f(xy) = f(x) + f(y)$. Il reste à établir la dérivabilité de f et de montrer que $f'(a) = 1/a$. Remarquons tout d'abord que la relation logarithmique implique trivialement que

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(x/y) = f(x) - f(y).$$

Il s'en suit alors que

$$f(a+h) - f(a) = f\left(\frac{a+h}{a}\right) = f(1 + h/a).$$

Ainsi le taux d'accroissement de la fonction f en a vaut

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{a} \times \frac{f(1+h/a)}{h/a} = \frac{1}{a} \times \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

en effectuant le changement de variable $x = 1 + h/a$. On voit alors qu'il suffit de montrer que f est dérivable en 1 de dérivée égale à 1. Pour se faire, nous démontrons que le rapport $(x-1)/f(x)$ est compris entre 1 et x, que x soit > 1 ou < 1. Le résultat découlera donc par passage à la limite. En effet, en prenant un nombre y vérifiant $y^n = x$, on obtient

$$\frac{x-1}{x_n} = \frac{y^n - 1}{n(y-1)} = \frac{1 + y + \cdots + y^{n-1}}{n}.$$

On voit ainsi que $(x-1)/x_n$ est la moyenne arithmétique des y^k, appartenant pour tout k à l'intervalle fermé de bornes 1 et $y^n = x$. Il s'en suit que $(x-1)/x_n$ l'est aussi pour tout n et par passage à la limite quand $n \to \infty$ notre résultat tombe comme une pomme mûre. La stricte croissance de la fonction f revient à montrer l'équivalence

$$x > 1 \iff f(x) > 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire cette démonstration. Dans la suite de cet appendice, nous démontrons à la main qu'avec notre définition séquentielle de la fonction log, nous avons bien

$$\boxed{\log(x) = \int_1^x \tfrac{1}{t} dt}$$

Sans perte de généralité, nous prenons $x > 1$. Le nombre $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ est l'aire en dessous de la fonction $t \mapsto 1/t$ entre 1 et x. Afin de calculer cette aire, on subdivise l'intervalle $[1, x]$ avec la suite

$$x_0 = (x^{1/n})^0 = 1, x_1 = (x^{1/n})^1, \ldots, x_n = (x^{1/n})^n = x.$$

On prend alors les fonctions en escalier ϕ et ψ définies sur chacun des $[x_i, x_{i+1}[$ par

$$\phi_{|[x_i, x_{i+1}[} = \frac{1}{x_{i+1}} \quad \text{et} \quad \psi_{|[x_i, x_{i+1}[} = \frac{1}{x_i}.$$

Par décroissance de la fonction $t \mapsto 1/t$ sur $[1, x]$, on a $\phi(t) \leq 1/t \leq \psi(t)$ pour tout $t \in [1, x]$. Cela implique en particulier que

$$\int_1^x \phi(t) dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \psi(t) dt. \tag{9}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_1^x \phi(t) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{x_{i+1}} dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \times \frac{1}{x_{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x_i}{x_{i+1}}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{1/n}}\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{x^{1/n}}\right) \\
&= \frac{n(x^{1/n} - 1)}{x^{1/n}}.
\end{aligned}$$

L'égalité $\psi(t) = x^{1/n} \times \phi(t)$ permet de montrer sans trop de calculs que

$$\int_1^x \psi(t) dt = n(x^{1/n} - 1).$$

Les inégalités (7) deviennent alors

$$n(x^{1/n}-1)/x^{1/n} \leq \int_1^x \frac{1}{t}dt \leq n(x^{1/n}-1).$$

Incroyable ! On reconnait ici la suite définissant notre fonction log. Par passage à limite quand $n \to \infty$, $x^{1/n} \to 1$, le membre de gauche tend vers $\log(x)$ et le membre de droite tend aussi vers $\log(x)$. Le résultat en découle.

5.3 Les calculs de Henry Briggs

Comment Henry Briggs effectua-t-il ses premiers calculs ? Voici comment, non sans dure labeur, il calculait par exemple $\log_{10}(5)$. Il supposa la dérivabilité de la fonction $\log_{10}$ (ce qui a l'air vrai en regardant le graphique de la fonction $x \to 10^x$). Cela lui permit de faire la remarque suivante :

Si h et h_0 sont très proches de 1 en étant supérieurs, et vérifient $h_0 < h < h_0^2$, alors

$$\frac{\log_{10}(h)-\log_{10}(h_0)}{h-h_0} \simeq \frac{\log_{10}(h^2)-\log_{10}(h)}{h_0^2-h_0} = \frac{\log_{10}(h_0)}{h_0(h_0-1)}$$

Cela permet de calculer $\log_{10}(h)$ connaissant $\log_{10}(h_0)$. Pour cela, il prend $h_0 = 10^{1/2^n}$ où n est très petit, et $h = 5^{1/2^{n-1}}$ par exemple. Briggs avait la foi : on l'a vu extraire pas moins de 54 racines carrées successives de 2 pour calculer $\log_{10}(2)$.

Par exemple : Nous prenons $h_0 = 10^{1/2^{13}} = 1.0002811$ et $h = 5^{1/2^{12}} = 1.0003930$. Nous avons alors $\log_{10}(h_0) = 1/2^{13} = 0.00012207$, ce qui nous donne :

$$\frac{log_{10}(5^{1/2^{12}})-0.00012207}{1.0003930-1.0002811} = \frac{0.00012207}{1.0002811 \times 0.0002811}$$

ou

$$\log_{10}(5) = 2^{12} \times \left(0.00012207 + \frac{0.00012207 \times 0.0001119}{1.0002811 \times 0.0002811}\right) = 0.69898339$$

Cette approximation, malgré le travail colossal qu'elle a nécessité, n'est bonne que de quatre décimales ! Briggs n'a extrait ici que 12 racines carrées après tout. Le pauvre ! En effet, la valeur précise de $\log_{10}(5)$ à huit décimales près est 0.69897000....

6 Tous les chemins mènent à Rome : équations fonctionnelles

Nous avons vu qu'il existe plusieurs façons pour construire proprement les fonctions log et exp. Nous avons aussi démontré par les moyens du bord que la définition séquentielle de la fonction ln coincident avec sa définition intégrale. Nous pouvons en réalité faire mieux en nous plaçant dans un cadre plus général, en démontrant qu'une fonction *continue* vérifiant la relation logarithmique

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

est forcément une fonction logarithmique. Autrement dit, le cadre et l'outil technique utilisé pour construire de telles fonctions importent peu, les fonctions finales seront les mêmes. Pour se faire, on commence par montrer que toute fonction non identiquement nulle et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{10}$$

est une fonction exponentielle. *Fasten your seat belts, it's gonna be a bumpy ride.* Tout d'abord une fonction vérifiant (10) est forcément positive. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0.$$

En réalité cette fonction est strictement positive, car dans le cas contraire l'existence d'un x_0 pour lequel $f(x_0) = 0$ impliquerait pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0.$$

Ainsi, la fonction f serait identiquement nulle, ce qui est exclu par hypothèse. Par ailleurs la relation

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2$$

implique que $f(0) = 1$, la valeur $f(0) = 0$ étant exclue comme nous venons de le voir.
La relation (10) permet d'affirmer que $f(2) = f(1+1) = f(1)^2$, $f(3) = f(1)^3$ et avec une récurrence triviale $f(n) = f(1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est alors utile de poser $a = f(1)$ afin de pouvoir montrer qu'en fait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x.$$

Notant d'abord que cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Cela provient du fait

$$1 = f(0) = f(n-n) = f(n)f(-n) = f(n)a^{-n},$$

ce qui implique que $f(n) = a^n$ quand $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Nous démontrons maintenant que cette formule est valable sur $\mathbb{Q}$, ce qui nous permettra de conclure rapidement sur $\mathbb{R}$. En posant $x = m/n$ où $n > 0$ on obtient

$$a^m = f(m) = f(nx) = f(x + x + \cdots + x) = f(x)^n.$$

Puisque $f(x) > 0$, cette relation montre que $f(x) = (a^m)^{1/n} = a^{m/n} = a^x$. Pour les nombres réels, la preuve s'appuie sur la continuité de notre brave fonction f. En effet, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels, ainsi si $x \in \mathbb{R}$ alors il existe une suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{Q}$ telle que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Il s'ensuit que l'on a

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Nous démontrons maintenant que toute fonction f définie, continue et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

est une fonction puissance. Tout d'abord, une telle fonction est strictement positive. Elle est positive car pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2.$$

Par ailleurs, s'il existe un $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$ alors pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f(x_0 \times x/x_0) = f(x/x_0)f(x_0) = 0.$$

Ceci signifie que f est identiquement nulle, ce qui n'est pas. Afin de conclure, nous allons utiliser une fonction auxiliaire g et montrer que cette fonction est exponentielle. En effet, soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = f(a^x)$, où a désigne un nombre réel strictement positif et différent de 1. On voit aisément que g est continue sur $\mathbb{R}$, étant composée de deux fonctions qui le sont. De surcroît, g vérifie la relation $g(x+y) = g(x)g(y)$. Il existe donc un nombre $b > 0$ tel que $g(x) = b^x$. Par ailleurs, il existe un nombre réel s pour lequel $b = a^s$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f(a^y) = g(y) = b^y = (a^s)^y = a^{sy} = (a^y)^s = x^s.$$

On peut, enfin, montrer qu'une fonction non identiquement nulle et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant la relation

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

est une fonction logarithme. Pour cela, soit a un nombre strictement positif différent de 1 et prenons g la fonction auxiliaire définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression

$$g(x) = a^{f(x)}.$$

Étant composée de deux fonctions continues, la fonction g l'est aussi. De surcroît, nous avons pour tous $x, y > 0$

$$g(xy) = a^{f(xy)} = a^{f(x)+f(y)} = a^{f(x)}a^{f(y)} = g(x)g(y).$$

Ainsi la fonction g est une fonction puissance, d'où l'existence d'un réel s tel que pour tout $x > 0$ $g(x) = x^s$. Il s'ensuit que pour tout $x > 0$

$$a^{f(x)} = x^s.$$

En appliquant $\log_a$ de part et d'autre de cette égalité on obtient $f(x) = \log_a(x^s) = s\log_a(x)$.

$$\mathcal{CQFD}$$