Le Jeu de Platon

Constructibilité à la règle non graduée et au compas

T.D.V N.A
Mohamed ATOUANI

Nul n'entre ici s'il n'est géomètre...
Platon

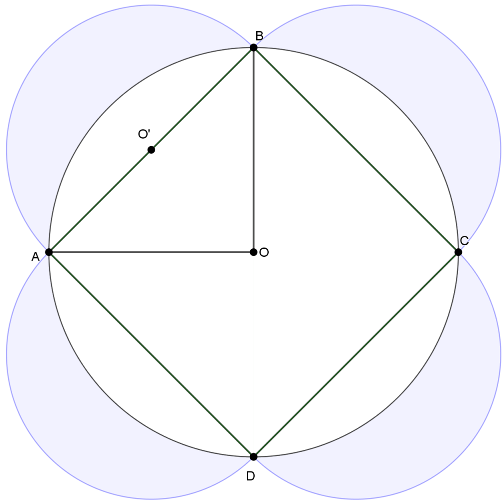
1 Euclide, la règle non graduée et le compas : histoire

- Euclide est un mathématicien de génie de la Grèce antique, auteur de l'ouvrage le plus influent de l'histoire des mathématiques *Les Éléments* regroupant une synthèse des mathématiques de son ère, abordant notamment la géométrie mais aussi l'arithmétique. Une lecture naïve de ces ouvrages (que même notre enseignement ne donne plus) ne permet cependant pas de comprendre les tenants et les aboutissants de la technologie hellénique car une interprétation de sa géométrie dans son contexte historique est nécessaire. En effet, on constate d'abord que toutes les constructions dans cette œuvre monumentale s'effectuent uniquement à la règle non graduée et au compas. Et pourtant, les Grecs disposaient de bien d'autres instruments mécaniques permettant d'avoir une géométrie plus riche. La première question légitime est alors "Pourquoi se restreindre à ces deux outils ?".

  - Une première raison est l'influence de l'Académie de Platon. Pour des raisons philosophiques, toute chose que l'on peut tracer avec des outils mécaniques n'est qu'un mauvais reflet de la réalité. Par exemple, le cercle tracé avec un compas n'est qu'une représentation du cercle parfait répondant exactement à la définition du cercle. En effet, celui-ci peut être assujetti à de nombreuses contraintes mécaniques empêchant une parfaite précision. Toutefois, les seuls objets ayant droit de cité chez Platon étaient cercle et droite, d'où l'exemption de la règle non graduée et du compas.
  - Par ailleurs, une raison mathématique plausible à l'intérêt porté à ces deux instruments est la découverte des nombres irrationnels par l'école Pythagoricienne que l'on peut obtenir avec des constructions nécessitant que ces deux outils, notamment de $\sqrt{2}$ qui fait le sujet de notre précédente vidéo.

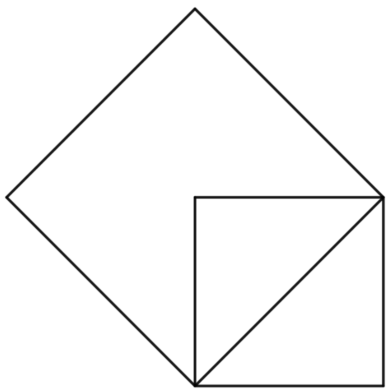
- Malgré leur grande habileté technique qui leur permit de résoudre nombre de problèmes, les mathématiciens grecs ont laissé trois problèmes célèbres sans solution :

  - *La quadrature du cercle* : Il s'agit, étant donné un cercle, de construire un carré ayant exactement la même aire.
    L'un des buts de ce problème était d'avoir une meilleure approche pour étudier le nombre π. Au $5^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère, Hippocrate de Chios est l'un des premiers à tenter de résoudre ce problème, en vain. Il a cependant su quarrer certaines surfaces limitées par des cercles, que l'on appelle des lunules. Par exemple, dans la figure affichée ci-dessous, on montre que l'aire de la surface bleue est égale à celle du carré.



On montre alors que la partie bleue et le carré ABCD ont même aire.

– *La duplication du cube* : Le problème de la duplication du cube ou ce qu'on appelle le problème de Délos (the Delian problem pour les anglosaxons) se pose d'une manière très naturelle. En effet, il n'est pas difficile de construire à la règle non graduée et au compas un carré d'aire double d'un carré donné. Il suffit de construire le carré de base la diagonale du premier carré comme le montre la figure ci-dessous. On laisse au lecteur le soin de montrer que l'aire du nouveau carré vaut bien le double du premier. Une question légitime est " Peut-on faire



la même chose avec un cube ?", autrement dit, peut-on construire un cube de volume égal au double du volume d'un cube donné ?

– *La trisection de l'angle* : Nous allons voir plus loin que l'on peut aisément bisecter un angle, comme on peut aussi partager un segment donné en 2, 3 ou même n morceaux égaux. Peut-on faire la même chose avec un angle ? Plus particulièrement, peut-on le trisecter, c'est à dire le partager en trois angles égaux ?
Ces problèmes de construction ont résisté pendant plus de 2000 ans aux mathématiciens de premier plan. L'introduction des coordonnées par Descartes et Fermat a permis d'établir un pont algébrico-géométrique permettant de traduire les problèmes de géométrie en problèmes d'algèbre et vice-versa, constituant un

premier pas décisif vers leur compréhension. Il faut cependant attendre le 19ème siècle pour voir le premier de ces problèmes tomber. Ainsi, suite aux travaux de Niels Abel (1802-1829) sur les équations, Pierre-Laurent Wantzel montre en 1837, en utilisant un arsenal technique relativement sophistiqué, l'impossiblité de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Le problème de la quadrature du cercle est d'une autre nature et a nécessité l'introduction d'outils analytiques pour montrer son impossibilité. Ferdinand Von Lindemann a démontré en 1882 que le nombre π est en un sens plus méchant que les autres, non seulement il est irrationnel mais aussi transcendant. Ce terme barbare signifie que π n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

– Dans cette vidéo nous allons nous intéresser à un quatrième problème laissé par les Grecs, à savoir la *cyclotomie*. Il s'agit de diviser le cercle en n arcs de même longueur à l'aide de la règle non graduée et du compas. Ce problème est équivalent à tracer un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle donné. Cette question prend une bonne part dans l'oeuvre d'Euclide qui a pour point culminant la construction du pentagone régulier (5-gone), peut être le plus grand tour-de-force mathématique des Éléments. Personne n'a alors su aller plus loin et la communauté mathématique a longtemps cru que ce problème était comme les trois premiers impossible. Ce n'en est rien ! Carl Friedrich Gauss a démontré à seulement l'âge de 19 ans et avec un procédé ingénieux que l'héptadécagone (17-gone) était constructible et plus généralement que si le nombre de côtés d'un polygone régulier à n côté est un nombre premier de Fermat, *i.e* un nombre premier n qui s'écrit sous la forme

$$n = 1 + 2^{2^k},$$

alors ce polygone est constructible. Wantzel (encore lui) est parvenu à clotûrer ce problème en démontrant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone régulier à n côtés soit constructible. On appelle aujourd'hui ce résultat le théorème de Gauss-Wantzel : Un polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement n vérifie une factorisation particulière, faisant intervenir les nombres premiers de Fermat. [1] Notons alors que

$$17 = 1 + 2^{2^2}$$

2 Constructibilité : les idées d'Euclide

Après cette introduction historique, tentons de comprendre l'essence de la géométrie d'Euclide. Nous serons nécessairement incomplets car son œuvre présente de multiples intérêts, mais tentons de comprendre ses idées les plus importantes. Tout d'abord, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, Euclide construit les mathématiques à partir de ce que nous appelons aujourd'hui des **axiomes**.

Pour comprendre ce qu'est un axiome, il faut comprendre la notion de démonstration en mathématiques. Lorsque nous démontrons un théorème, il faut nécessairement partir de résultats préliminaires déjà établis comme vrais pour pouvoir le faire. Cependant, on peut

1. Remarquons que les nombres premiers de Fermat n'ayant pas encore révélé tous leurs secrets de nos jours, on peut considérer que ce problème n'est pas totalement résolu...

faire la même remarque pour ces résultats préliminaires, qui doivent eux même être démontrés par d'autres résultats eux mêmes devant être démontrés par d'autres résultats, etc... on voit que si cela est le cas, on n'en finirait plus, ce qui nous mène à la conclusion que nous devons nécessairement partir d'une certaine base, et ainsi admettre certains résultats, que l'on ne discutera pas. Ceux-ci sont appelés axiomes ou postulats.

Euclide a déjà révolutionné la conception des mathématiques à cet égard en partant d'une telle base logique pour sa théorie, distinguant les mathématiques des autres disciplines comme la philosophie ou la physique. Il part en fait de cinq axiomes. La structure axiomatique est par ailleurs toujours utilisée de nos jours. De plus, les questions d'axiomatique soulevées par la géométrie sont très intéressantes et ont fait couler beaucoup d'encre jusqu'au 20ème siècle, mais c'est un autre sujet.

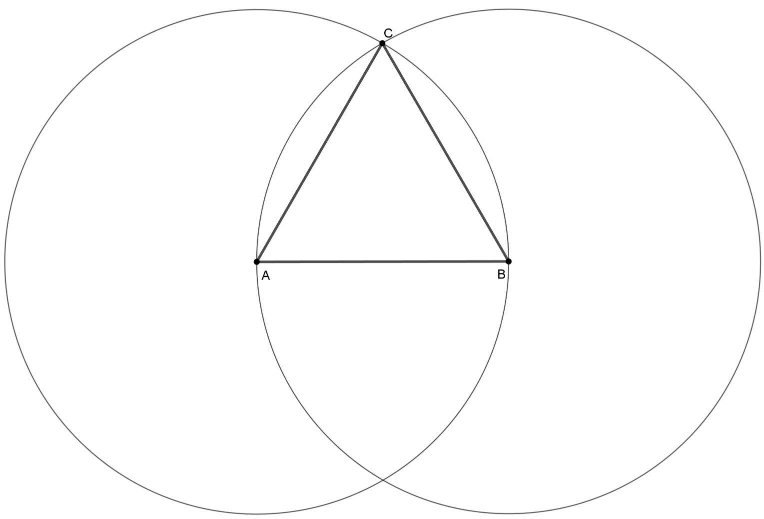
En outre, la géométrie conçue par Euclide dans ses *Éléments* ne se limite pas à une collection de théorèmes isolés ou d'une simple théorie logique. Euclide avait une idée bien précise en tête, à savoir justement la constructibilité à la règle et au compas. Ainsi les postulats d'Euclide peuvent être interprétés comme des postulats de constructibilité. Voici par exemple les trois premiers postulats d'Euclide :

1. Étant donné deux points, on peut tracer un segment passant par ces derniers.

2. On peut étendre tout segment de façon infinie.

3. On peut tracer un cercle étant donné son centre et son rayon.

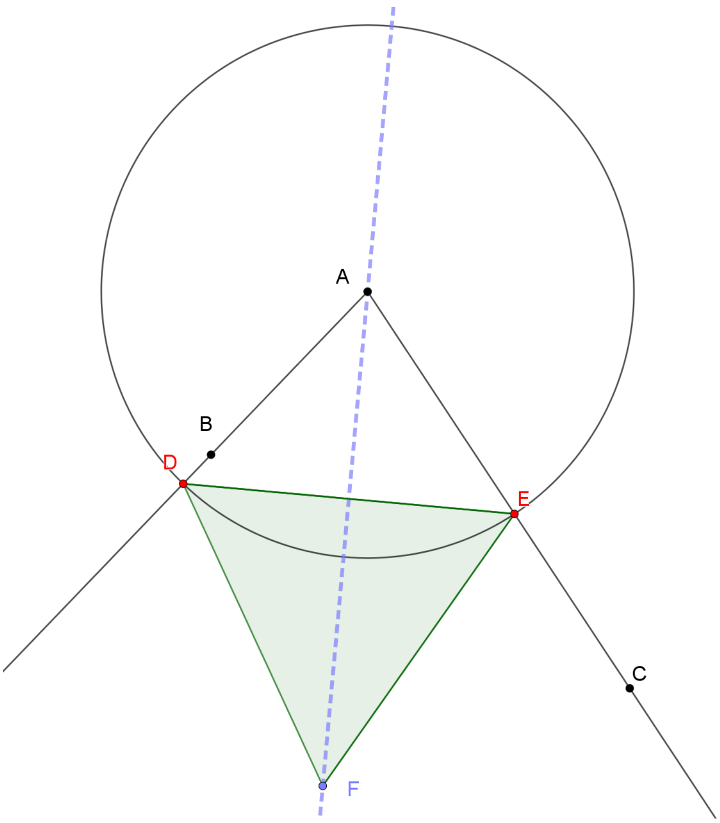
Les deux premiers axiomes indiquent que l'on dispose d'une règle non graduée. Cette règle sert uniquement à relier les points entre eux sans pouvoir mesurer quoi que ce soit. Le troisième axiome quant à lui indique l'utilisation du compas pour reporter des longueurs (après avoir fixé une longueur correspondant à une certaine ouverture du compas). La première proposition du premier livre des *Éléments* est la construction du triangle équilatéral.



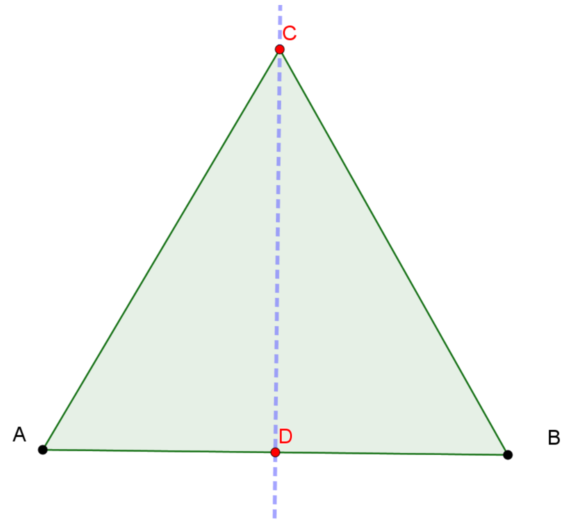
Avec le troisième postulat, il construit le cercle de centre A et de rayon AB. En réutilisant ce postulat, on construit le cercle de centre B et de rayon AB. Ces deux cercles s'intersectent en un point C. À l'aide du premier postulat, il trace les segments [AC] et [BC], et affirme que ABC est un triangle équilatéral.

Rien de génial, allez vous me dire ? Détrompez vous car là encore, Euclide commence par le triangle équilatéral car il a une idée bien précise derrière la tête. En effet, les constructions usuelles et importantes qui vont suivre découlent de la possibilité de construire un tel triangle.

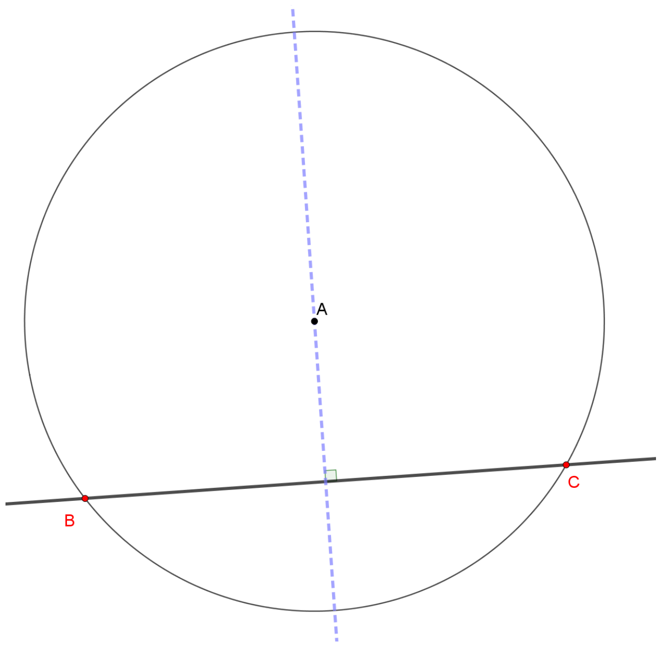
Par exemple, la proposition 9 permet de tracer la bissectrice d'un angle. Par exemple, si nous avons un angle $\angle BAC$, Euclide nous dit de prendre un point arbitraire D sur la demi-droite [AB), et à l'aide de l'axiome 3 correspondant au compas, de trouver le point E sur la demi-droite [AC) tel que $AD = AE$, ce qui correspond à tracer le cercle de centre A et de rayon AD. Ensuite, on trace un triangle équilatéral avec DE pour côté orienté en sens contraire au point A, ce qui est possible justement par la première proposition. Soit F le troisième côté de ce triangle équilatéral. Euclide prétend alors que AF est la bissectrice de l'angle $\angle$ BAC. La démonstration se fait avec les cas d'isométrie des triangles, que réservons sans doute pour une future vidéo.



Ensuite, pour construire la médiatrice d'un segment [AB] dans la proposition 10, Euclide construit un triangle équilatéral ABC dont AB est l'un des côtés, toujours en vertu de la première proposition. Par la proposition 9, que nous venons de voir, il construit la bissectrice de l'angle $\angle$ BCA, qui coupe le segment [AB] en D. La droite (CD) est alors la médiatrice de AB.



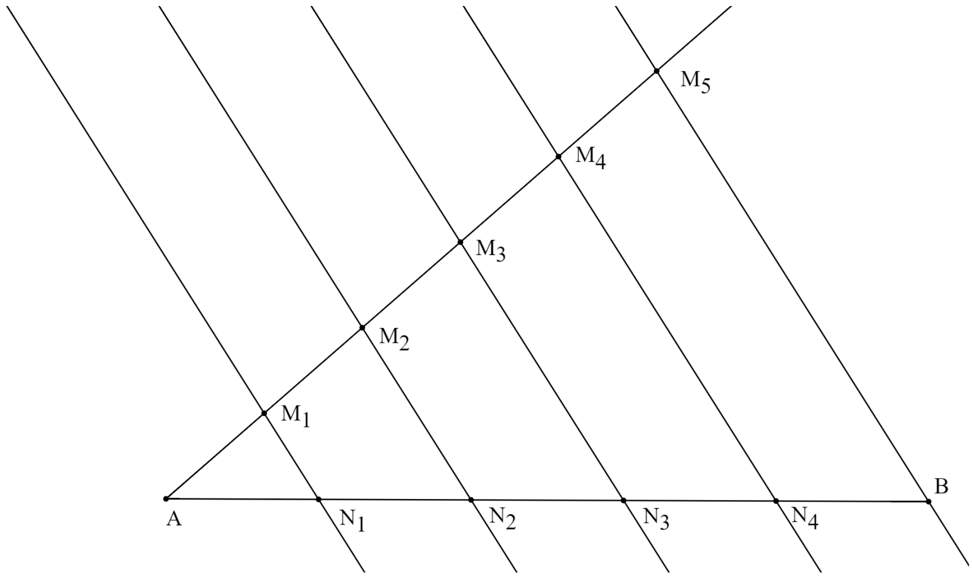
Dans la proposition 12, il adapte cette construction pour construire la perpendiculaire à une droite passant par un point donné. Supposons que nous avons une droite l et un point A . Pour construire la perpendiculaire à l passant par A, on trace un cercle de centre A et de rayon suffisamment grand pour intersecter la droite l en deux points distincts, disons B et C. Alors, la médiatrice du segment [BC] est perpendiculaire à l et passe par A, car la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des deux extrémités de celui-ci.



De cette façon, on peut également construire la parallèle à une droite passant par un point, en traçant deux perpendiculaires, même s'il y a des méthodes plus rapides que le lecteur peut tenter de chercher par lui même. Maintenant que nous pouvons tracer des parallèles, tentons de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. Soit [AB] un segment. Diviser [AB] en cinq parties égales en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas. Plus généralement, diviser [AB] en n parties égales où n est un entier supérieur à 2. Pour cela, nous aurons besoin du théorème... de Thalès !

Car aussi incroyable que cela puisse paraître, le théorème de Thalès est un théorème majeur dont l'utilité dépasse de loin le cadre du simple calcul de longueurs, et représente également un excellent résultat pour la constructibilité.
Nous invitons d'abord le lecteur à tenter de résoudre ce problème par lui même, mais il est loin d'être facile au premier abord ! Voici la résolution :



On prend un point M_1 quelconque hors de la droite (AB). On trace la demi-droite $[AM_1)$. On construit ensuite sur cette demi-droites des points successifs distincts M_2, M_3, M_4 et M_5 tels que $M_5M_4 = M_4M_3 = M_3M_2 = M_2M_1 = M_1A$.

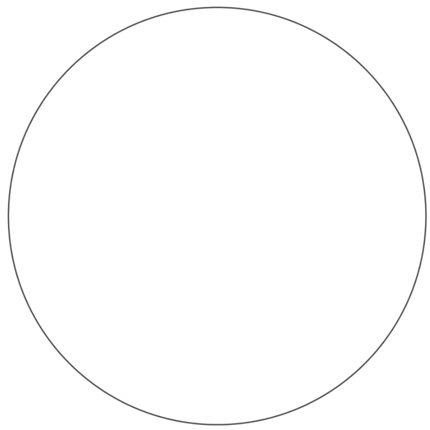
On trace ensuite la droite (M_5B), et puis les parallèles à cette droite passant par les points M_4, M_3, M_2 et M_1. Ces parallèles intersectent [AB] respectivement en des points N_4, N_3, N_2 et N_1, dont nous affirmons qu'ils divisent le segment [AB] en cinq parties égales. On dit ici que les points A, N_1, ..., N_4 sont obtenus par projection parallèle des points A, M_1, ..., M_4. Or, ce que dit le théorème de Thalès, c'est que toute projection parallèle conserve les rapports de longueurs.
Il nous permet en effet de dire que pour tout i entre 1 et 4 :

$$\frac{AM_i}{AM_1} = \frac{AN_i}{AN_1} \Longrightarrow AN_i = i \times AN_1$$

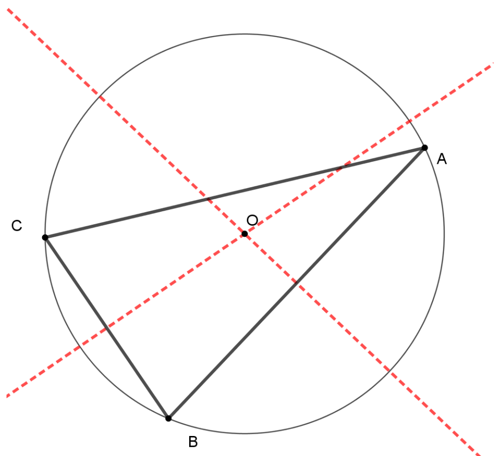
Voilà une des applications les plus impressionnantes de ce théorème de collège !

Puisque nous avons l'occasion de faire des mathématiques, nous en profitons pour vous donner dans la suite 4 problèmes de construction assez amusants qui utilisent la théorie d'Euclide d'une manière assez surprenante, avouons-le !

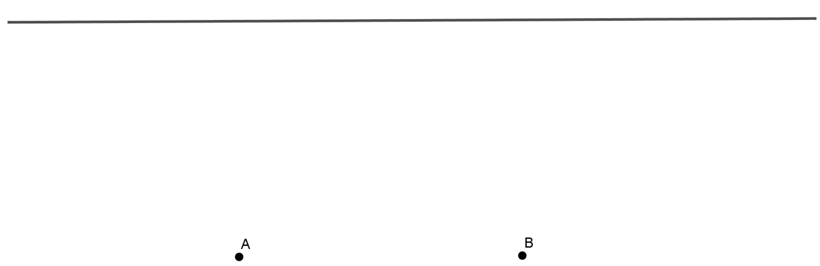
1. L'énoncé du premier problème est le suivant : Soit $\mathscr{C}$ un cercle pour lequel on a effacé le centre (accidentellement). Pouvez-vous le retrouver ? Avant de voir la solution, mettez la vidéo sur pause et essayez d'y réfléchir.



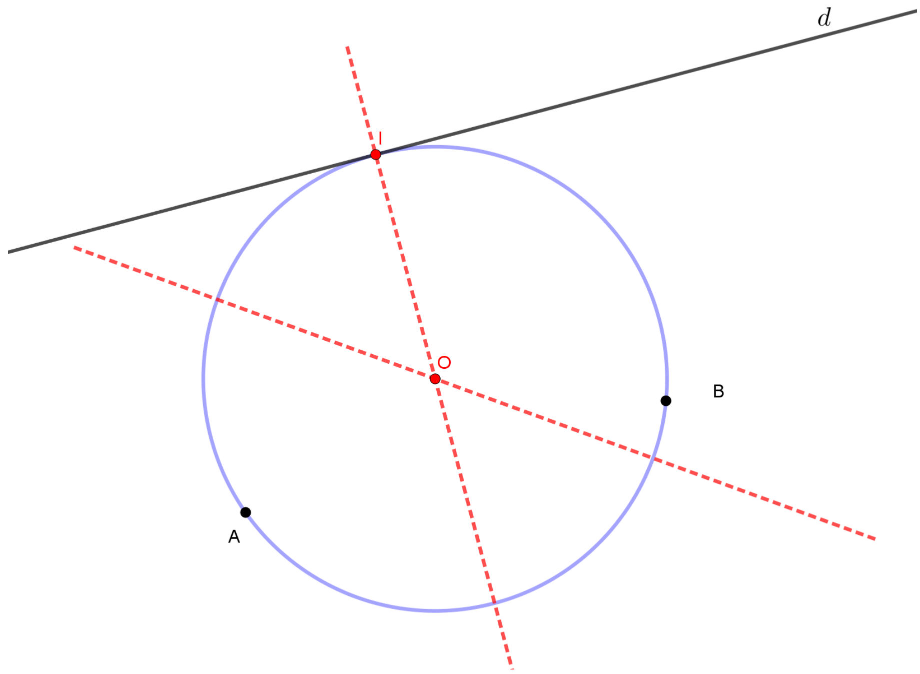
Solution : On sait que les médiatrices d'un triangle ABC quelconque sont concourantes. Leur point d'intersection est équidistant aux trois sommets du triangle et est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Ainsi pour retrouver le centre de notre cercle, il suffit de placer trois points A, B et C sur ce cercle et tracer deux médiatrices du triangle ABC. Leur point d'intersection est le centre recherché.



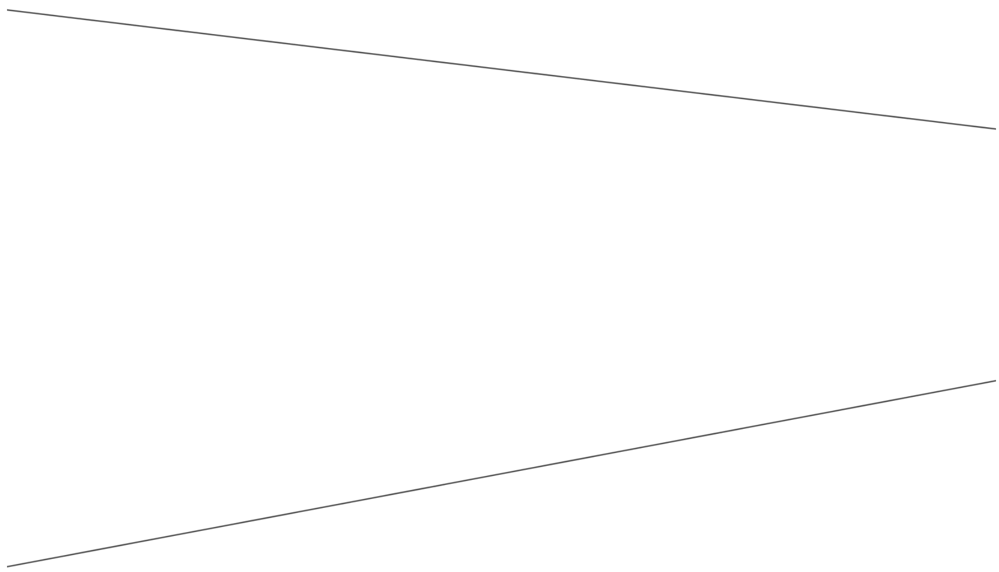
2. Deuxième problème : Pouvez-vous construire un cercle passant par A et B et tangent à une parallèle d à (AB) ?



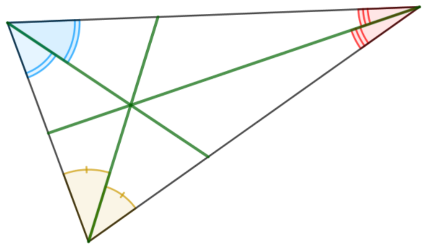
Solution : Analysons ce problème et supposons que l'on arrive effectivement à construire ce cercle. Il suffit alors de trouver son centre O. Or le triangle OAB est isocèle en O, cela signifie que le point O est équidistant à A et B et est ainsi situé sur la médiatrice du segment [AB]. La droite d étant parallèle à (AB) et tangente au cercle, il en résulte que le point d'intersection de la médiatrice de [AB] et de d que l'on note I est situé sur ce cercle (parce qu'il existe un point I sur la droite et sur le cercle tel que (OI) soit perpendiculaire à d). Ainsi, le centre recherché est situé à l'intersection de la médiatrice de [AB] et de la médiatrice de [AI].



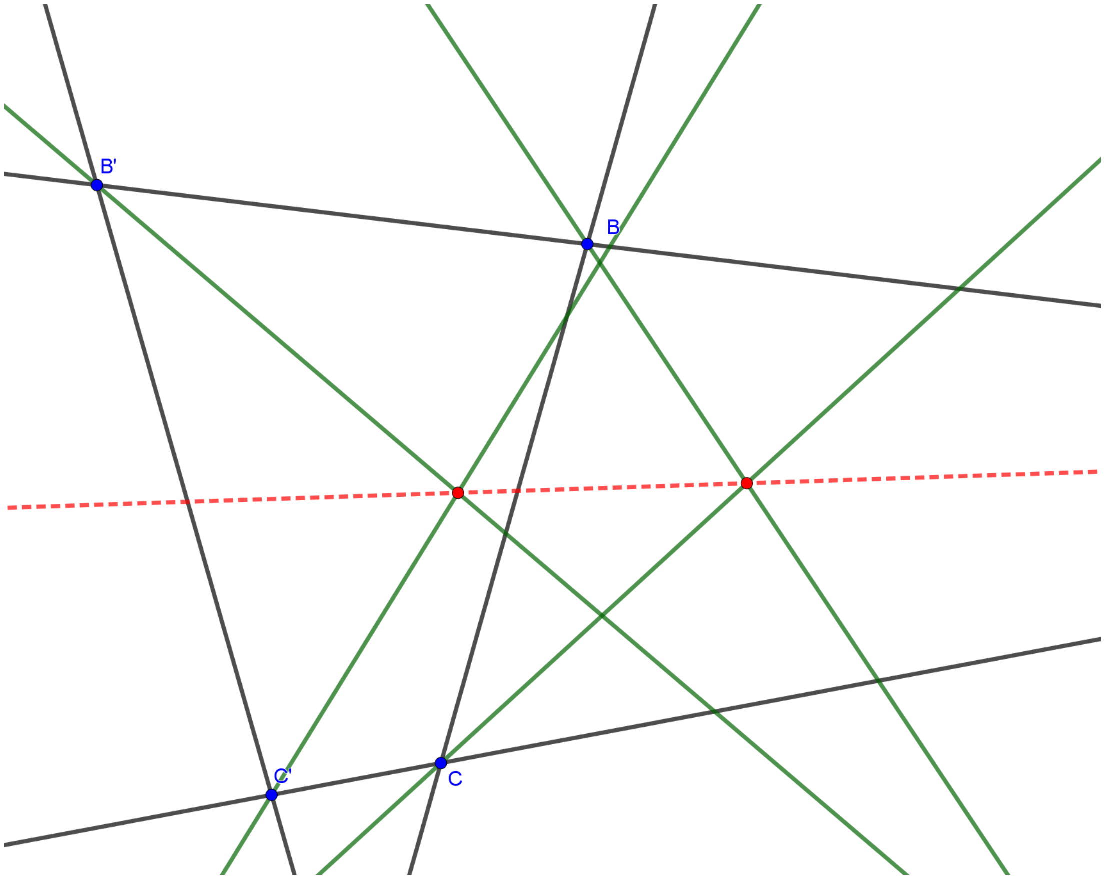
3. Le troisième problème consiste à tracer la bissectrice d'un angle pour lequel on a effacé (là encore accidentellement) le sommet principal ! Pouvez-vous imaginer un procédé qui permet de construire la bissectrice sans connaitre le sommet principal ?



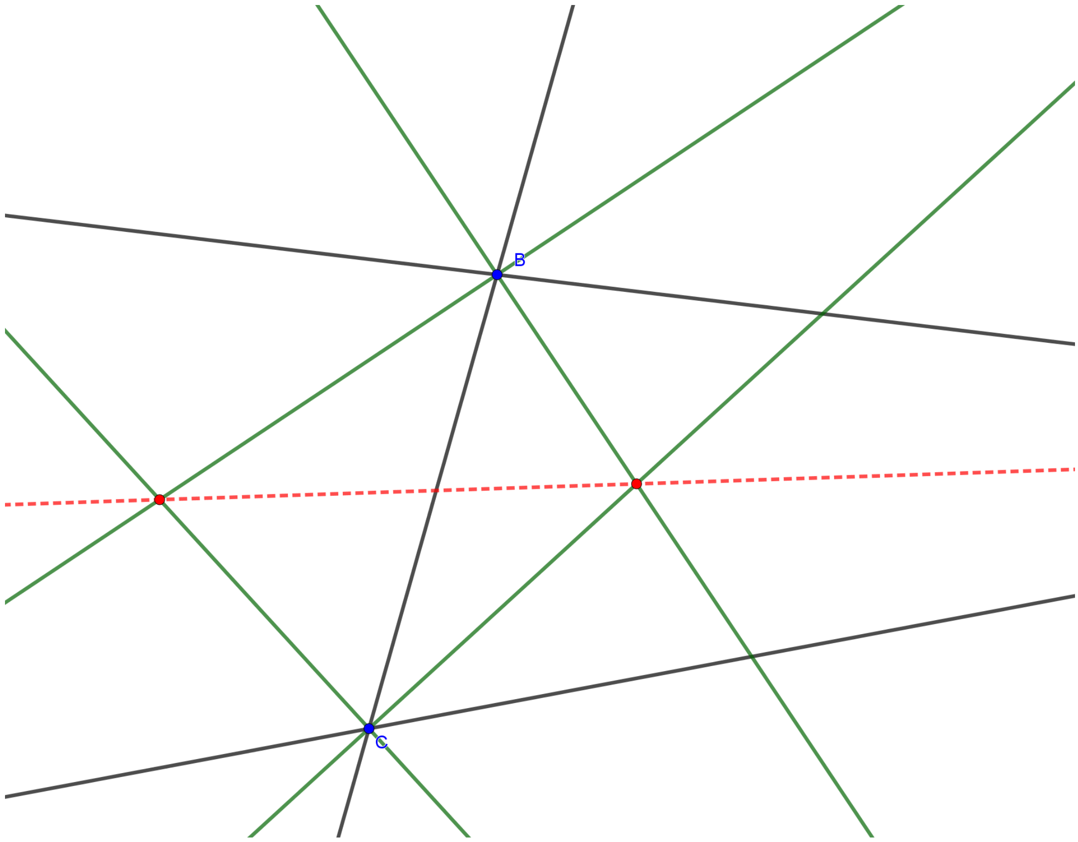
Solution : D'après Euclide encore, on sait que pour tracer une droite, il suffit de localiser deux points dessus. Essayons donc de trouver deux points sur la bissectrice de notre angle. On peut se servir du fait que dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes.



Ce résultat classique sur lequel nous reviendrons, n'est pas sans conséquences. Ainsi, pour placer un premier point sur la bissectrice de ∠ A, il suffit de placer deux points B et C tracer les bissectrices des angles ∠ B et de ∠ C. Pour obtenir un deuxième point sur cette bissectrice, il suffit de dessiner un deuxième triangle AB'C' (fictif car on ne connait pas A). On peut toute fois mieux faire avec un seul triangle ABC. En effet, une propriété méconnue de la géométrie euclidienne (faute d'un enseignement en géométrie ayant quasiment disparu) affirme que la bissectrice intérieure de l'angle ∠ A et les bissectrices extérieures des angles ∠ B et ∠ C sont concourantes. À vous de conclure.

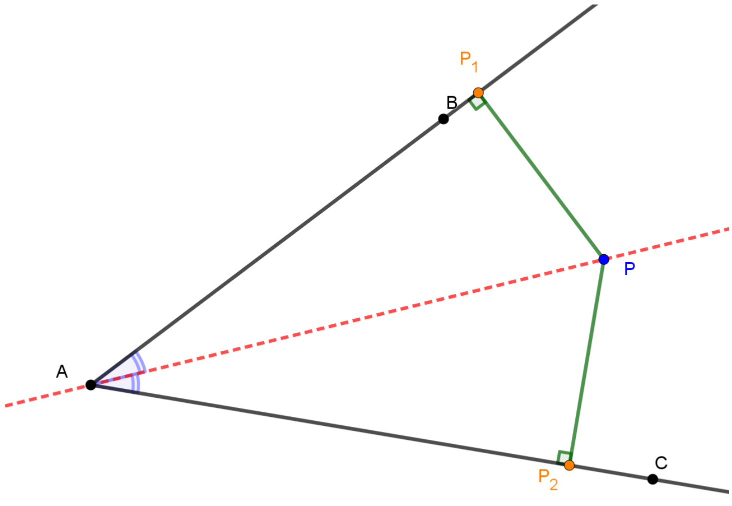


Utilisation des bissectrices intérieures deux fois



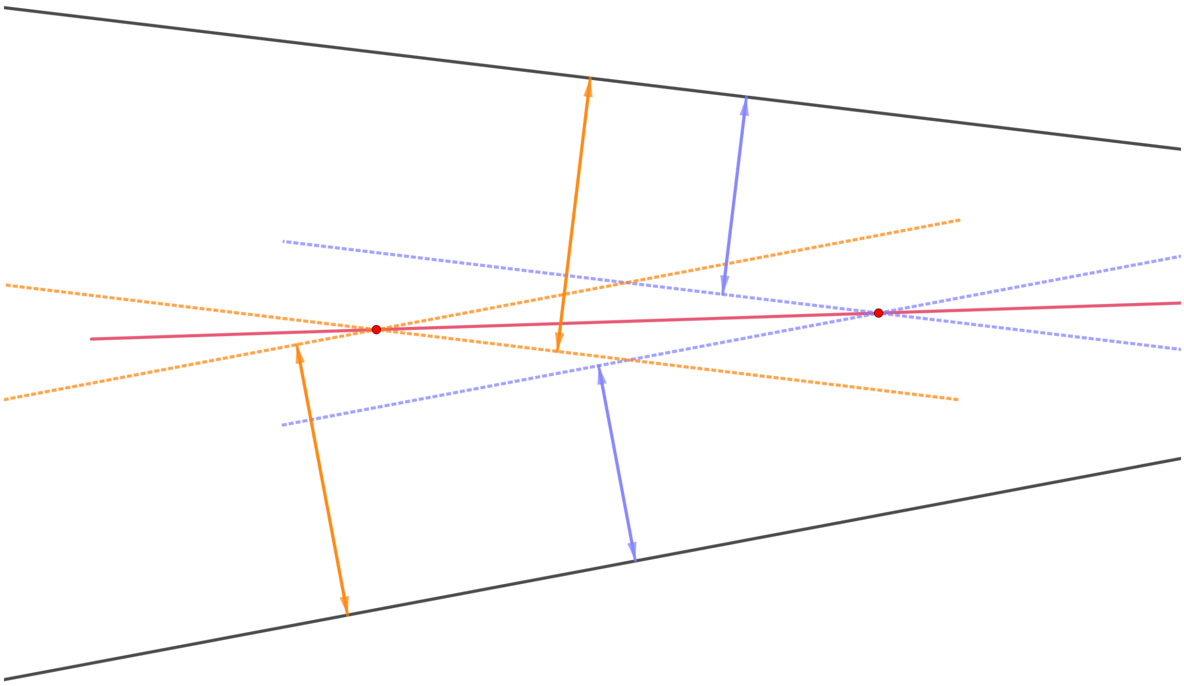
Utilisation des bissectrices intérieures et extérieures

Une autre façon de résoudre ce problème, s'éloignant légèrement des idées d'Euclide, est de remarquer que la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants aux deux côtés de cet angle.

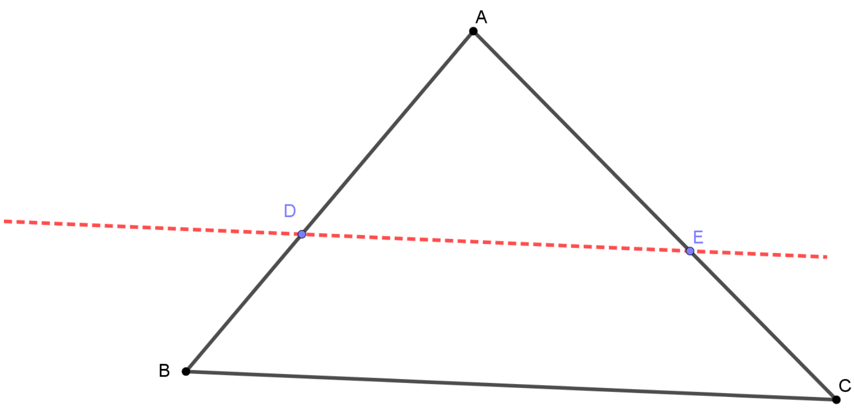


Propriété de la bissectrice d'un angle

Ainsi, il suffit donc de localiser deux points équidistants des deux droites données. Pour trouver un tel point, on se fixe une longueur donnée assez grande, et on trace une droite correspondant à un ensemble de points étant à la même distance de la première droite, et on fait de même pour la deuxième. On fait alors la même opération pour une deuxième longueur, obtenant deux points équidistants des deux droites. Il suffit de tracer la droite passant par les deux points, et le tour est joué.



4. Venons en au dernier problème : Soit ABC un triangle quelconque. Pouvez-vous construire la droite parallèle à (BC) qui coupe [AB] en D et [AC] en E telle que DE = BD + EC ?



Solution : L'idée ici est de supposer qu'on arrive à construire une telle droite (DE). Rappelons que d'après Euclide, il suffit d'un seul point cette fois-ci afin de construire une droite parallèle à une droite donnée. Il suffit alors de trouver un point sur la droite (DE) dépendant des points existants (sauf D et E bien sûr). Si nous avons une telle égalité, on pourrait "rabattre" les longueurs DB et EC sur le segment DE, c'est à dire qu'il existerait un point I sur le segment [DE] vérifiant DI = IE. Il s'agit là d'une idée assez intéressante : Puisqu'il est difficile de raisonner sur une somme de deux longueurs, on essaie raisonner sur une longueur somme de ces deux là.

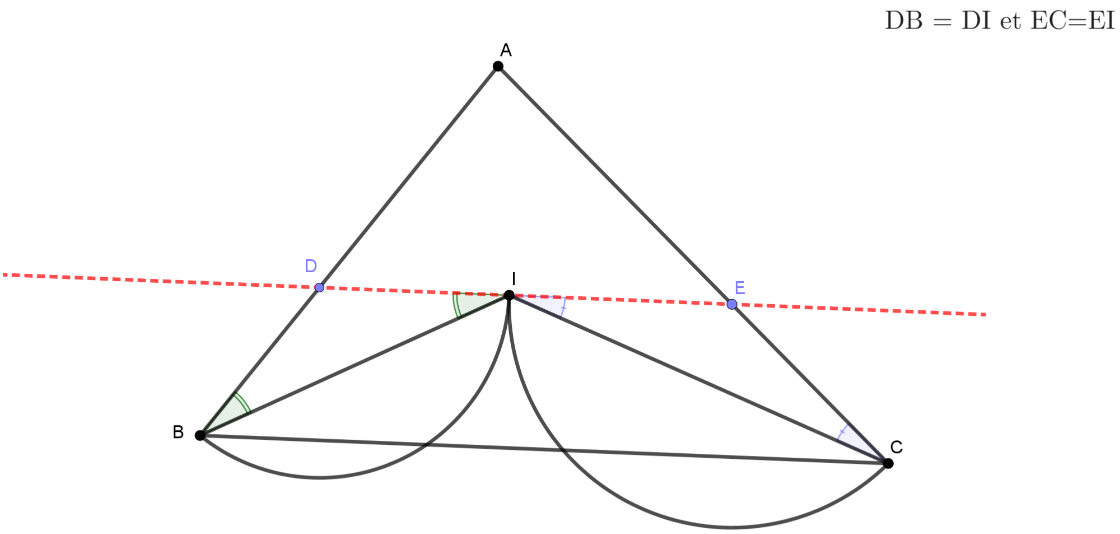
Il en résulte que les triangles DBI et ECI sont respectivement isocèles en D et en E. Il en résulte que leurs angles à la base sont égaux. On a en particulier :

$$2\angle \mathrm{DBI} = \pi - \angle \mathrm{BDI} \text{ et } 2\angle \mathrm{EIC} = \pi - \angle \mathrm{IEC}.$$

Or, par parallélisme des droites (DE) et (BC), on a

$$\pi - \angle \mathrm{BDI} = \angle \mathrm{DBC} \text{ et } \pi - \angle \mathrm{IEC} = \angle \mathrm{ECB}$$

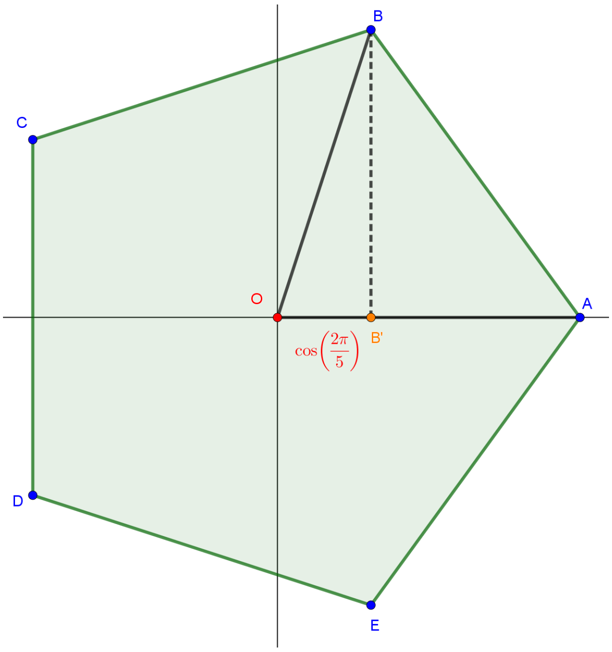
ce qui entraîne $2\angle \mathrm{DBI} = \angle \mathrm{DBC}$ et $2\angle \mathrm{EIC} = \angle \mathrm{ECB}$. Ainsi, le point I est situé sur les bissectrices des angles $\angle$ B et $\angle$ C du triangle ABC. Pour une construction, il suffit donc de tracer ces deux bissectrices, puis la parallèle passant par leur point d'intersection.



Nous avons donc vu que l'esprit des *Éléments* d'Euclide, malgré la formulation d'axiomes, a un caractère assez pragmatique. Cependant, nous pouvons toujours nous demander comment il a pu réussir la prouesse de la construction du pentagone régulier. En fait, il a élaboré toute une théorie sur les longueurs et les aires, et décrire précisément tous les tenants et les aboutissants de ses idées serait impossible dans une seule vidéo. Pour cela, nous allons présenter une résolution un peu plus moderne de ce problème, qui nous conduira à donner de même un autre point de vue sur tous les autres que les Grecs nous ont laissés.

3 Constructibilité et longueurs ... vers l'algèbre

Remarquons que si ABCDE est un pentagone de centre O tel que $\mathrm{OA} = 1$, en traçant le segment [OA] et le projeté orthogonal B' de B sur le segment [AB], le segment OB' aura pour longueur $\cos(2\pi/5)$. Ainsi, si l'on peut construire un pentagone régulier dont la distance des sommets au centre vaut 1, il est possible de construire un segment de longueur $\cos(2\pi/5)$ car l'angle $\angle$ BOA vaut $2\pi/5$. Ce qui nous amène à nous poser la question : Étant donné une longueur de référence (une unité), quelles sont les longueurs constructibles à la règle non graduée et au compas ?

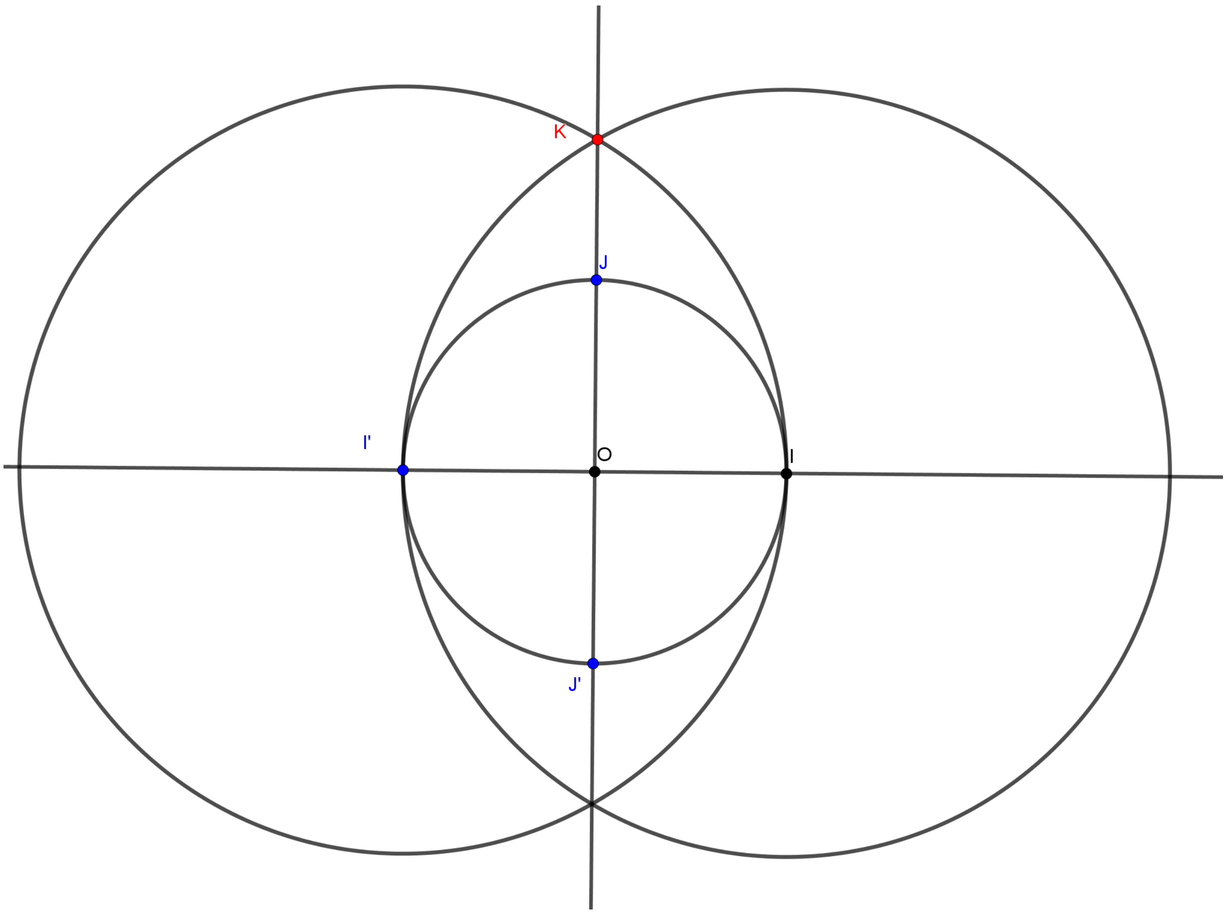


Nous pouvons maintenant nous attaquer aux opérations algébriques et à l'extraction de la racine carrée. Pour se faire, nous avons besoin de préciser ce que l'on entend par *point constructible* et *nombre constructible*. L'idée est alors de partir d'un ensemble $\mathscr{E}$ constitué deux points donnés du plan (ou plus), que l'on nomme ici O et I et de prendre la longueur OI comme mesure unité *i.e* $OI = 1$. Remarquons que nous ne pouvons pas partir d'un seul point d'après les axiomes d'Euclide (on ne peut tracer aucun cercle et aucune droite). Rappelons alors ce que l'on peut faire comme type de construction :

- Tracer une droite passant par deux points de $\mathscr{E}$. Pour l'instant, on ne peut que tracer la droite (OI).
- Tracer un cercle ayant pour centre un point de $\mathscr{E}$ et pour rayon la distance séparant deux points de $\mathscr{E}$.

Que peut-on faire à partir de là ? On peut en effet tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon O. Il coupe la droite (OI) en un deuxième point qu'on appelle I'. On construit alors le triangle équilatéral de base [II'] [2], obtenant ainsi un troisième point K. La droite (OK), perpendiculaire à la droite (OI), coupe le cercle $\mathscr{C}$ en J et J'.

2. Évidemment, Euclide ne justifie pas la raison pour laquelle ces cercles s'intersectent, mais ce problème est le sujet d'une autre discussion ayant posé des tas de questions, et il faudrait d'autres vidéos encore pour en parler.



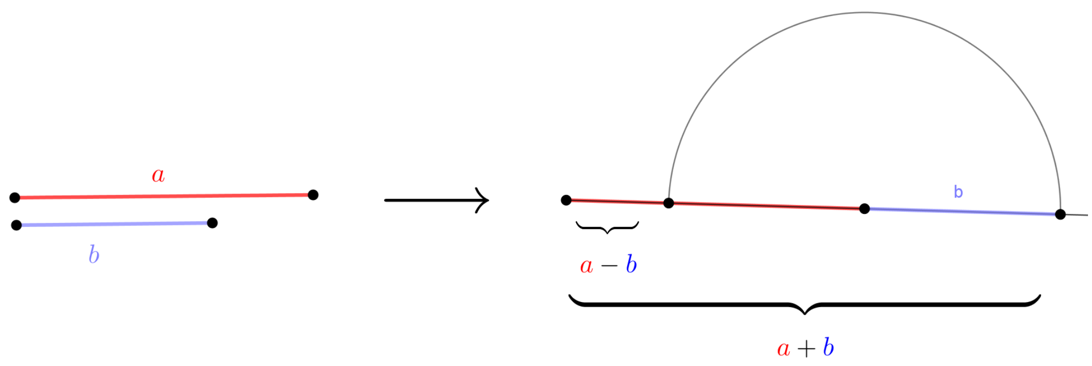
Les points d'intersection des droites et des cercles ainsi tracés fournissent de nouveaux points, qui pourront à leur tour être utilisés comme les points de l'ensemble du départ $\mathscr{E}$ pour construire de nouvelles droites et de nouveaux cercles.
Notons qu'on a construit au passage un repère orthonormé que l'on notera (O, I, J). On retrouve ici l'idée centrale de Descartes et de Fermat qui a permis de transformer les problèmes géométriques en problèmes algébriques, et qui nous sera indispensable pour la suite. Nous posons donc la définition suivante :

Définition

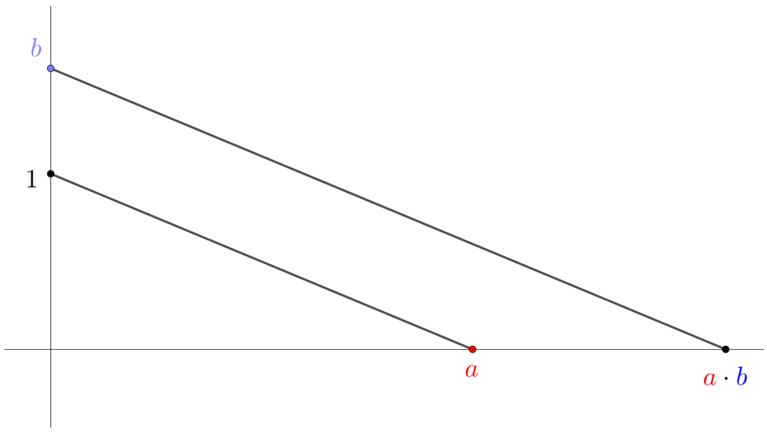
Un nombre réel x est dit constructible s'il est l'une des coordonnées dans le repère (O, I, J) d'un point constructible.

Remarquons alors qu'un nombre x est constructible si et seulement si le point de l'axe (OI) d'abscisse x est constructible. Ceci découle du fait que le projecté orthogonal est un point constructible, nous nous n'attarderons pas sur ce point (il y a une légère subtilité dans le sens inverse) . On peut alors construire les cinq opérations suivantes : Si a et b sont deux réels construits alors

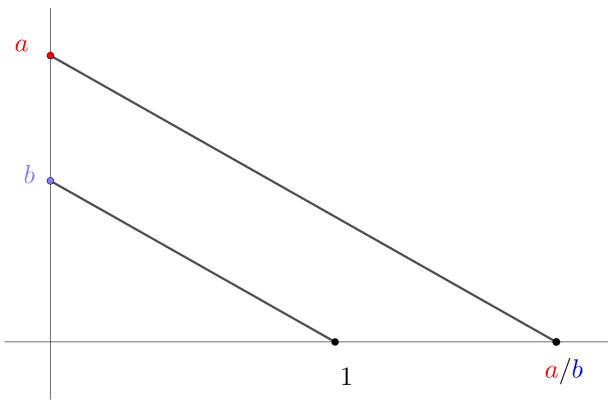
- *Les réels $a+b$ et $a-b$ sont constructibles* : Sans perte de généralité, on peut supposer que $a \geq b$, il suffit alors de reporter la longueur b à l'extremité du segment de longueur a comme le montre la figure ci-dessous. On obtient alors à la fois $a+b$ et $a-b$.



- *Le réel ab est constructible* : Là encore on peut supposer sans perte de généralité que $b \geq 1$.On commence alors par construire un repère orthonormé et placer le nombre a sur l'axe des abscisses et les nombres 1 et b sur l'axe des ordonnées. On trace ensuite le segment reliant 1 et a. La parallèle à ce segment passant par b coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse ab. Cette dernière affirmation est une conséquence directe du théorème de Thalès. On vous conseille d'écrire la relation de Thalès dans cette configuration pour vous en convaincre.



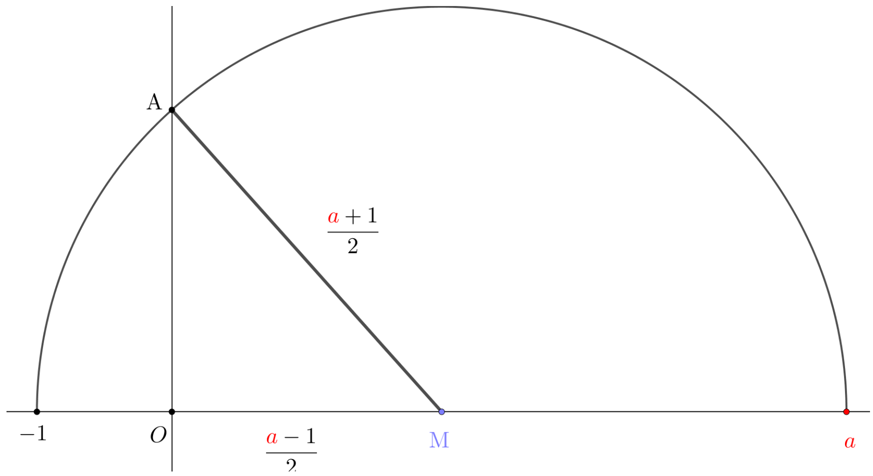
- *Le réel $\frac{a}{b}$ est constructible* : Le procédé pour construire la fraction $\frac{a}{b}$ est quasiment le même. Là encore le théorème de Thalès permet de conclure.



- *Le réel $\sqrt{a}$ est constructible* : Dans un repère orthonormé, on commence par placer les nombres a et -1. On trace ensuite le demi-cercle de diamètre $a+1$ (ceci est possible car on sait construire le milieu M du segment). L'intersection de ce dernier avec l'axe des ordonnées donne un point A tel que $\mathrm{OA} = \sqrt{a}$. En effet, le triangle OAM étant rectangle en O, une application du théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OM}^2 &= \mathrm{AM}^2 \\ \mathrm{OA}^2 &= \mathrm{AM}^2 - \mathrm{OM}^2 \\ \mathrm{OA}^2 &= \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a \end{aligned}$$

Cette dernière égalité entraine que $\mathrm{OA} = \sqrt{a}$, d'où le résultat.



On voit d'emblée que $\mathbb{Z}$ est constructible en reportant la mesure unité tout au long de l'axe des abscisses. Puisque les divisions sont des opérations constructibles, il en est de même de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Cependant, il est naturel de se demander s'il y a d'autres opérations que nos outils permettent d'effectuer. C'est là que l'idée de l'introduction d'un repère orthonormé va grandement nous aider, c'est là que le génie cartésien intervient. En effet, on peut démontrer que réciproquement, ce sont les seules opérations constructibles à la règle non graduée. Pour jouer avec les droites et les cercles dans un repère orthonormé, il est nécessaire de servir de leurs équations. Ainsi aurons nous besoin du lemme suivant, que nous admettrons et sur lequel nous reviendrons sans doute une autre fois :

Lemme

1. Si $\mathscr{D}$ est une droite du plan passant par les points distincts $A(a_1, b_1)$ et $B(a_2, b_2)$ alors son équation s'écrit

$$(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y = a_2b_1 - b_2a_1$$

2. Soient $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ et $C(a_3, b_3)$ trois points du plan. Le cercle de centre A et de rayon BC a pour équation

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (b_3 - b_2)^2 + (a_3 - a_2)^2.$$

Remarquons alors que si $\mathscr{M}(x,y)$ est un point constructible alors nous sommes dans l'un des cas suivants :

1. $\mathscr{M}$ est le point d'intersection de deux droites constructibles. Dans ce cas, x et y sont solutions d'un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

   où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et γ_2 sont des nombres constructibles (d'après le lemme précédent). La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} x = \dfrac{\gamma_1\beta_2 - \beta_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \\ y = \dfrac{\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \end{cases}$$

   Remarquons au passage que le nombre $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ est non nul car les deux droites n'ont pas la même pente *i.e* ne sont pas parallèles. D'où la validité des formules. On voit alors que x et y dont deux nombres constructibles car obtenus en utilisant les quatre premières opérations constructibles.

2. $\mathscr{M}$ est le point d'intersection d'une droite et d'un cercle constructibles. Dans ce cas, x et y sont solutions d'un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 = \gamma_2 \end{cases}$$

   où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et $\gamma_2 > 0$ sont des nombres constructibles. Comme vous pouvez vous en doutez, la résolution de ce système se fait avec les nombres précédents en utilisant les cinq opérations. On obtient en effet après substitution une équation quadratique. Le nombre de points d'intersection du cercle et de la droite dépend alors de son discriminant Δ. Nous laissons le spectateur s'en convaincre.

3. Le dernier cas de figure est l'intersection de deux cercles constructibles. Cette fois, les coordonnées x et y des points d'intersections (s'ils existent) vérifient :

$$\begin{cases} (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 = \gamma_1 \\ (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 = \gamma_2 \end{cases}$$

   où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ sont des nombres constructibles. En soustrayant les deux équations, on obtient :

$$\begin{cases} 2(\alpha_2-\alpha_1)x + 2(\beta_2-\beta_1)y + (\alpha_1^2+\beta_1^2) - (\alpha_2^2+\beta_2^2) = \gamma_1 - \gamma_2 \\ (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 = \gamma_2 \end{cases}$$

La première équation est une équation de droite. Nous sommes ainsi réduits au cas précédent, qui n'utilise comme nous avons pu le voir que les opérations allouées. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème

Étant donné deux points O et I, tels que l'on fixe la longueur OI comme unité (OI $=$ 1), un point P de coordonnées (α, β) est constructible à la règle non graduée et au compas si et seulement si ses coordonnées sont des nombres rationnels ou peuvent être obtenus des nombres rationnels par une succession finie d'opérations $+, -, \cdot, \div$ et $a > 0 \mapsto \sqrt{a}$.

Maintenant que le pont algébrico-géométrique est établi, tentons de traduire les problèmes laissés par les grecs en termes algébriques.

4 Retour sur les problèmes des Grecs

4.1 Les problèmes impossibles

1. *Quadrature du cercle* : Rappelons que le problème de la quadrature du cercle consiste à construire à la règle et au compas un carré qui la même aire qu'un cercle donné. Ce qui revient donc à construire un carré d'aire égale à πr^2 ou encore à construire un segment de côté $\sqrt{\pi} r$, ce qui est équivalent à la construction de $\sqrt{\pi}$ (car r est donné). Remarquons alors que si on arrive à construire le nombre $\sqrt{\pi}$ alors d'après ce qui précède, on pourra en déduire facilement une construction du nombre $\pi = (\sqrt{\pi})^2$. La question se ramène alors à se demander si l'on peut écrire π comme une combinaison de rationnels et de racines (emboitées) ou de manière équivalente à se demander si π est solution d'une équation algébrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Wantzel a établi cette équivalence sans réussir à démontrer le résultat. Lindemann a conclu en démontrant que π est un nombre transcendant.

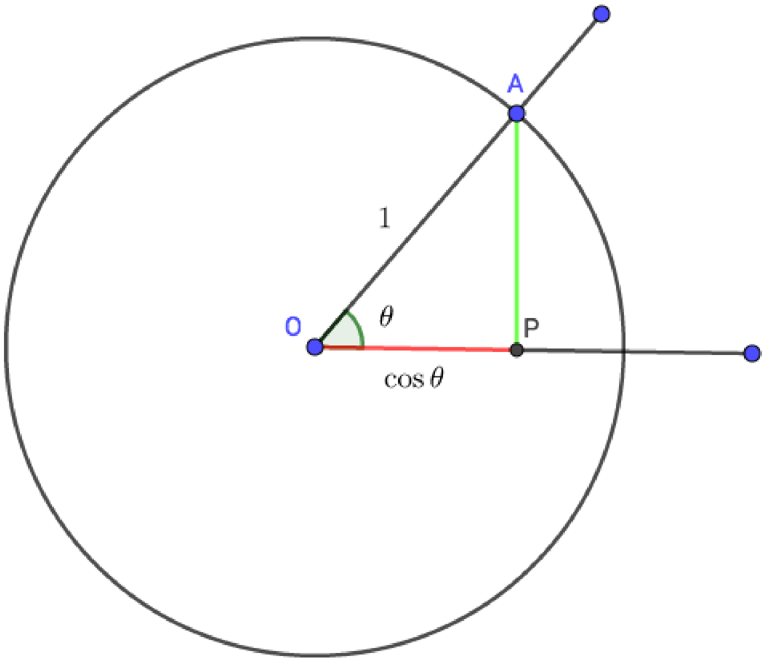
2. *La duplication du cube* : Le problème de la duplication du cube est équivalent à la construction de l'arête d'un cube ayant le double du volume d'un cube donné. Ce problème est du coup équivalent à la construction du nombre $\sqrt[3]{2}a$, où a désigne le côté du cube initial. Ceci revient donc à construire le nombre $\sqrt[3]{2}$. Peut-on alors écrire $\sqrt[3]{2}$ comme combinaison de rationnels et de racines carrées emboitées ? Ceci revient aussi à se demander si la racine réelle de l'équation $x^3 = 2$ s'écrit sous cette forme. Wantzel a établi un théorème qui lui permet de conclure relativement facilement *modulo* la connaissance de ce théorème : la conclusion est qu'il est impossible de construire un segment dont la longueur vaut exactement $\sqrt[3]{2}$. Notons cependant que l'on peut toujours construire des segments de longueurs arbitrairement proches de $\sqrt[3]{2}$ par des approximations rationnelles, mais aucun n'aura exactement cette longueur. Anecdote supplémentaire : on raconte que le mathématicien Edmund Landau (1877-1938) a su démontrer l'impossibilité de la duplication du cube quasiment à la main quand il était étudiant [3].

3. Pour ceux qui ont un peu de bagage en théorie des corps, la preuve de Landau s'appuie sur les arguments suivants :
1) $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel
2) Il existe donc une tour d'extensions quadratiques

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$$

où $n \geq 1$, tel que $\sqrt[3]{2} \in K_n \backslash K_{n-1}$. Ainsi, $\sqrt[3]{2}$ s'écrit $a + b\sqrt{c}$, $a, b, c \in K_{n-1}$, b et c non nuls et $\sqrt{c} \notin K_{n-1}$.

3. *La trisection de l'angle* : La construction d'un angle θ est équivalente à la construction du nombre $\cos\theta$.



En effet, comme le montre bien la figure ci-dessus, si l'angle θ est constructible alors le point A l'est aussi. Ainsi par projection orthogonale, P est lui aussi constructible. On en déduit alors que le nombre $\cos\theta$ est constructible. Réciproquement, si le nombre $\cos\theta$ est constructible, alors la perpendiculaire à (OP) passant par P coupe le cercle unité au point A. L'angle ainsi obtenu vaut θ.

Par conséquent, la trisection d'un angle revient à construire $\cos\theta$ quand $\cos 3\theta$ est donné. Or on peut démontrer relativement facilement que [4]

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Le problème de la trisection de l'angle est donc équivalent à la résolution de l'équation

$$4x^3 - 3x = \cos 3\theta.$$

Si on arrive à démontrer que l'une des solutions s'écrit comme combinaison de nombres rationnels et de racines carrées emboitées alors c'est gagné ! Trop optimiste pour le

3) En élevant $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{c}$ au cube, on arrive à la conclusion que $\sqrt[3]{2} = a - b\sqrt{c}$, d'où $\sqrt[3]{2} \in K_{n-1}$, contradictoire avec l'hypothèse de minimalité de n.

4. La formule $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ implique en prenant $a = b$ que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$. Ainsi en prenant $b = 2a$ on obtient

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos a\cos 2a - \sin a\sin 2a\\ &= \cos a(2\cos^2 a - 1) - 2\sin^2 a\cos a \quad \text{car } \sin 2a = 2\sin a\cos a\\ &= \cos a(2\cos^2 a - 1 - 2 + 2\cos^2 a) \quad \text{car } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a\end{aligned}$$

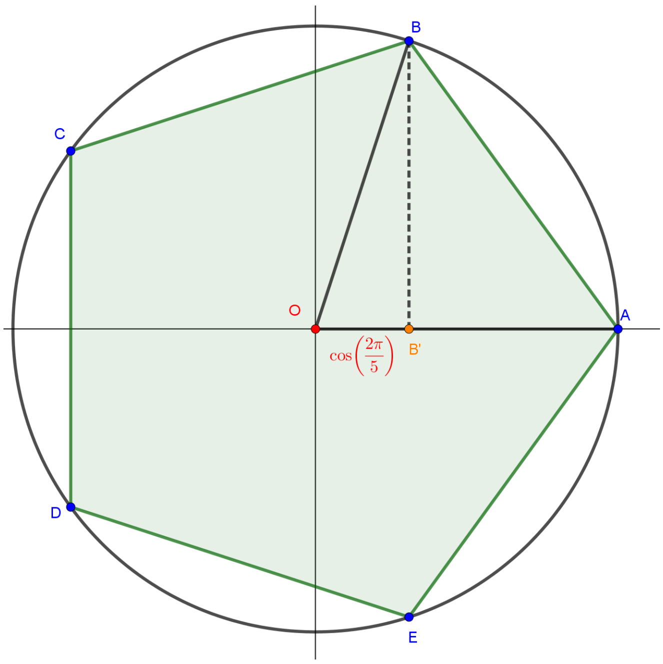
coup car on peut démontrer que l'angle constructible $\pi/3$ (car $\cos(\pi/3) = 1/2$) n'est pas trisectable. On peut se douter que la trisection est impossible puisque nos nombres constructibles vérifient plutôt des équations de degré $\neq 3$ de façon intuitive.

Par exemple, les nombres constructibles $x_1 = \sqrt{17}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $x_3 = 8 + \sqrt{3+\sqrt{31+\sqrt{2}}}$ sont solutions des équations $x^2 - 17 = 0$, $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ et
$x^8 - 64x^7 + 1780x^6 - 28096x^5 + 275192x^4 - 1711872x^3 + 6599944x^2 - 14405760x + 13616098 = 0$
dont les degrés sont des puissances de 2. Même remarque pour le problème de la duplication du cube. Cela revient essentiellement à montrer que les polynômes $x^3 - 2$ et $4x^3 - 3x - 1/2$ n'admettent pas de solutions dans $\mathbb{Q}$ mais ceci est une autre histoire qu'on réservera probablement à une autre vidéo.

4. *Cyclotomie* : On peut voir le problème de la division du cercle comme une possible généralisation du problème de la trisection de l'angle. En effet, ce problème est équivalent à la construction du point $(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n})$. Pour ceux qui connaissent les nombres complexes, si l'on pose $z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, la division du cercle est équivalente à la résolution de l'équation $z^n = 1$. Or
$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1),$$
$z = 1$ étant une solution triviale, on s'intéresse alors aux solutions de l'équation
$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$$

4.2 Le pentagone régulier...

Dans la suite, nous nous proposons de trouver une construction du pentagone régulier en utilisant la puissance de l'outil algébrique. Fasten your seat-belts, it's gonna be a bumpy ride...
Comme on a vu dans les quatre problèmes de construction, il est utile d'analyser le problème avant d'en faire une synthèse et conclure. Supposons en effet que l'on arrive à construire le pentagone régulier ABCDE inscrit dans le cercle unité comme le montre la figure ci-dessous.



Le point A est de coordonnées $(1,0)$, il suffit alors de construire le point B afin d'obtenir tout le pentagone (car il suffit alors de reporter la longueur AB tout au long du cercle). La construction du point B est équivalente à la construction de son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, à savoir le point B' $(\cos\frac{2\pi}{5},0)$ (qui s'avère être le projeté orthogonal du point E sur l'axe des abscisses). Notre objectif est alors d'essayer d'écrire le nombre $\cos 2\pi/5$ en fonction de nombres rationnels et de racines carrées. Le résultat intermédiaire suivant est la clef de notre problème :

Lemme

Le vecteur $\overrightarrow{V}$ défini par

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

est le vecteur nul.

En effet, la symétrie axiale d'axe (OA) envoie A sur A, B sur E, C sur D. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{V}$ est invariant par la symétrie d'axe (OA). On en déduit que $\overrightarrow{V}$ est portée par la droite (OA). On montre de même que le vecteur $\overrightarrow{V}$ est invariant par la symétrie d'axe (OB). Il s'en suit que $\overrightarrow{V}$ est portée aussi par la droite (OB). Le seul vecteur ayant cette propriété est le vecteur nul, car un vecteur non nul ne peut pas avoir deux directions distinctes.
Notons que cette démonstration utilise le concept fondamental et plutôt moderne de **transformation**, qui est bien éloigné des idées d'Euclide, mais dont nous avons ici un aperçu de la puissance : nous avons en effet utilisé des transformations conservant le pentagone régulier. Il faudrait plusieurs vidéos pour décrire leurs utilités et leurs vertus si peu connues.

Ce résultat sera d'une grande utilité pour nous. En effet, les abscisses respectives des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont $1, \cos 2\pi/5, \cos 4\pi/5, \cos 4\pi/5$ et $\cos 2\pi/5$ (car par exemple B et E ont même cosinus). En écrivant que l'abscisse de $\overrightarrow{V}$ est nulle on obtient la relation :

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0. \tag{1}$$

Par ailleurs, on sait par la formule d'addition des cosinus que

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$

en particulier on obtient

$$\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1.$$

Si on pose $x = \cos 2\pi/5$, l'équation (1) devient

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Le discriminant Δ de cette équation vaut 20. Ainsi, après simplification, la racine positive de cette équation est

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Bingo ! Le nombre $\cos 2\pi/5$ est constructible à la règle non graduée et au compas. Son expression algébrique va nous permettre de trouver une construction effective de ce nombre.

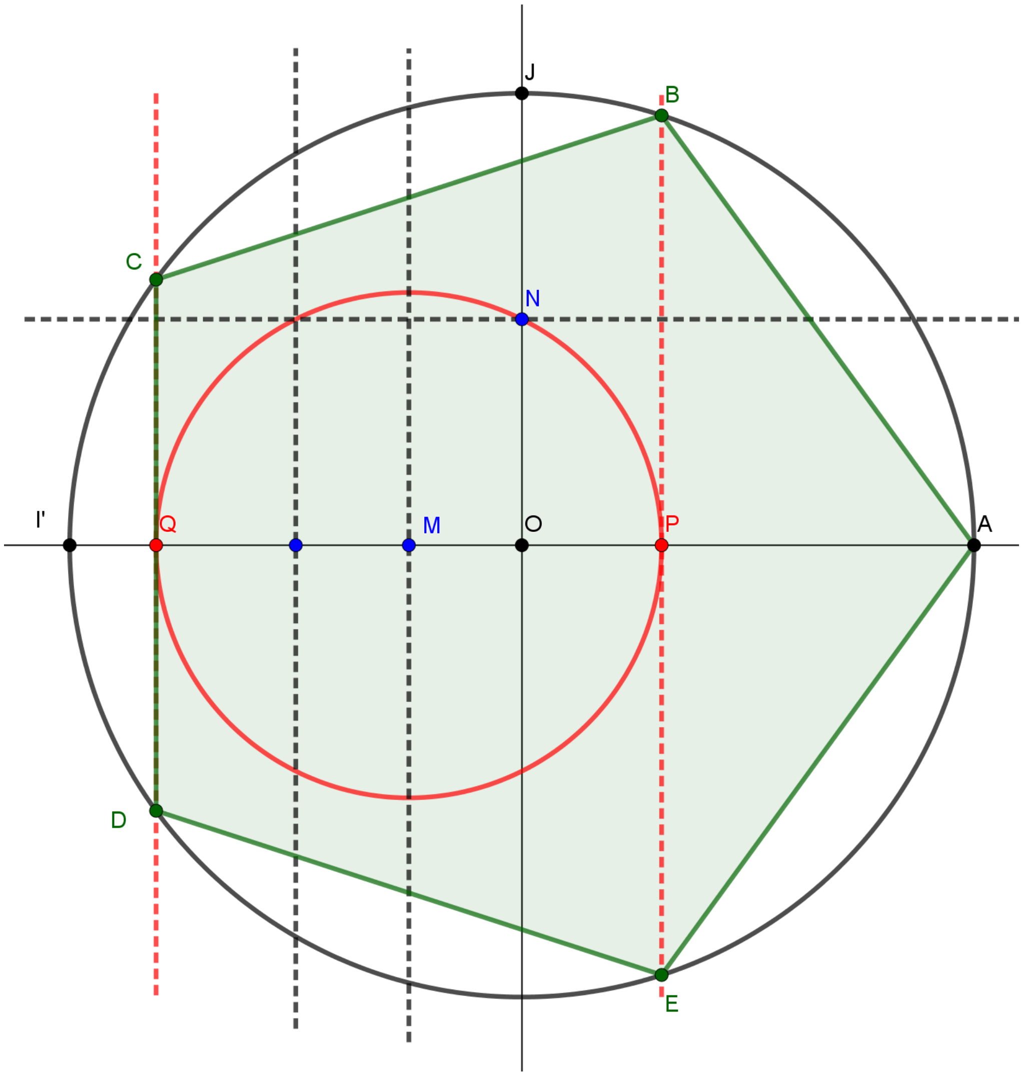
On peut appliquer directement les méthodes de construction vues précédemment en construisant d'abord $\sqrt{5}-1$ et en divisant cette longueur par 4. Il existe toutefois une autre méthode : Il s'agit de commencer par la construction du nombre $\sqrt{5}/4$. En effet, le théorème de Pythagore permet de construire le nombre $\sqrt{5}$ assez facilement en prenant un triangle rectangle de côtés 1 et 2 ! Ainsi pour obtenir $\sqrt{5}/4$, on divise l'équation de Pythagore par 16 (car $4^2 = 16$), ce qui nous suggère de prendre le triangle de côtés $1/4$ et $2/4 = 1/2$. La soustraction de $-1/4$ par la suite donne alors la construction suivante :

1. Construire le point $\mathscr{M}$ de coordonnées $(-1/4, 0)$ (en construisant deux fois la médiatrice).

2. Construire le point $\mathscr{N}$ de coordonnées $(0, 1/2)$ (en construisant la médiatrice sur l'axe des ordonnées)

3. Construire le cercle de centre $\mathscr{M}$ et de rayon $\mathscr{M}\mathscr{N}$. Ce cercle intersecte l'axe des abscisses aux points P et Q d'abscisses respectives $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

4. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par P coupe le cercle en B et en E. Par ailleurs la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par Q coupe le cercle en C et D. Voilà voilà ! ! ! Incroyable n'est ce pas ? ?

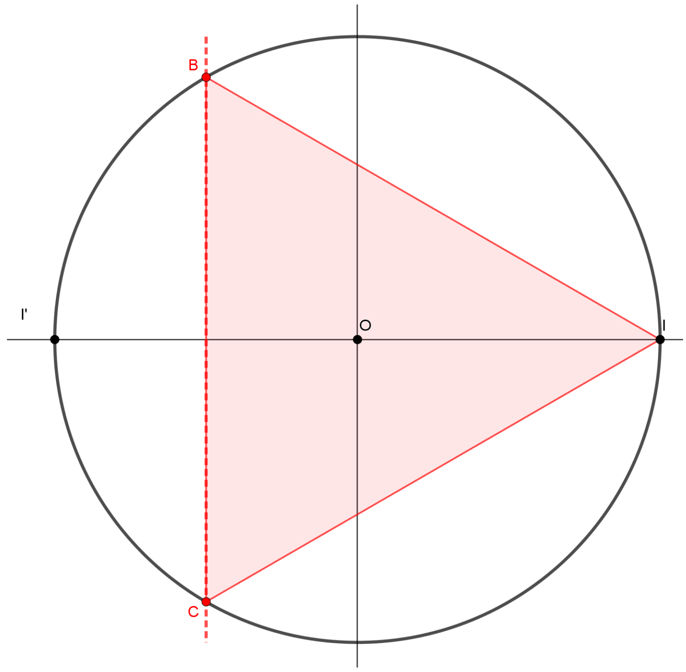


On dispose à présent d'une théorie assez puissante pour pouvoir répondre à nos questions (mais pas toutes). Pouvez-vous l'appliquer pour construire :

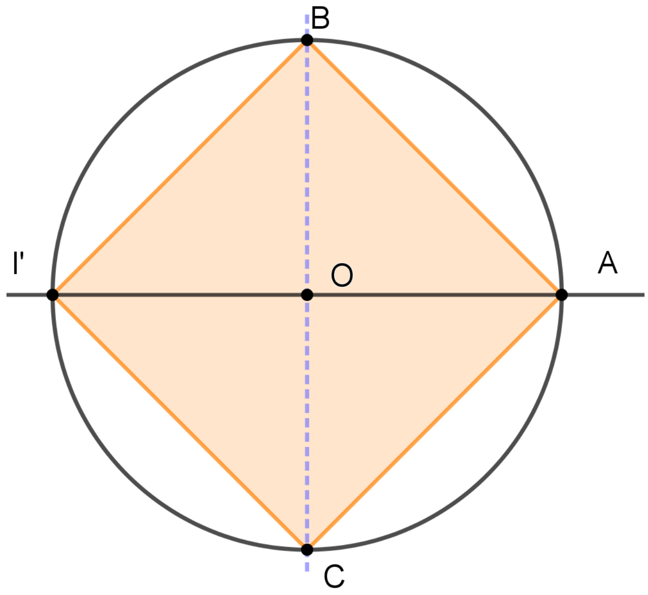
1. Un triangle équilatéral inscrit à un cercle donné.
2. Un carré inscrit à un cercle donné.
3. Un hexagone régulier inscrit à un cercle donné.

Solution :

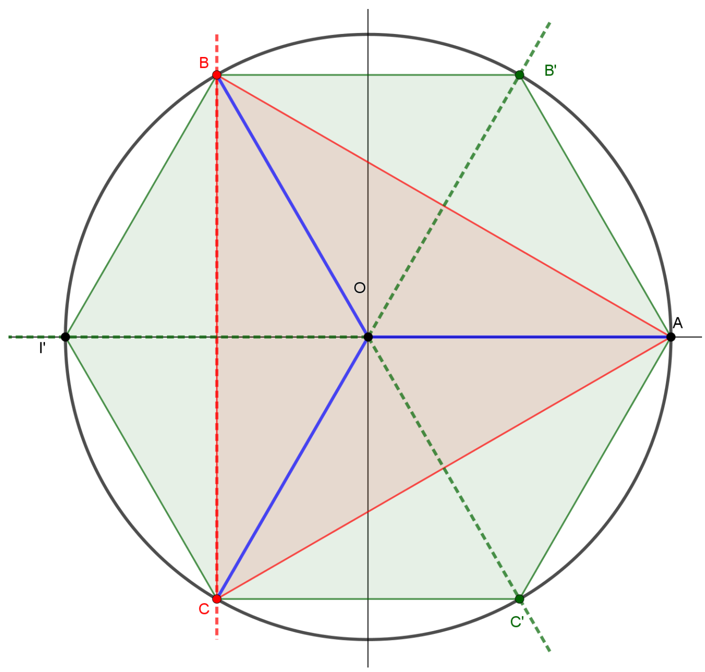
1. Nous avons vu que pour tracer un triangle équilatéral, il suffit de construire le nombre $\cos\frac{2\pi}{3}$. Or coup de chance
$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$
Il suffit alors de tracer la médiatrice du segment [OI'] comme le montre la figure ci-dessous.



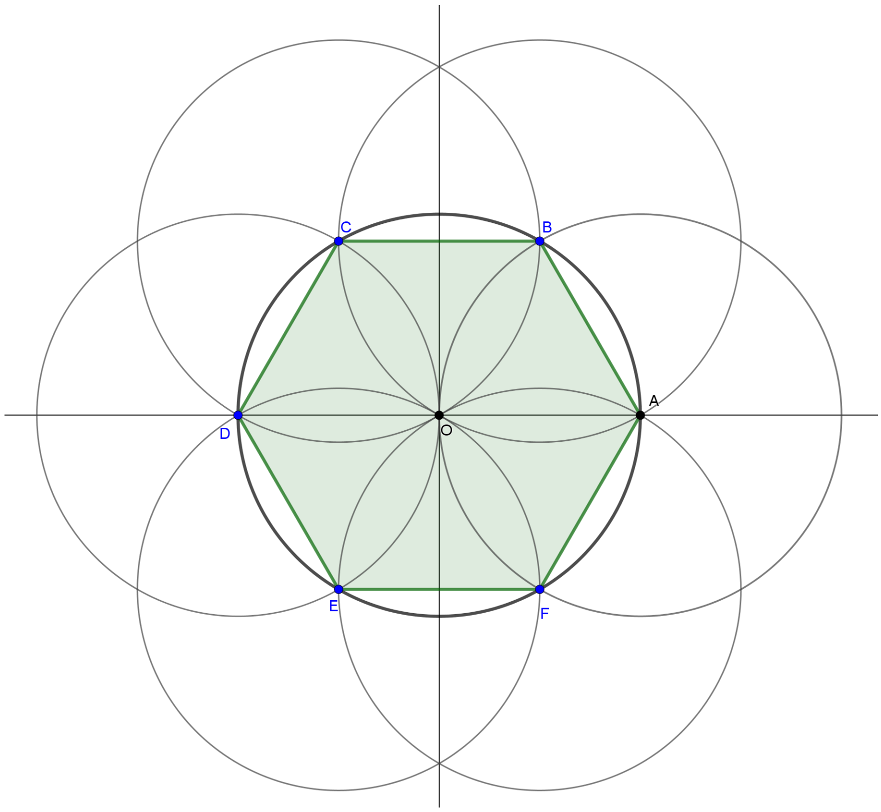
2. On fait la même chose pour le carré. Tout repose sur ce simple calcul
$$\cos\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$
La construction est alors toute évidente. Il suffit de tracer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par l'origine du repère.



3. Venons en à l'hexagone régulier. On peut en effet calculer relativement facilement $\cos\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$. Mais on peut aussi tracer les bissectrices des angles mesurant $2\pi/3$ dans la figure du triangle équilatéral.



Nous ne pouvons pas ne pas parler de la construction célèbre avec les rosaces, que nous avons pour la plupart déjà essayé pour essuyer nos cours ennuyeux de primaire...



La question qu'on se pose à partir de la construction de l'hexagone régulier est la suivante :

Quelles sont les constructions possibles à partir de constructions déjà connues ?

4.3 Et au-delà...

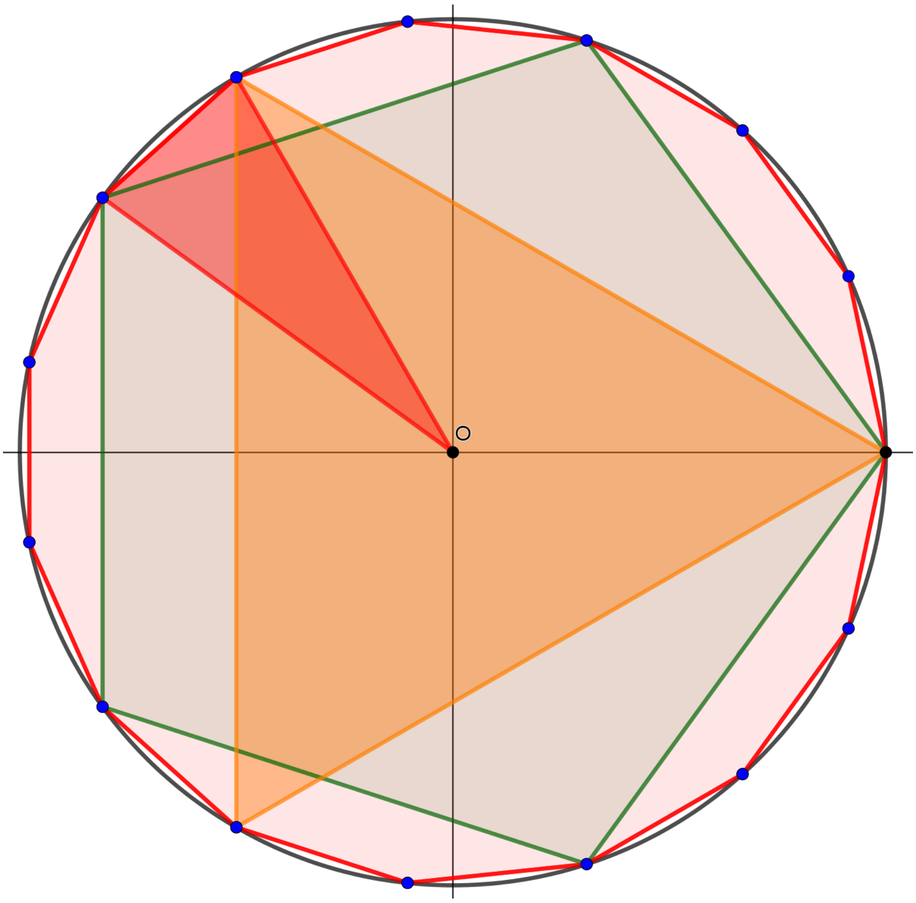
Notre regretté Euclide a réussi à construire le *pentadécagone* régulier (15-gone) à partir du pentagone régulier et du triangle équilatéral. Remarquons alors que $15 = 3 \times 5$, mais cette égalité n'explique pas tout de la construction d'Euclide. Afin de réussir cette construction, il suffit de construire l'angle $\frac{2\pi}{15}$ à partir de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{5}$ déjà construits. Le tour de force technique est de constater que

$$1 = 2 \times 3 - 1 \times 5.$$

Cette identité a priori triviale n'est pas sans conséquences ! Elle permet en effet les calculs suivants

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{15} = \frac{1 \times 2\pi}{15} &= \frac{(2 \times 3 - 1 \times 5) \times 2\pi}{15} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 2\pi}{15} - \frac{1 \times 5 \times 2\pi}{15} \\ &= 2 \times \frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Jackpot ! Pour construire l'angle $\frac{2\pi}{15}$, il suffit de prendre 2 fois l'angle $\frac{2\pi}{5}$ et de lui retrancher l'angle $\frac{2\pi}{3}$. On obtient ainsi la construction suivante : on construit d'abord un pentagone régulier et un triangle équilatéral réguliers ayant pour côté le point de coordonnées (1 ; 0). En tournant sur le cercle en sens horaire, on prend le deuxième sommet du pentagone régulier et le premier du triangle équilatéral. Avec l'origine du repère, ils forment un triangle isocèle dont l'angle du sommet principal est de $2\pi/15$ par ce que nous venons de voir. Il n'y a alors plus qu'à reporter la longueur, et le tour est joué.



Ce raisonnement magique admet une belle généralisation. Rappelons que la clef de notre réussite était l'identité $1 = 2\times 3 - 1\times 5$. Peut-on alors toujours écrire 1 comme combinaison de deux nombres m et n donnés ? La réponse est positive à condition que m et n soient premiers entre eux, autrement dit n'ont aucun diviseur positif en commun plus grand que 1. Ce théorème s'appelle l'identité de Bézout due comme son nom l'indique au mathématicien français Étienne Bézout (1730-1783). On a en effet l'énoncé suivant :

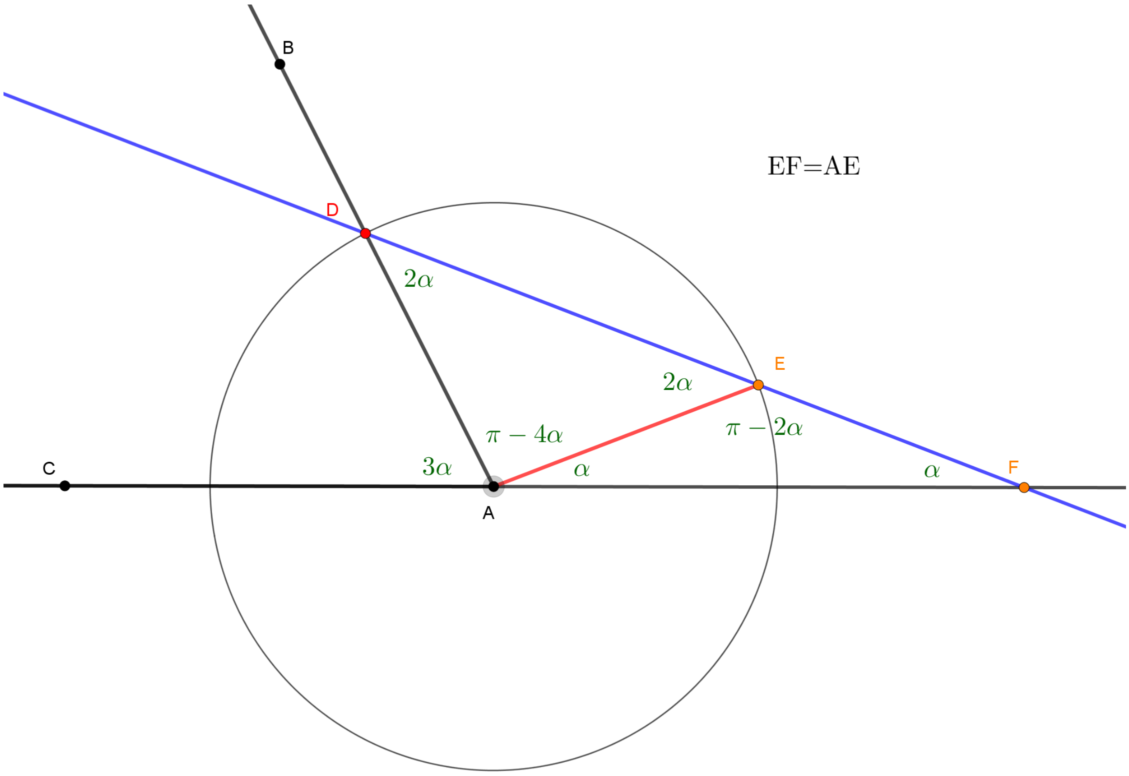
Théorème: Identité de Bézout

Soient m et n deux nombres entiers. Alors m et n sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple d'entiers (u, v) tel que

$$1 = m\times u + n\times v.$$

Nous ne démontrons pas ce résultat ici, mais l'algorithme d'Euclide étendu permet de trouver un tel couple (u, v).

Nous avons vu qu'avec l'introduction d'outils algébriques absolument remarquables, les mathématiciens du 19ème siècle sont parvenus à venir à bout de problèmes qui leur avaient résisté pendant plus de deux mille ans, ou plus fort encore, démontrer leur impossibilité. On peut même affirmer que ces problèmes ont été une motivation importante au développement de ces nouvelles mathématiques. Cette résolution impressionnante pose également un tas d'autres problèmes : Que peut on construire si on enlevait la règle ? Si l'on dispose de quelques points ou d'une règle seule ? Ou si l'on dispose de graduations sur la règle ? Les mathématiques donnent à chaque fois des réponses aussi merveilleuses qu' inattendues à ces problèmes.



Par exemple, avec une règle graduée, la trisection de l'angle devient un problème... résoluble ! Pour cela, donnons nous un angle $\angle$ BAC quelconque. On prolonge la droite (AC) et on trace un cercle centré en A qui a pour rayon la longueur d'une graduation dans la règle. Elle coupe la demi-droite [AB) en un point D. À présent, on place la règle de telle sorte qu'elle passe par le point D et qu'elle coupe le cercle et la droite (AC) en deux points E et F distants d'une graduation (entraînant AE = EF). Nous prétendons alors que l'angle $\angle$ AFD vaut le tiers de l'angle $\angle$ BAC.

En effet, si on note α l'angle $\angle$ AFD, on aura $\angle$ AEF $= \alpha$ aussi car le triangle AEF est isocèle en E, et ensuite $\angle$ AEF $= \pi - 2\alpha$ par somme des angles dans le triangle AEF. Par suite, on aura $\angle$ AED $= 2\alpha$, idem pour l'angle $\angle$ ADE car le triangle ADE est isocèle en A. Encore une fois, par somme des angles dans le triangle ADE, on aura $\angle$ DAE $= \pi - 4\alpha$. On en déduit finalement que l'angle $\angle$ DAC vaut 3α, ce qui conclut la démonstration.

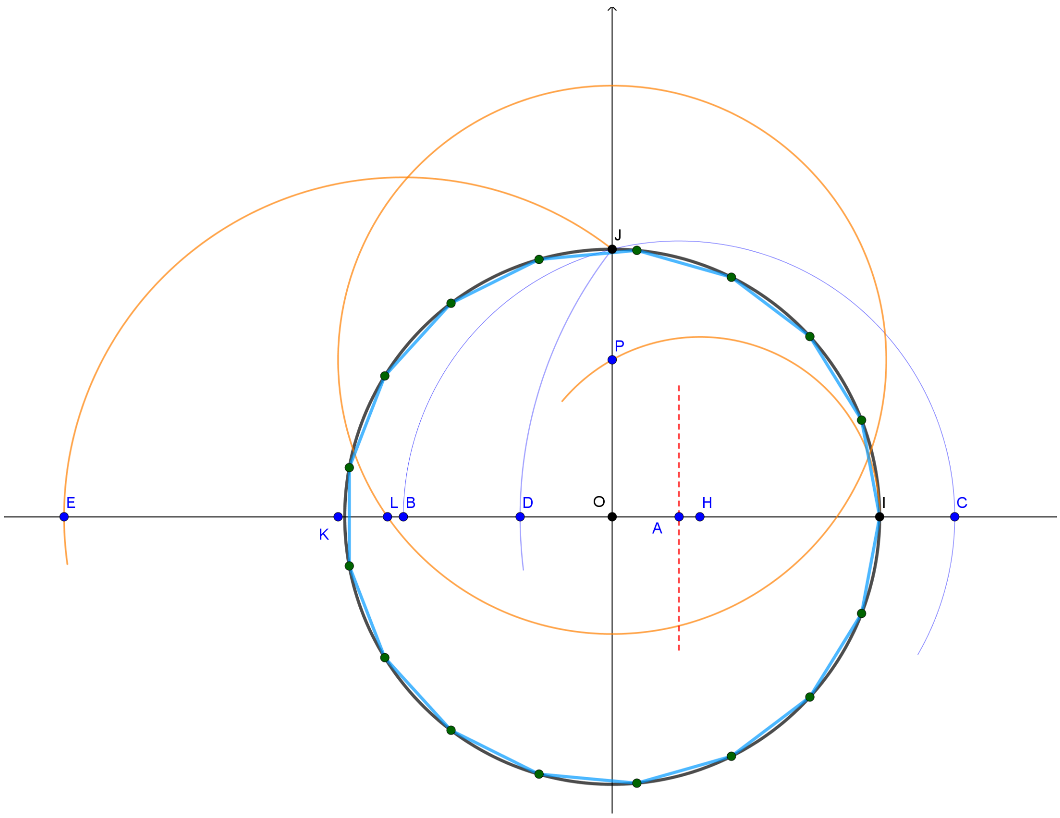
Voici quelques problèmes que nous posons au lecteur :
Problèmes : (Pour les constructions, on se donne deux points initiaux)

1. Construire un polygone régulier à 8 côtés.
2. Construire un polygone régulier à 12 côtés.
3. Construire ce polygone régulier sans commencer par la construction d'un triangle équilatéral.

Pour terminer cet article, nous vous proposons la construction de l'heptadécagone régulier, le polygone régulier à 17 côtés construit par Gauss. Par quel éclair de génie a-t-il pu faire une telle chose ? C'est un sujet pour une autre vidéo...

Construction du 17-gone :
Étant donné cinq points O, I et J définissant un repère orthonormé :

1. Construire le point $A \in [OI]$ tel que $OC = \frac{1}{4}OI$.
2. Tracer le cercle de centre A et de rayon AJ coupant (OI) en B et en C
3. Tracer le cercle de centre C de rayon AJ coupant (OI) en D du côté opposé à I par rapport à O.
4. Tracer le cercle de centre B et de rayon BJ coupant (OI) en E (toujours du côté opposé à I par rapport à O)
5. Construire H, milieu de ID
6. Construire le cercle de centre H et de rayon HI coupant [OJ] en P
7. Construire K, le milieu de OE
8. Tracer le cercle de centre P et de rayon OK coupant (OI) en L du côté opposé à I par rapport à O.
9. La longueur KL est celle du côté d'un 34-gone : finir la construction.



Références

[1] Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps, la règle et le compas*. Hermann, 1997.

[2] C.Lebossé et C.Hémery. *Géométrie, Classe de Seconde C*. Fernand Nathan, 1965.

[3] Robin Hartshorne. *Geometry : Euclid and Beyond*. Springer, 2000.

[4] Daniel Perrin. *Mathématiques d'école, nombres, mesures et géométrie*. Cassini, 2011.

[5] John Stillwell. *Elements of Algebra*. Springer, 1994.

[6] John Stillwell. *The Four Pillars of Geometry*. Springer, 2005.