
N.B. : - Les Deux Exercices et le Problème sont obligatoires.

EXERCICE I (4 points)

On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 = 2$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{5}{6}$ pour tout entier naturel n .

- 1 - Calculer U_1 et U_2 . (0,5 point)
- 2 - Soit une deuxième suite (V_n) définie par : $V_n = 3U_n + 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a - Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_0 . (1,5 point)
 - b - Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n . (0,75 point)
 - c - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,25 point)
- 3 -
 - a - Calculer $V_{n+1} - V_n$ en fonction de n . (0,5 point)
 - b - En déduire que la suite (V_n) est décroissante. (0,5 point)

EXERCICE II (4 points)

Le tableau suivant donne la répartition des 80 employés d'une entreprise en fonction de leur salaire mensuel (en milliers de francs malgaches FMG). Soit n un entier naturel non nul.

Salaire	[50 ; 150[	[150 ; 250[	[250 ; 350[	[350 ; 450[	[450 ; 550[	[550 ; 650[
Effectifs (n_i)	n	26	20	4	4	2

Dans les calculs qui suivent, on utilisera les centres x_i des classes, où $1 \leq i \leq 6$.

- 1- Déterminer l'effectif n des employés ayant un salaire mensuel inférieur à 150.000-FMG. (0,5 point)

On prendra $n = 24$ dans tout ce qui suit.

- 2 - Dans un repère orthogonal du plan, représenter le nuage de points M_i de coordonnées (x_i, n_i) , $1 \leq i \leq 6$. (0,5 point)

On prendra comme unités : 1cm sur l'axe des abscisses pour 100.000FMG.

1cm sur l'axe des ordonnées pour 5 employés.

- 3 -
 - a. Calculer les fréquences relatives de ces six classes. (2 points)
 - b. Calculer la moyenne des salaires, exprimée en francs, dans cette entreprise. (1 point)

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = -x + 1 - e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un plan P muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

- 1 -
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (1 point)

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) . (1 point)

2 - a. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = -1 + e^{-x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f . (1 point)

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$. (1 point)

3 - a. Compléter le tableau des valeurs suivant : (1 point)

x	0	1	2	3	4
f(x)					

b. Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$. (1 point)

c. Représenter graphiquement les droites (D) , (T) et la courbe (C) dans P . (3 points)

4 - Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x) = -\frac{x^2}{2} + x + e^{-x}$.

a. Montrer que F est une primitive de f . (2 points)

b. En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses $x'Ox$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (1 point)

On donne : $e^{-1} \approx 0,36$; $e^{-2} \approx 0,13$; $e^{-3} \approx 0,05$.

Série A - SESSION 2000

Exercice 1 4 points

- N.B.** : – Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.
– On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher dont 4 blanches et 4 noires.

1. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
 - a. Déterminer le nombre de tirages possibles. (0,5 pt)
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ? (0,5 pt)
 - c. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires ? (0,5 pt)
2. On effectue 3 tirages successifs d'une boule, en remettant dans l'urne, avant chaque tirage, la boule précédemment tirée.
 - a. Quel est le nombre de tirages possibles ? (0,5 pt)
 - b. Quelle est la probabilité de sortir ainsi 3 boules noires ? (0,5 pt)
 - c. Quelle est la probabilité de sortir ainsi 1 blanche puis 2 noires ? (0,5 pt)
3. On tire toutes les boules une à une sans remise.
 - a. Quel est le nombre de tirages possibles ? (0,5 pt)
 - b. Quelle est la probabilité pour que les couleurs de toutes les boules tirées soient alternées ? (0,5 pt)

Exercice 2 4 points

Le tableau suivant montre le chiffre d'affaires, exprimé en millions de francs malagasy, d'une entreprise au cours des six dernières années.

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaires : y_i	120	132	147	164	181	201

1. Calculer la moyenne de la série (y_i). (0,5 pt)
2. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i (x_i, y_i)$. (Sur l'axe des abscisses, 2 cm représente une année ; sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente 20 millions). (1,5 pt)
3. Soit G_1 le point moyen du sous-nuage obtenu par x_1, x_2 et x_3 ; G_2 le point moyen du sous-nuage obtenu par x_4, x_5 et x_6 .
 - a. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2 . (0,5 pt)
 - b. Tracer la droite (G_1G_2). Que représente cette droite ? (0,5 pt)
 - c. Donner l'équation de la droite (G_1G_2). (0,5 pt)
 - d. En déduire une prévision du chiffre d'affaires de cette entreprise en 2002. (0,5 pt)

Problème 12 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -4 ; 2 [$ par :

$$f(x) = \ln(x+4) - \ln(2-x).$$

On note par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

1. Calculer les limites de f en -4 et en 2 . Interpréter graphiquement ces résultats. (2 pts)
2. a. Montrer que, pour tout $x \in] -4 ; 2 [$, la fonction dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{6}{(2-x)(x+4)}.$$

(1 pt)

b. Dresser le tableau de variation de f. **(1 pt)**

3. a. Déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses. **(1 pt)**

b. Ecrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I(-1 ; 0). **(1 pt)**

c. Montrer que le point I (-1 ; 0) est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$. **(1 pt)**

4. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ dans un même repère. **(2 pts)**

5. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $] - 4 ; 2 [$ par :

$$F(x) = (x + 4) \ln(x + 4) - (x - 2) \ln(2 - x).$$

a. Calculer la fonction dérivée F' de F. **(1 pt)**

b. En déduire la valeur exacte en cm² de l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. **(1 pt)**

6. Soit g la fonction définie sur $] - 4 ; 2 [$ par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right).$$

a. Montrer que, pour tout $x \in] - 4 ; 2 [$: $g(x) = -f(x)$. **(0,5 pt)**

b. Tracer dans le même repère que $(\mathcal{C})$ la courbe représentative (Γ) de g. **(0,5 pt)**

Série A - SESSION 2001

N. B. : Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.

Exercice – 1 (4 points)

N.B. : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont :

- 4 rouges numérotées 2, 3, 3, 4
- 4 vertes numérotées 1, 3, 3, 4
- 2 jaunes numérotées 1, 1.

1. On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « la somme des numéros des 2 boules tirées est égale à 6 » (1 pt)

B : « le produit des numéros des 2 boules tirées est égal à 4 » (1 pt)

2. On effectue 3 tirages successifs d'une boule, en remettant dans l'urne, avant chaque tirage, la boule précédemment tirée.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « Tirer 3 boules de même couleur » (1 pt)

D : « Tirer 2 boules rouges et une jaune dans cet ordre ». (1 pt)

Exercice – 2 (4 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)

2. Soit la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 3$.

a- Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . (1 pt)

c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,5 pt)

3. On pose $w_n = \ln\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$, $n \in \mathbb{N}$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)

Problème (12 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = (1 - x)e^x - 1$.

On note par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . (0,5 pt)

2. a- Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,5 pt)

b- Sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. (0,5 pt)

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

(0,5 pt)

3. a- Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

(1 pt)

b- Dresser le tableau de variation de f .

(1 pt)

4. a- Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe ($\mathcal{C}$) avec la droite ($\mathcal{D}$) d'équation $y = -1$.

(1 pt)

b- Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 1.

(1 pt)

5. a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (on pourra écrire $\frac{f(x)}{x} = \frac{1-x}{x} e^x - \frac{1}{x}$).

(0,5 pt)

Que peut-on en conclure ?

(0,5 pt)

b- Reproduire le tableau suivant et donner pour chaque valeur de x , une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-2} près.

(1,5 pt)

x	-3	-1	$\ln 5$
$f(x)$			

c- Tracer (T), ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}$).

(2 pts)

6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2-x)e^x - x$.

a- Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(0,5 pt)

b- Calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe ($x'Ox$) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

(1 pt)

On donne : $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{-3} \approx 0,05$; $\ln 5 \approx 1,61$.

Série A - SESSION 2002

N.B. : Le candidat doit traiter les **DEUX** exercices et le problème.

EXERCICE 1 (4 points)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n^2 - U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$$

- 1°) - Calculer les quatre premiers termes de cette suite. (1 pt)
- 2°) - a) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison. (1 pt)
b) Exprimer U_n en fonction de n . (0,5 pt)
c) Quel est le sens de variation de $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$? (0,25 pt)
- 3°) - Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $V_n = e^{2(1-n)}$
- a) Montre que $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. (1 pt)
- b) Calculer la limite de V_n quand $n \rightarrow +\infty$. (0,25 pt)

EXERCICE 2 (4 points)

Le tableau suivant indique l'évolution de l'effectif d'un Collège au cours des huit dernières années. (x_i désigne le rang de l'année et y_i l'effectif correspondant).

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	370	360	380	410	420	440	450	470

- 1°) - Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. (0,75 pt)
- Sur l'axe des abscisses, prendre 1 cm pour unité graphique.
 - Sur l'axe des ordonnées, placer 350 à l'origine puis choisir 1 cm pour représenter 10 élèves.
- 2°) - Calculer les coordonnées du point moyen G . (0,5 pt)
- 3°) - On note (S_1) la série statistique allant de 1994 à 1997 et (S_2) la série allant de 1998 à 2001.
- a) Déterminer les coordonnées des points moyens respectifs G_1 et G_2 des séries (S_1) et (S_2) . (0,5 + 0,5 pt)
- b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par G_1 et G_2 . (0,75 pt)
- c) Construire cette droite (D) . Que représente-t-elle ? (0,25 + 0,25 pt)
- d) En déduire une estimation de l'effectif du collège en 2003. (0,5 pt)

PROBLEME : (12 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2 \ln x (\ln x - 1)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j} \right)$ d'unité 1 cm.

- 1°) - a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,5 pt)
b) Calculer les limites aux bornes de D_f . (0,5 + 0,5 pt)
c) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2}{x} (2 \ln x - 1)$. (1 pt)
d) Dresser le tableau de variation de f . (1 pt)
- 2°) - a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe $(x'ox)$. (1 pt)
b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse e . (1 pt)
c) Montrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. (1 pt)

3°) – a) Etudier les branches infinies de (C) (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$). (0,25 + 0,25 pt)

b) Calculer $f(e^{-1})$ et $f(e^2)$. (0,5 + 0,5 pt)

c) Construire (T) et (C). (0,5 + 1,5 pt)

4°) – Soit F la fonction définie par $F(x) = 2x (\ln x)^2 - 6x \ln x + 6x$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur Df. (1 pt)

b) Calculer, en cm^2 , l'aire A du domaine plan limité par (C) l'axe ($x'ox$) et les droites d'équations

$x = 1$ et $x = e$. (1 pt)

On donne : $e^{-1} \approx 0,4$; $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,7$; $e \approx 2,7$; $e^{\frac{3}{2}} \approx 4,5$; $e^2 \approx 7,4$.

N.B. : Le candidat doit traiter les *DEUX Exercices* et le *Problème*.

Exercice 1 (5 points)

Dans une classe de douze élèves, la répartition suivant l'âge et le sexe est donnée par le tableau suivant :

Age \ Sexe	Filles	Garçons
18 ans	4	3
19 ans	2	2
20 ans	1	0

On choisit au hasard et simultanément trois élèves de la classe.

- Déterminer le nombre de choix possibles. (0,5 pt)
- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - « les élèves choisis sont des filles ». (0,75 pt)
 - « les élèves choisis ont plus de 18 ans ». (1 pt)
 - « les trois élèves choisis ne sont pas de même sexe ». (1,25 pt)
 - « au moins un élève choisi a exactement 19 ans ». (1,5 pt)

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$.

On pose $v_n = u_n - 2$.

- Calculer u_2 , u_3 et v_1 . (0,75 pt)
- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. (1 pt)
- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . (0,5 + 0,25 pt)
- On pose $w_n = \ln v_n$ où $\ln$ est le logarithme népérien.
 - Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme. (1,5 pt)
 - Exprimer $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ en fonction de n . (1 pt)

Problème (10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - 2x + e^x$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f . (0,75 ; 0,50)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,75 ; 0,50)

c) En remarquant que pour tout $x > 0$, $f(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{e^x}{x} \right)$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(On donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$). (0,75 ; 0,50)

2. a) Calculer $f'(x)$. (1,00 ; 0,75)

b) En déduire le tableau de variation de f . (1,25 ; 1,00)

3. a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de la courbe (C) avec l'axe des ordonnées. (1,00 ; 0,75)

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point A. (1,00 ; 1,00)

4. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 1)]$. Que peut-on en conclure ? (1,00 ; 1,00)

b) Etudier la branche infinie de (C) lorsque x tend vers $+\infty$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. (1,00 ; 0,75)

5. Tracer (C). (1,50 ; 1,25)

Pour A₂ seulement

6. a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,00 ; 1,00)

b) En déduire l'aire géométrique en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 2$. (0,00 ; 1,00)

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$.

N.B. : - Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

Soit la suite arithmétique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la donnée des deux termes $U_1 = -2$ et $U_{20} = 55$.

- 1°) Calculer la somme $S = U_1 + \dots + U_{20}$ (0,5 pt)
- 2°) Déterminer la raison r de cette suite. (1 pt)
- 3°) Exprimer U_n en fonction de n . (0,5 pt)
- 4°) Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $V_n = e^{3n-5}$
 - a/ Calculer V_1 et V_2 . (0,5+0,5pt)
 - b/ Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison q . (1 pt)
 - c/ Exprimer la somme $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n . (1 pt)

EXERCICE 2 (5 points)

N.B : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une trousse contient douze stylos de même marque, indiscernables au toucher : 3 rouges, 4 verts, 3 bleus et 2 noirs.

- 1°) Un élève prend au hasard un stylo de la trousse. Chaque stylo a la même probabilité d'être tiré. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - A : « Obtenir un stylo rouge » (0,5 pt)
 - B : « Obtenir un stylo vert ou un stylo noir ». (0,5 pt)
- 2°) On remet la trousse à sa condition initiale. Un autre élève tire au hasard et simultanément deux stylos de la trousse. On suppose que les tirages sont équiprobables. Evaluer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - C : « Les deux stylos tirés sont de même couleur » (0,5 pt)
 - D : « Obtenir deux stylos de couleurs différentes ». (1 pt)
- 3°) On remet la trousse à sa condition initiale. Un troisième élève tire successivement et sans remise trois stylos de la trousse. On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables.
 - a/ Déterminer le nombre de cas possibles. (0,5pt)
 - b/ Déterminer les probabilités des événements suivants :
 - E : « Obtenir trois stylos de même couleur » (1 pt)
 - F : « Obtenir aucun stylo vert ». (1 pt)

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x.$$

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

- 1°)
 - a/ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. (1 ; 1)
 - b/ Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 ; 0,5)

- 2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 ; 0,25)
- 3°) a/ Montrer que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \frac{1-x+x \ln x}{x}$ pour $x \in]0, +\infty[$. (0,5 ; 0,25)
 b/ En admettant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (0,5 ; 0,25)
- 4°) Dresser le tableau de variation de f . (1 ; 1)
- 5°) Compléter le tableau des valeurs ci-dessous : (1 ; 1)

x	$\frac{1}{e}$	1	2	e
$f(x)$				

- 6°) a/ Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et étudier son signe sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (1 ; 0,5)
 b/ En déduire que le point I d'abscisse 2 est un point d'inflexion de (C) . (0,5 ; 0,5)
 c/ Trouver une équation de la tangente (T) à (C) en I . (1 ; 0,5)
- 7°) a/ On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Quelle conclusion peut-on en tirer sur la courbe (C) ? (0,5 ; 0,25)
 b/ Tracer (C) et (T) . (1,5+0,5 ; 1,5+0,5)

Pour A2 seulement

- 8°) Soit la fonction G définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x$
 a/ Calculer $G'(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0, +\infty[$. (; 0,25)
 Et en déduire une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (; 0,75)
 b/ Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses ($x'Ox$) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. (; 1)
- On donne : $\frac{1}{e} \approx 0,36$; $\ln 2 \approx 0,7$; $e \approx 2,7$.

- N. B :
- Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.
 - Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

Soient la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $U_0 = 10$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{2}$ pour tout $n \geq 1$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout n par : $V_n = \ln[U_n + 2]$.

- 1) Calculer U_1 , V_0 et V_1 . (1,5 pt)
- 2) a/ Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$ $V_{n+1} = \ln \left[\frac{U_n + 2}{2} \right]$. (1,0 pt)
 b/ En déduire que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 2$. (1,0 pt)
 Préciser le sens de variation de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,5 pt)
- 3) Exprimer V_n en fonction de n . (0,5 pt)
- 4) Exprimer U_n en fonction de V_n puis en fonction de n . (0,25+0,25pt)

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne contient dix jetons :

- deux jetons numérotés chacun par 1
- trois jetons numérotés chacun par 2
- quatre jetons numérotés chacun par 3
- un jeton numéroté par 4.

- 1) On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
 a/ Quelle est la probabilité d'amener trois jetons portant chacun le numéro 3 ? (0,5 pt)
 b/ Quelle est la probabilité d'obtenir trois jetons portant chacun un numéro impair ? (1,0 pt)
 c/ Quelle est la probabilité d'amener la somme des numéros notés sur les trois jetons tirés à 10 ? (1,0 pt)
- 2) On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne.
 On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables.
 a/ Trouver le nombre de cas possibles. (0,5 pt)
 b/ Evaluer la probabilité de chacun des événements suivants :
 A : « Les trois jetons tirés portent le même numéro » (1,0 pt)
 B : « Obtenir le jeton numéroté par 4 au dernier tirage ». (1,0 pt)

PROBLEME (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 e^{2x}$, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4cm)

- 1°) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. (0,5+0,5 ; 0,5+0,5pt)

b/ Interpréter graphiquement les résultats précédents. (0,5 ; 0,5pt)

c/ En admettant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et en remarquant que $f(x) = [2x e^x]^2$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 ; 0,5pt)

2°) a/ Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$: $f'(x) = 8x(x + 1)e^{2x}$. (1,0 ; 1,0pt)

En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . (1,0 ; 0,5pt)

b/ Compléter le tableau des valeurs ci-dessous. (1,0 ; 1,0pt)

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$				

c/ Dresser le tableau de variation de f . (2,0 ; 1,5pt)

3°) a/ Trouver une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. (1,5 ; 1,0pt)

b/ Tracer (C) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (1,5 ; 1,0pt)

Pour A2 seulement

4°) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.

a/ Calculer $F'(x)$. (; 1,0pt)

b/ Calculer en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$ et l'axe des abscisses ($x'Ox$). (; 1,0pt)

On donne : $e^{-2} \approx 0,16$ $e^{-1} \approx 0,40$ $e \approx 2,70$

- N.B. :**
- Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.
 - Machine à calculer autorisée.

Exercice I (5 pts)

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques définies respectivement par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

et $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

- 1°) Calculer U_1, U_2, V_0, V_1 . 0,25 x 4 pt
- 2°) a) Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -1 . 1 pt
- b) Donner l'expression de V_n puis U_n en fonction de n . 0,5 + 0,5 pt
- 3°) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$
et $P_n = W_0 \cdot W_1 \cdot \dots \cdot W_{n-1}$
avec $W_n = e^{V_n}$
- a) Calculer S_n en fonction de n . 1 pt
- b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n ,
puis la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$. 0,5 pt

Exercice II (5 pts)

On dispose d'un portefeuille contenant 10 billets de banque dont 2 billets de 1.000 Ar, 3 billets de 2.000 Ar, 4 billets de 5.000 Ar et 1 billet de 10.000 Ar.

- 1°) On tire successivement et sans remise 3 billets du portefeuille.
- a) Déterminer le nombre des cas possibles. 1 pt
- b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
- A : « Obtenir exactement 2 billets de 5.000 Ar » 1 pt
- B : « Obtenir au plus 2 billets de 2.000 Ar » 1 pt
- 2) On tire simultanément 4 billets du portefeuille.
- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
- C : « avoir un montant total de 14.000 Ar » 1 pt
- D : « avoir un montant total supérieur ou égal à 25.000 Ar ». 1 pt

Problème (10 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $] -1, +\infty [$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x+1).$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1°) a) Calculer la limite à droite de f en -1 . (0,5 ; 0,5)
Interpréter graphiquement ce résultat. (0,5 ; 0,5)
- b) Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,5 ; 0,5)
- 2°) a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f . (1,25 ; 1)
- b) Vérifier que pour tout $x \in] -1, +\infty [$, on a : $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$. (0,5 ; 0,5)
- c) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . (1,5 ; 1,25)
- 3°) a) Montrer que le point O est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$. (1 ; 0,75)
- b) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 0$. (1,25 ; 1)
- c) Calculer à 10^{-1} près : $f(-\frac{1}{2})$; $f(1)$ et $f(2)$. (1,5 ; 0,75)
- (On donne $\ln 2 = 0,7$; $\ln 3 = 1,1$)
- 4°) Tracer la tangente (T) et la partie de $(\mathcal{C})$ qui représente la fonction f dans l'intervalle $] -1, 2]$. (1,5 ; 1)

Pour A2 seulement

- 5°) Pour $x \in] -1, +\infty [$, on pose $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$
- a) Calculer la dérivée $g'(x)$ de g et vérifier que
- $$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1 + g'(x) \quad (\quad ; 1)$$
- b) Calculer en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. (\quad ; 1,25)

.....

Série A - SESSION 2007

NB : - Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le PROBLEME
- Machine à calculer autorisée

EXERCICE I (5 points)

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques définies respectivement par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n + 4}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}, n \in \mathbb{N}$$

- 1- Calculer U_1 , V_0 et V_1 . (0,25x3pts)
- 2- a-Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ (1pt)
 - b-Exprimer V_n en fonction de n . (1pt)
- 3- a-Exprimer U_n en fonction de V_n . (1pt)
 - b-En déduire l'expression de U_n en fonction de n . (0,5pt)
 - c-Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. Que peut-on en conclure ? (0,5+0,25pt)

EXERCICE II (5 points)

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher, portant les lettres A, B et C et dont la répartition suivant la couleur est donnée par le tableau ci-dessous :

Couleurs \ Lettres	Lettres		
	B	A	C
Rouges	1	1	3
Vertes	0	1	1
Noires	0	1	2

Chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

- 1°-On tire au hasard et simultanément trois boules du sac.
 - a-Déterminer le nombre de tirages possibles. (0,5pt)
 - b-Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - E_1 : "obtenir trois boules de même couleur". (1pt)
 - E_2 : "obtenir exactement deux boules portant la même lettre". (1pt)
 - E_3 : "obtenir trois boules de même couleur et portant la même lettre" (0,5pt)
- 2°-On tire successivement trois boules du sac, sans remettre dans le sac la boule qui a été tirée. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - F_1 : "obtenir les lettres B, A et C dans cet ordre". (1pt)
 - F_2 : "obtenir au plus deux boules noires". (1pt)

(N.B : Mettre les résultats sous-forme de fractions irréductibles)

PROBLEME (10 points)

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2e^x - e^{2x}}{2}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

- 1-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat. (0,5+0,5) (0,5+0,5)

- 2-Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x (1 - \frac{1}{2} e^x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5+0,5) (0,5+0,5)
- 3-a-Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x (1 - e^x)$ (1+0,5) (0,5+0,5)
 b-Etudier le signe de $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,5) (0,5)
 c-En déduire le tableau de variation de f . (1,5) (1)
- 4-a-Déterminer les coordonnées du point A intersection de la courbe ($\mathcal{C}$) avec l'axe des abscisses. (1) (0,5)
 b-Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = \ln 2$. (1) (0,5)

5-En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} (1 - \frac{1}{2} e^x)$

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat. (On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$) (0,5+0,5) (0,5+0,5)

6-Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et la tangente (T). (1+0,5) (1+0,5)

Pour A2 seulement :

- 7-a-Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = e^x - \frac{1}{2} e^{2x}$ (0, 0) (0,5)
 b-Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0) (0,5)
 c-En déduire l'aire géométrique $\mathcal{A}$, en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ln 2$. (0) (1)

On donne $\ln 2 = 0,7$; $e = 2,7$

SÉRIE A - SESSION 2008

NB : - Les **deux exercices** et le **problème** sont obligatoires.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

- 1) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique définie par : $U_{23} = 71$ et $U_{75} = 227$.
- Calculer la somme S définie par $S = U_{23} + U_{24} + \dots + U_{75}$. (1)
 - Calculer la raison de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (1)
 - Exprimer U_n en fonction de n . (1)
- 2) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite numérique définie, pour tout entier naturel n , par $V_n = 2 \left(\frac{5}{8} \right)^n$.
- Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n . En déduire la nature et la raison de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,5+0,5)
 - Calculer la limite de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (1)

EXERCICE 2 (5 points)

Le tableau suivant donne le nombre de téléphones mobiles vendus, pendant huit années successives, par un distributeur agréé :

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de téléphones vendus (y_i)	26 000	28 000	50 000	65 000	81 000	83 000	120 000	125 000

- 1) Représenter le nuage de points $\{M_i\}_{1 \leq i \leq 8}$ associé à cette série statistique. (1)
(Echelle : Axe des abscisses : 1 cm représente une année
Axe des ordonnées : 1 cm représente 10 000 téléphones vendus)
- 2) On partage le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ et $\{M_5, M_6, M_7, M_8\}$.
- Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 , points moyens respectifs des nuages partiels ainsi obtenus. (1 + 1)
 - Représenter la droite (G_1G_2) . Ecrire une équation cartésienne de cette droite. (0,5+0,5)
- 3) En supposant que l'évolution du nombre de téléphones vendus par ce distributeur gardera la même tendance, déterminer ce nombre pour la dixième année, à l'aide de la droite d'ajustement (G_1G_2) de cette série. (1)

PROBLEME (10 points)

f est la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{1}{x} \right) (\ln x)$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

	A1	A2
1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.	(1+ 0,5)	(0,5 x 2)
b) On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.	(1)	(0,5)
2) a) Montrer que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ où f' est la fonction dérivée de f.	(1,5)	(1)
b) Résoudre, dans $]0 ; +\infty[$, l'équation $(1 - \ln x) = 0$.	(1)	(0,5)
c) Dresser ensuite le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.	(1,5)	(1,5)
3) a) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$.	(1)	(1)
b) Tracer, uniquement sur l'intervalle $]0 ; e]$, la courbe (C), son asymptote verticale et ses deux tangentes aux points A et B ($e ; \frac{1}{e}$) ; dans le même repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).	(0,5x3+1)	(0,5x3+1)
(On prendra $e = 2,7$ et $\frac{1}{e} = 0,4$; uniquement pour construire).		

POUR A2 SEULEMENT

4) F est la fonction numérique définie par $F(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + 3$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.	
a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.	(1)
b) En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.	(1)

- NB :**
- Les deux exercices et le problème sont obligatoires.
 - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

- Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = e^n$.
 - Calculer la valeur exacte de U_0 et celle de U_2 (0,5pt + 0,5pt)
 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = e \cdot U_n$. (1 pt)
En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (0,5pt)
- Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \ln(U_n)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
 - Démontrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt + 0,25 pt + 0,25 pt)
 - Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{121}$ (1 pt)

EXERCICE 2 (5 points)

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher dont :

- 2 vertes numérotées : 1 ; 1
- 3 rouges numérotées : 1 ; 2 ; 3
- 4 blanches numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4

- On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - A : « Obtenir 3 boules de couleurs différentes » (0,5 pt + 0,5 pt)
 - B : « Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 6 » (0,5 pt + 0,5 pt)
- On tire successivement au hasard et sans remise 3 boules de l'urne.
 - Démontrer qu'il y a 504 cas possibles. (1 pt)
 - Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - C : « Obtenir 3 boules de même couleur » (0,5 pt + 0,5 pt)
 - D : « Obtenir dans l'ordre une boule rouge, une boule verte et une boule blanche » (0,5 pt + 0,5 pt)

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3 + e^x$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

- | | A1
(0,5 pt) | A2
(0,25 pt) |
|--|-----------------------|------------------------|
| 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | | |
| 2) a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x \left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x} \right)$ | (0,5 pt) | (0,25 pt) |
| b) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | (1 pt) | (0,5 pt) |
| c) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique pour la courbe (C) , au voisinage de $-\infty$ | (1 pt) | (1 pt) |

- | | | |
|--|------------------|------------------|
| 3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - 1 = 0$ | (1 pt) | (1 pt) |
| b) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = -1 + e^x$ | (1 pt) | (0,5 pt) |
| c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ | 1 pt | (0,5 pt) |
| d) Dresser le tableau de variations de f | (1 pt) | (1 pt) |
| 4) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$ | (1 pt) | (1 pt) |
| b) Tracer dans le même repère la droite (Δ), la tangente (T) et la courbe (C). | (0,5 pt x2+1 pt) | (0,5 pt x2+1 pt) |

POUR A2 SEULEMENT

- 5) Soit F la fonction définie par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + e^x$
- | | | |
|--|----------|------|
| a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ | (0,00pt; | 1pt) |
| b) Calculer, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (C), les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe des abscisses | (0,00 ; | 1pt) |

Exercice 1 Statistique (5 points)

Les notes obtenues par dix candidats aux épreuves de natation et de danse d'un concours sont indiquées dans le tableau suivant :

Natation (X)	3	5	6	6	9	9	12	12	14	14
Danse (Y)	5	8	8	10	10	13	13	16	16	17

- 1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique (on utilisera le papier millimétré ci-joint). 1,25
- 2) On partage le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux.
 - a) Calculer les coordonnées de G1 et G2, points moyens respectifs des nuages partiels ainsi obtenus. 0,75+0,75
 - b) Placer les points G1 et G2. Tracer la droite (G1G2). 0,25+0,25
 - c) Déterminer une équation de la droite (G1G2). 1
- 3) Estimer, à l'aide de la droite (G1G2), la note de natation qu'aura un candidat qui avait 10,5 en danse. 0,75

Exercice 2 Suite numérique (5 points)

- 1) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite numérique définie par : $U_n = \frac{n-1}{n}$.
 - a) Calculer les trois premiers termes de (U_n) . 1,5
 - b) Exprimer U_{3n+1} en fonction de n . 0,5
- 2) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que : $V_{75} = V_{12} + 504$.
 - a) Vérifier que la raison de (V_n) est égale à 8. 1
 - b) Sachant que $V_{32} = 176$, calculer la somme S définie par : $S = V_{12} + V_{13} + \dots + V_{75}$. 1,5
 - c) Prouver que la suite (V_n) est strictement croissante. 0,5

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 \ln(x)$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

- | | A1 | A2 |
|--|-----|------|
| 1) a) Vérifier que $f(x) = x \left(1 - 2 \frac{\ln(x)}{x} \right)$ pour tout réel strictement positif x. | 0,5 | 0,5 |
| b) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. | 1 | 0,75 |
| c) On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Que signifie ce résultat pour la courbe $(\mathcal{C})$? | 0,5 | 0,5 |
| 2) a) Justifier que pour tout réel strictement positif : $f'(x) = \frac{x-2}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f. | 0,5 | 0,5 |

- b) Etudier signe de $\frac{x-2}{x}$. 1 0,75
- c) Dresser le tableau de variation de f. 1,5 1,25
- 3) a) Expliquer, pourquoi la courbe (C) passe par les points $A(1;1)$, $B(2;2-2\ln(2))$ et $C(e;e-2)$. 1 0,75
- b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en $x_0 = 2$. 1 0,75
- 4) a) Placer, dans le repère $\mathcal{R}$, les points A, B et C. (On prend : $\ln(2) = 0,7$ et $e = 2,7$) 1 0,75
- b) Tracer, dans le repère $\mathcal{R}$, (T) et (C). 2 1,5

Pour A2 seulement (indépendante des questions précédentes).

g est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{14x}{x^2 + 3}$.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1,5\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

- a) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $g(x) = 7 \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$ où u' est la fonction dérivée de la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 + 3$. En déduire une primitive G sur $\mathbb{R}$ de la fonction g. 0,5 + 0,5
- b) Calculer, en cm^2 , l'aire exacte $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\sqrt{3}$ et $x = 0$. 1

**Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2011**

MATHEMATIQUES – Série : A

N.B : - Les DEUX (02) exercices et le Problème sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique NON programmable autorisée.

Exercice 1 (05 points)

On considère les suites numériques $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$U_0 = 2 \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + 1) \quad \text{et} \quad V_n = U_n - 1$$

1°) Calculer U_1, V_0 et V_1 (0,25 pt x3)

2°) a) Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
(1pt)

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n (0,5pt+0,5pt)

3°) Soit la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $W_n = \ln V_n$

a) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son premier terme.
(1pt)

b) Ecrire W_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ (1pt + 0,25pt)

Exercice 2 (05 points)

Une boîte contient 10 jetons indiscernables au toucher dont 3 jaunes, 2 rouges et 5 blancs.

1°) On tire au hasard et simultanément 3 jetons de la boîte.

a) Déterminer le nombre de cas possibles. (1pt)

b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir trois jetons de même couleur ». (1pt)

B : « Parmi les trois jetons tirés, deux et deux seulement sont de même couleur ».

(1pt)

2°) On tire au hasard et successivement sans remise 3 jetons de la boîte.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « Obtenir dans l'ordre un jeton rouge et deux jetons blancs ». (1pt)

D : « Les deux jetons rouges sont tirés ». (1pt)

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Problème (10 points)

A1

A2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x(e^x - 2) - 3$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1°) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Interpréter géométriquement ce résultat. (1+0,5pt) (0,5pt)

2°) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (1pt) (0,5pt)

b) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Que peut-on dire pour la courbe $(\mathcal{C})$? (0,75pt) (0,5pt)

3°) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses (x^0x). (0,75pt) (0,75pt)

4°) a) Vérifier que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x^x(x^x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f . (1pt) (1pt)

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$ (1+0,5pt) (1+0,5pt)

5°) Ecrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = \ln 3$. (1pt) (1pt)

6°) Montrer que le point I($-\ln 2$; $-\frac{15}{4}$) est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$. (1pt) (0,75pt)

7°) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère. (0,5+1pt) (0,5+1pt)

Pour A2 seulement

8°) soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x - 3x$

a) Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,00pt) (1pt)

b) Calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (x^0x) et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=\ln 3$. (0,00pt) (1pt)

On donne : $\ln 2 = 0,7$ et $\ln 3 = 1,1$

Baccalauréat de l'enseignement général

Madagascar

Session 2012

MATHEMATIQUES – Série : A

N.B : - Les DEUX (02) exercices et le Problème sont obligatoires

- Machine à calculer non programmable autorisée.

EXERCICE 1. (05 points)

- 1- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique définie par son premier terme $u_0 = -1$ et sa raison $r = 3$.
- Exprimer u_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - Déterminer l'entier naturel n si $u_n = 59$. (0,5 pt)
 - Calculer la somme S tel que $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$. (1 pt)
- 2- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = e^{3n-1}$.
- Calculer v_0 et v_1 . (0,5 pt+0,5 pt)
 - Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^3$. (1 pt)
 - Exprimer en fonction de n , la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. (1 pt)

EXERCICE 2 : (05 points)

Un porte-monnaie contient 12 billets dont 5 billets de 500 Ar, 4 billets de 1.000 Ar et 3 billets de 2.000 Ar.

- On prend successivement au hasard et sans remise 3 billets du porte-monnaie.
 - Vérifier qu'il y a 1320 cas possibles. (1 pt)
 - Calculer la probabilité d'obtenir :
 - A : « trois billets de même valeur » ; (1 pt)
 - B : « un montant total de 4.500 Ar ». (1 pt)
- On prend au hasard et simultanément 2 billets du porte-monnaie.
Calculer la probabilité d'avoir :
 - C : « exactement deux billets de 500 Ar » ; (1 pt)
 - D : « au moins un billet de 1.000 Ar ». (1 pt)

PROBLEME : (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 1 - 2 \ln x.$$

On note par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

(0,75 pt + 0,5 pt) (0,5 pt + 0,25 pt)

A1

A2

1-

Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Que peut-on en conclure ?

2-

a) Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $f(x) = x(2 - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x})$. (0,5 pt) (0,75)

b) On donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,75 pt) (0,5 pt)

c) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = -\infty$,
Interpréter graphiquement la courbe ($\mathcal{C}$) et la droite ($\mathcal{D}$): $y = 2x$. (0,5 pt) (0,5 pt)

3

3-

a) Démontrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x-2}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f . (1 pt) (0,75 pt)

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. (1 pt) (0,75 pt)

4

a) c) Dresser le tableau de variation de f . (1 pt) (1 pt)

a) Calculer à 10^{-1} près ; $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$. (0,5 pt x3) (0,25 pt x3)
(On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$ et $e \approx 2,7$).

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse $x_0 = 2$. (1 pt) (0,75 pt)

c) Tracer (T), (D) et ($\mathcal{C}$) dans le même repère. (1,5 pts) (1,5 pts)

Pour A2 seulement

5-

Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = x^2 + x - 2x \ln x$.

a) Calculer $F'(x)$ et montrer que F est une primitive de f' sur $]0 ; +\infty[$ (1 pt)

b) Calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses ($x'Ox$) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. (1 pt)

=====

Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2013

MATHÉMATIQUES – Série : A

NB : - Les deux (02) exercices et le problème sont obligatoires.
 - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

Exercice 1 : (5 pts)

- 1- On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n - 1 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calculer U_1 et U_2 .

(1 pt)

- 2- Etant donnée la suite géométrique $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs, de premier terme V_0 , de raison $q = \frac{3}{4}$ et tel que $V_3 = \frac{27}{8}$.

a- Justifier que $V_0 = 8$.

(1 pt)

b- Exprimer V_n en fonction de n .

(1 pt)

c- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n + 3)$.

(0,5 pt)

- 3- Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de terme général $W_n = \ln \left(8 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)$ et de premier terme $W_0 = \ln 8$.

Déterminer, en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$, la somme : $S = W_0 + W_1 + \dots + W_5$.

(1,5 pt)

Exercice 2 : (5 pts)

Une urne contient 11 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 11 et de couleur uniforme rouge ou blanche. On sait qu'il y a :

- 3 boules rouges portant chacune un numéro pair.
- 7 boules blanches dont 5 portent chacune un numéro impair.

- 1- Après avoir reproduit le tableau ci-dessous, complétez-le :

(1 pt)

Boules	PORTANT NUMERO PAIR	PORTANT NUMERO IMPAIR	TOTAL
Rouges	3		
Blanches		5	7
TOTAL			11

- 2- Un enfant tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux boules portant chacune un numéro impair ».

(1 pt)

B : « Obtenir deux boules rouges et portant chacune un numéro pair ».

(1 pt)

- 3- Le contenu de l'urne reste inchangé. L'enfant tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « Avoir **exactement et successivement** deux boules rouges ».

(1 pt)

D : « Avoir deux boules blanches portant chacune un numéro impair **et deux seulement** ».

(1 pt)

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME (10 pts)

A₁ ; A₂

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$. On note par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

1) a) Vérifier que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 4 \left(1 - \frac{1}{e^x + 1} \right)$.

(1 pt) ; (0,5 pt)

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(0,75 pt) ; (0,5 pt)

c) Interpréter graphiquement ce résultat.

(0,5 pt) ; (0,25 pt)

2) a) Prouver que, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ où f' désigne la fonction

dérivée première de f .

(1 pt) ; (1 pt)

b) Après avoir étudié le sens de variation de f , dresser son tableau de variation.

(1,5 pt) ; (1 pt)

3) a) Calculer à 10^{-2} près : $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

(0,75 pt) ; (0,75 pt)

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

(1 pt) ; (1 pt)

4) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$, avec son asymptote, dans un même repère.

(1,5 pt) ; (1,5 pt)

5) Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = 4 \ln(e^x + 1)$.

a) On rappelle que $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$. Démontrer que F est une primitive de f .

(1 pt) ; (0,5 pt)

b) En déduire, en cm^2 et à 10^{-2} près, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par : la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

(1 pt) ; (1 pt)

On donne : $e = 2,7$; $e^2 \approx 7,38$; $\ln(e^2 + 1) = 2,12$; $\ln 2 \approx 0,7$

POUR A₂ SEULEMENT

6) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$. On note par (Γ) sa courbe représentative.

a) Démontrer que, pour tout réel x , $G(-x) + G(x) = 4$. Que signifie ce résultat pour la courbe (Γ) ?

(1 pt)

b) Tracer, à partir de la courbe $(\mathcal{C})$, la courbe (Γ) dans le même repère.

(1 pt)



A

Série : A

Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 02 heures 15 minutes

Code matière : 009

Coefficients : A1 = 1 ; A2 = 3

NB : - Les deux (02) exercices et le problème sont obligatoires.

- L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.

EXERCICE 1 : (5 points)

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $U_0 = -4$ et par la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 4$.

1) Calculer U_1 et U_2 . (0,5pt)

2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_0 . (1pt)

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . (1pt)

3) a) Exprimer en fonction de n , les sommes suivantes :

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (1pt)$$

$$\text{et } S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (1pt)$$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S'_n}{n+1}$ (0,5pt)

EXERCICE 2 (5 points)

L'évolution de la production rizicole y_i en tonnes d'un Petit Périmètre Irrigué (PPI) durant les six années est représentée par le tableau suivant :

ANNEE	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Production en tonnes y_i	65	70	63	68	76	81

1) Construire le nuage des points associé à la série $(x_i ; y_i)$.

Sur l'axe des abscisses : 1 cm pour unité.

Sur l'axe des ordonnées : 60 à l'origine et 1 cm pour 5 tonnes. (1pt)

2) Calculer les coordonnées du point moyen G. (0,5pt)

3) En utilisant la méthode de Mayer, déterminer une équation de la droite d'ajustement. (1,5pts)

/...

4) Tracer cette droite.

(0,5pt)

5) Déterminer graphiquement la production en tonnes du PPI en 2018. Vérifier le résultat à l'aide d'un calcul.

(1,5pts)

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - 2x + e^x$. On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

(A₁ ; A₂)

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(0,5pt ; 0,5pt)

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{e^x}{x} \right)$.

(0,5pt ; 0,5pt)

c) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(0,5pt ; 0,5pt)

2) a) Calculer $f'(x)$.

(1,5pts ; 1pt)

b) Dresser le tableau de variation de f .

(1,5pts ; 1,5pts)

3) a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (C) avec l'axe $(y'Oy)$.

(0,5pt ; 0,5pt)

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en A.

(1pt ; 1pt)

4) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 1)]$. Que signifie ce résultat pour la courbe (C) ?

(1,5pts ; 1pt)

5) Calculer la valeur exacte de $f(1)$ et celle de $f(2)$.

(0,5pt ; 0,5pt)

6) Tracer (T) et (C) sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

(2pts ; 1,5pts)

Pour A₂ seulement :

7) a) Calculer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

; (1pt)

b) En déduire l'aire géométrique en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

; (0,5pt)

On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $e^2 \approx 7,4$; $e \approx 2,7$.

SUJETS DE MATHÉMATIQUES

Baccalauréat - Série C

Série C - Session 1999

N.B. : Les **DEUX Exercices** et le **Problème** sont obligatoires.

EXERCICE - I (20 points)

Une urne contient 3 jetons blancs et n jetons rouges ($n \in \mathbb{N}^*$) indiscernables au toucher.

On choisit simultanément, au hasard, deux jetons de l'urne.

1° - On appelle « succès » l'obtention de deux jetons blancs.

Calculer, en fonction de n , la probabilité p_n d'un succès et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. (5 points)

2° - On appelle « gain » l'obtention de deux jetons de même couleur.

Calculer, en fonction de n , la probabilité q_n d'un gain et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$. (5 points)

3° - a) Trouver une solution particulière (u, v) de 9×9 , de l'équation entière d'inconnues (x, y) définie par : $5x - 4y = 1$. (1 point)

b) En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de 9×9 de l'équation : $5x - 4y = 6$ (1). (2 points)

c) Montrer alors que $5(x - x_0) - 4(y - y_0) = 0$. En déduire que $x - x_0$ et $y - y_0$ sont divisibles par 4 et 5 respectivement. (3 points)

4° - a) Donner les solutions générales de l'équation (1). (2 points)

b) Trouver dans 9×9 les solutions (x, y) de (1) vérifiant : $-18 \leq x \leq 0$ et $-24 \leq y \leq 0$. (2 points)

EXERCICE - II (20 points)

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$. I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

r est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. t est la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{BC}$. $f = \text{rot}$ et $g = \text{tor}$.

1° - a) Montrer que $\vec{KJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ et $\vec{JI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Montrer que AKIJ est un carré.

En déduire l'image de K par t et celle de J par r . (3 points)

b) Déterminer l'image de K par f et celle de J par g . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et g . (4 points)

c) Déterminer l'image de A par $go(f^{-1})$. Caractériser alors cette transformation. (2 points)

2° - Utiliser les méthodes de décomposition de r et t en deux symétries orthogonales pour retrouver $go(f^{-1})$. (4 points)

3° - a) Tracer les cercles C et C' de diamètres respectifs [AB] et [AC]. (1 point)

b) Soit r' la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point de C et on pose $M' = r'(M)$. Montrer que C' est l'image de C par r' . Construire M' . (1 point)

c) M étant distinct de I, les droites (IM) et (IM') recoupent respectivement C' en N' et C en N.

Montrer que N' est l'image de N par r' . (2 points)

d) On construit les carrés MIM'P et NIN'Q. Montrer que les points P et Q sont respectivement les images des points M et N par une similitude directe S dont on précisera centre, rapport et angle. (2 points)

e) En déduire les ensembles décrits par les points P et Q lorsque M décrit C. (1 point)

PROBLÈME (60 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

Les parties A et B sont largement indépendantes.

PARTIE A

1° - a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' fonction dérivée de f . (3 points)

b) En effectuant le changement de variable $t = -u$, montrer que f est une fonction impaire. Étudier les variations de f sur le domaine d'étude $[0, +\infty[$. (4 points)

2° - a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $\frac{e^t}{1+e^{2t}} \leq e^{-t}$. (1 point)

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$: $f(x) \leq 1$. (1 point)

c) Montrer que f admet une limite finie ℓ , en $+\infty$, avec $\ell \leq 1$. (On ne cherchera pas à calculer ℓ). (1 point)

d) Tracer (C) , (on prendra $\ell = \frac{\pi}{4}$ pour la construction). (6 points)

3°- Soit g la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \ln(\tan x)$, pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, calculer g' fonction dérivée de g et dresser le tableau de variation de g . (3 points)

b) Montrer que g réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle J que l'on déterminera. On note g^{-1} la réciproque de g .

c) Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} sur le même repère que (C). (2 points)
(6 points)

4°- Soit H une fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $H(x) = (f \circ g)(x)$, pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que H est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et que sa dérivée H' est une fonction constante. (3 points)

b) Montrer alors que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$: $H(x) = x - \frac{\pi}{4}$. (5 points)

c) En déduire que : $\int_0^{\ln \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt = -\frac{\pi}{12}$. (On remarquera que $\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$). (5 points)

PARTIE B

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $U_n = \int_0^{\ln \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}} e^{nt} dt$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1°- a) Utiliser la définition du terme U_n pour montrer que : pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $U_{2p} + U_{2p+2} = \frac{\sqrt{3} \left(\frac{1}{3}\right)^p - 1}{2p+1}$. (6 points)

b) Calculer U_0 et U_2 . (3 points)

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $U_n \geq 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $0 \leq U_{2n} \leq \frac{\sqrt{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{2n+1}$.

Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n}$. (6 points)

2°- a) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{Z}$: $(-1)^p U_{2p} + (-1)^p U_{2p+2} = \frac{\sqrt{3} \left(\frac{-1}{3}\right)^p - (-1)^p}{2p+1}$. (1 point)

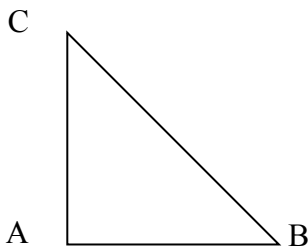
a) En déduire que : $(-1)^{n-1} U_{2n} - \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1}{1} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{-1}{3}\right)^1 - (-1)^1}{3} + \dots + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} - (-1)^{n-1}}{2n-1}$. (2 points)

c) Soit $S_n = \left[\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^1 - (-1)^1 \frac{\sqrt{3}}{3}}{1} + \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - (-1)^2 \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^n - (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{3}}{2n-1} \right]$

que l'on écrit $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^p - (-1)^p \frac{\sqrt{3}}{3}}{2p-1}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

Montrer, en utilisant 2°-b), que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$. (2 points)

Exercice 1 4 points



Dans un plan orienté $\mathcal{P}$, on considère le triangle direct ABC isocèle et rectangle en A. (Voir figure). On note par :

- I le milieu du segment [BC] ;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$;
- $g = t \circ r_B$ et $f = r_C \circ g$.

1. **Méthode complexe :** $\mathcal{P}$ étant muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- a. Déterminer z_A, z_B, z_C et z_I affixes respectives des points A, B, C et I.
- b. Donner l'expression complexe de f.
- c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

(0,5 pt)

(1 pt)

(0,5 pt)

2. **Méthode géométrique :**

- a. Caractériser g en décomposant t et r_B en deux symétries orthogonales.
- b. Caractériser f en décomposant r_C et g en deux symétries orthogonales.

(0,75 pt)

(0,75 pt)

3. Soit S la similitude plane indirecte de centre A et qui transforme B en I.

- a. Déterminer le rapport de S.
- b. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et passant par B. La demi-droite [AI], d'origine A et contenant I, coupe $(\mathcal{C})$ au point B'. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale d'axe (Δ) qui transforme B en B'. Déterminer alors l'axe de S.

(0,25 pt)

(0,25 pt)

Exercice 2 4 points

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules sont blanches dont une porte le numéro 0, une le numéro 1 et trois le numéro 2. Cinq boules sont noires dont quatre portent le numéro 2 et une le numéro 3.

1. On tire au hasard, simultanément trois boules du sac. Calculer les probabilités des événements suivants :

- A : « Toutes les boules sont blanches ».
- B : « Les boules sont de couleurs différentes ».
- C : « On obtient la boule numérotée 0 ».
- D : « Les numéros des boules sont pairs ».

(0,5 pt)

(0,5 pt)

(0,5 pt)

(0,5 pt)

2. Dans cette partie, on enlève du sac la boule numérotée 0. L'épreuve est maintenant la suivante : du sac contenant les neuf boules restantes, on tire au hasard, successivement et avec remise deux boules. On note par **a** le numéro apparu sur la première boule, **b** le numéro apparu sur la deuxième et **d** = PGCD(**a**, **b**) le plus grand commun diviseur de **a** et **b**.

- a. Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par **d** est $D = \{ 1, 2, 3 \}$.
- b. Pour tout $k \in D$, on désigne par E_k l'ensemble des couples (**a**, **b**) tels que **d** = k, c'est-à-dire : $E_k = \{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) / \text{PGCD} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k \}$. On note par p_k la probabilité de E_k .

(0,25 pt)

Montrer que $p_1 = \frac{31}{81}$, puis déterminer p_2 et p_3 .

(0,75 pt)

- c. Calculer la probabilité de l'événement E : « l'équation $\mathbf{ax} + \mathbf{by} = 2$, d'inconnues (**x**, **y**) de 9×9 admet des solutions ».

(0,5 pt)

- d. Résoudre dans 9×9 l'équation : $3x + 2y = 2$.

(0,5 pt)

Problème 12 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x \in]0; 1[\\ f(x) = \frac{x-1}{e^x - x - 1} & \text{si } x \in [1; +\infty[. \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 5 cm.

Partie A

- Soit g la fonction définie sur $]0; 1[$ par : $g(x) = \ln x - \ln(1-x)$.
 - Résoudre l'équation $g(x) = 0$. (0,5 pt)
 - En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$. (0,5 pt)
 - Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) = g(x)$. (0,5 pt)
- Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = (2-x)e^x - 2$.
 - Montrer que h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. (0,5 pt)
 - Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{3}{2}; 2[$. (0,5 pt)
 - En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $h(x)$. (0,5 pt)
 - Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$. (0,5 pt)
- Montrer que f est continue en 0 et en 1. (0,5 pt)
 - Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{e-2}$.
Interpréter graphiquement ces résultats. (1,5 pt)
 - Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale que l'on précisera. (0,5 pt)
- Utiliser l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour montrer que $f(\alpha) = -1 + \frac{2}{\alpha}$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$. (1 pt)
 - Tracer $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[0; 3]$ en précisant les demi-tangentes en 0 et en 1. (1 pt)

On donne pour la construction :

x	0,5	1	$\alpha = 1,6$	2	3
$f(x)$	-0,69	0	0,25	0,22	0,12

Partie B

Soit $\alpha \in]\frac{3}{2}; 2[$, le réel déterminé dans la question 2.b. de la partie A.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$.
 - Utiliser la monotonie de f sur $[1; \alpha]$ pour montrer que : $0 \leq I_1(\alpha) \leq \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$. (0,5 pt)
 - Etudier le sens de variation de la fonction $t \mapsto e^t - t - 1$ sur $[1; +\infty[$. En déduire que pour tout $t \geq 1$, $e^t - t - 1 \geq e - 2$. (1 pt)
 - Montrer alors que $0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}$. (0,5 pt)
 - Montrer que la suite $(I_n(\alpha))$ est convergente. Préciser sa limite. (1 pt)
- Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$.
 - En remarquant que $f(x) \geq -\ln 2$, pour tout $x \in]0; 1[$, montrer que :
 $a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$. (0,5 pt)
 - Pour quelles valeurs de a et b , la dernière inégalité est-elle une égalité ? (0,5 pt)

Exercice – 1 (04 points)

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $AB = AC$ et $\text{mes}(\widehat{AB, AC}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Dans cette question, le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
 - a. Déterminer les affixes respectives z_A, z_B, z_C des points A, B, C. (0,25 pt)
 - b. Soit T la transformation ponctuelle du plan $(\mathcal{P})$ vers $(\mathcal{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -z + 2i$.
Caractériser géométriquement T. (0,25 pt)
 - c. Donner l'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (0,25 pt)
 - d. On pose $f = T \circ R$. Donner l'expression complexe de f . (0,25 pt)
En déduire la nature et les éléments géométriques de f . (0,25 pt)
 - e. On note I le centre de f ; donner la nature du quadrilatère ABIC. Justifier votre réponse. (0,25 pt)

Dans toute la suite, on utilisera une méthode géométrique. On pose $AB = AC = a$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit S la similitude plane directe de centre I qui transforme A en B. On note $C' = S(C)$; $O' = S(O)$ où O est le milieu du segment [BC].
 - a. Donner le rapport et l'angle de S. (0,50 pt)
 - b. Montrer que $C' \in [IA]$. (0,25 pt)
 - c. Donner l'image par S du segment [IA] et montrer que O' est le milieu du segment [IB]. (0,75 pt)
3. On considère le système de points pondérés $\{(A ; -1), (B ; 1), (C ; 1)\}$.
 - a. Quel est le barycentre G de ce système ? (0,25 pt)
 - b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$. (0,75 pt)

Exercice – 2 (04 points)

1. On considère deux dés cubiques parfaitement équilibrés D_1 et D_2 tels que :
 - D_1 porte sur ses six faces les chiffres 1, 1, 2, 3, 3, 4.
 - D_2 porte sur ses six faces les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On lance simultanément ces deux dés. On note **a** le chiffre lu sur D_1 et **b** le chiffre lu sur D_2 .
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir un couple (a, b) tel que $a = b$ » (0,50 pt)
 B : « obtenir un couple (a, b) de nombres impairs ». (0,50 pt)
2. On prend le dé D_2 dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
On lance une fois ce dé. A chaque entier n obtenu ($1 \leq n \leq 6$), on associe le couple d'entiers (a, b) tels que $a = 5n + 3$ et $b = 3n + 1$.
 - a. Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donner le couple (a, b) correspondant ainsi que leur plus grand commun diviseur d ($d = \text{PGCD}(a, b)$). (1,00 pt)
 - b. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - C : « a et b sont des nombres premiers » (0,50 pt)
 - D : « a et b sont premiers entre eux ». (0,50 pt)
3. Résoudre l'équation $13x - 7y = 11$, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (1,00 pt)

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_0(x) = e^{-x}$.
On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

PARTIE A. Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. (0,25 pt)

2. Dans toute la suite de cette question, on distinguera les cas n pair et n impair.
 - a. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $x \rightarrow -\infty$. (0,50 pt)
 - b. Calculer $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n . (2,00 pts)
 - c. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,50 pt)
En déduire les positions relatives de $(\mathcal{C}_{n+1})$ et $(\mathcal{C}_n)$. (0,50 pt)
3. Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes indépendants de n dont on précisera les coordonnées. (0,50 pt)

PARTIE B.

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
 - a. Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^2e^{-x}$ est solution de (E). (0,50 pt)
 - b. Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation (E') : $y'' + 2y' + y = 0$. (0,25 pt)
 - c. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). (0,75 pt)
 - d. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$ et exprimer f en fonction de f_0, f_1 et f_2 . (0,75 pt)
2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.
 - a. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (1,00 pt)
 - b. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Unités $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$; $\|\vec{j}\| = 5 \text{ cm}$. (0,50 pt)
On donne : $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{-2} \approx 0,13$.

PARTIE C.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f_n(t) dt$ (On rappelle que $0! = 1$).

1. a. Calculer $I_0(x)$, $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x . (0,75 pt)
- b. Utiliser la question B 1.d. pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe $(x'Ox)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,50 pt)
2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$. (0,50 pt)
- b. En déduire $I_n(x)$ en fonction de n et x . (0,50 pt)
- c. Pour n fixé, calculer la limite de $I_n(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. (0,25 pt)
3. a. On prend $x = 1$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n(1) \leq \frac{1}{(n+1)!}$. (0,50 pt)
- b. En déduire la limite de $I_n(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$. (0,25 pt)
- c. Déduire de la question 2. b. l'expression de $I_n(1)$ en fonction de n . (0,25 pt)
- d. Utiliser les résultats précédents pour montrer que : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right]$. (0,50 pt)

N.B. : Le candidat doit traiter les **DEUX** exercices et le problème.

EXERCICE 1 (4 points)

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère le rectangle ABCD tel que $AD = 2AB = 4$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et (C) le cercle de centre B passant par A.

1°- a)– Déterminer le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1), (C,1), (D, -1)\}$. **(0,25 pt)**

b)– On considère l'ensemble (E_k) des points M du plan $(\mathcal{P})$ tels que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - \|\overrightarrow{MD}\|^2 = k$.

Calculer le réel k pour que (E_k) soit le cercle (C) . **(0,50 pt)**

2°- Soit S la similitude plane directe qui transforme A en I et B en D et soit σ la symétrie orthogonale d'axe (BD).

On se propose dans cette question de déterminer géométriquement les éléments caractéristiques de S.

a) – Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) par S. **(0,25 pt)**

b) – Soit Ω le point d'intersection de (C) et (C') autre que I. Montrer que (DB) est la médiatrice du segment $[\Omega I]$ et que $\Omega = \sigma(I)$. **(0,50 pt)**

c) – En déduire que $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega D}) = \text{mes}(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB})$ et que $\frac{\|\overrightarrow{\Omega D}\|}{\|\overrightarrow{\Omega B}\|} = \frac{\|\overrightarrow{ID}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|}$. **(0,25 pt)**

d) – En utilisant le triangle rectangle isocèle ICD et le point B, calculer la mesure de l'angle

$(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB})$ et le rapport $\frac{\|\overrightarrow{ID}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|}$. **(0,50 pt)**

e) – En déduire le centre, le rapport et l'angle de S. **(0,25 pt)**

3° - On rapporte maintenant le plan $(\mathcal{P})$ au repère orthonormé direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

a) – Déterminer les affixes des points A, B, D et I. **(0,50 pt)**

b) – Donner l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. **(0,50 pt)**

c) – Donner l'expression complexe de σ et montrer que l'image par σ du point I est le centre Ω de S. **(0,50 pt)**

EXERCICE 2 (4 points)

1°- a) – Résoudre dans 9×9 l'équation $11x - 8y = 1$. **(0,50 pt)**

b) – Calculer PGCD (319, 232, 145) puis résoudre dans 9×9 l'équation $319x - 232y = 145$. **(1,00 pt)**

2° - Une urne contient 81 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 81. L'épreuve E consiste à tirer au hasard et successivement deux boules de l'urne, sans remettre dans l'urne la boule tirée.

a) – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Tirer deux boules portant deux numéros pairs ». **(0,50 pt)**

B : « Tirer deux boules portant deux numéros multiples de 3 ». **(0,50 pt)**

C : « Tirer deux boules portant deux numéros qui sont des nombres premiers ». **(0,50 pt)**

3° Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé. On donne les deux droites (D_1) d'équation $11x - 8y - 1 = 0$ et (D_2) d'équation $319x - 232y - 145 = 0$. (On ne demande pas de construire ces deux droites). A l'épreuve E décrit précédemment, on associe le point $M(x, y)$ du plan où x est le numéro porté par la première boule tirée et y par la seconde. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

D : « Le point M appartient à la droite (D_1) ». **(0,50 pt)**

E : « Le point M n'appartient pas à la droite (D_2) ». **(0,50 pt)**

PROBLEME**(12 points)**

On considère la fonction numérique f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln |x|} & \text{si } x < 0 \\ (x+1)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

Partie A

- 1° - Etudier la continuité et la dérivabilité de f en O . (0,25+0,5pt)
- 2° - On considère la fonction g définie sur $] -\infty ; 0 [$ par $g(x) = 1 - x + x \ln |x|$.
- a) - Etudier les variations de g . (0,75 pt)
- b) - Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in] -4 ; -3 [$ tel que $g(\alpha) = 0$. (0,25 pt)
- c) - En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,25 pt)
- 3° - a) - Montrer que pour tout $x < 0$, $x \neq -1$, $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$. (0,50 pt)
- b) - Vérifier que $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = 1 + \alpha$ où α est défini dans 2°/b). (0,25 pt)
- c) - Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (1,25 pt)
- 4° - a) - Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$. (0,50 pt)
- b) - Calculer à 10^{-1} près : $f(-8)$, $f(-6)$, $f(-2)$ et $f(-\frac{1}{2})$. (0,50 pt)
- c) - Prendre $\alpha = -3,6$ et construire la courbe $(\mathcal{C})$. (0,50 pt)

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 6 \approx 1,8$; $e \approx 2,7$.

Partie B

- 1° - On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 2y = e^{-x}(-6x - 4)$.
- a) - Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$ est solution de (E). (0,50 pt)
- b) - Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' - y' - 2y = 0$. (0,25 pt)
- c) - Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). (0,50 pt)
- d) - Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. (0,50 pt)
- 2° - On pose $I_\lambda = \int_0^\lambda (x+1)^2 e^{-x} dx$ où $\lambda > 0$.
- a) - Par deux intégrations par parties successives, exprimer I_λ en fonction de λ . Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda$. (1,25+0,25pt)
- b) - En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine plan (D) ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$. (0,25 pt)

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{n^3} \left[(1+n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2+n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \dots + (n+n)^2 e^{-\frac{n}{n}} \right].$$

- 1° - Vérifier que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = U_n$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = U_n + \frac{e-4}{ne}$ (f étant définie dans la partie A], $x \geq 0$). (1,00 pt)

- 2° a) - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$. Vérifier que $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset [0,1]$. (0,25 pt)

- b) - En utilisant le sens de variation de f sur $[0, 1]$, montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. (0,50 pt)

- c) - En déduire que $U_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq U_n$ et que $I_1 \leq U_n \leq I_1 + \frac{4-e}{ne}$. (0,5+0,25 pt)

- d) - Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite. (0,50 pt)

N.B. : Le Candidat doit traiter l'exercice et les DEUX problèmes.

EXERCICE (4 points)

- I – Une roue est divisée en douze secteurs identiques : trois rouges, quatre blancs, quatre verts et un noir. Quand on fait tourner la roue, chaque secteur a la même probabilité d'être pointé par un index fixe lorsque la roue s'arrête.
- 1°- Setra tourne la roue une fois. Déterminer les probabilités des événements suivants :
- A : « l'index pointe sur un secteur noir. (0,25 pt)
- B : « l'index pointe sur un rouge ou un blanc. (0,25 pt)
- 2°- On adopte la règle suivante : lors d'une partie, le joueur marque 10 points si l'index pointe sur un secteur noir ; 5 points sur un rouge ; 1 point sur un vert et (– 3) points sur un blanc. Naivo joue trois parties successives d'une manière indépendante. Déterminer les probabilités des événements :
- C : « Naivo totalise 25 points ». (0,75 pt)
- D : « Naivo totalise au moins 21 points ». (0,75 pt)
- II – 1°- Pour $\dot{x}$ dans $9/69$, donner toutes les valeurs de $\dot{x}^2$. (0,25 pt)
- 2°- Donner alors les quatre éléments de $9/69$ qui sont solutions de l'équation $\dot{x}^p = \dot{x}$, p étant un entier naturel non nul. (0,75 pt)
- 3°- Montrer que pour tout $\dot{x}$ de $9/69$ on a $\dot{x}^3 = \dot{x}$. (0,25 pt)
- 4°- En déduire que pour tout entier naturel n ; $n^3 - n$ est divisible par 6. (0,75 pt)

PROBLEME 1 (7 points)

Dans un plan orienté $\mathcal{P}$, soit ABCD un carré direct, de centre J.

Partie A.

- I – On désigne par τ : la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- t : la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- ℓ : l'homothétie de centre C, de rapport $\sqrt{3}$.
- 1 – a) Montrer que $\tau' = t \circ \tau$ est une rotation dont on précisera l'angle. (0,25 pt)
- b) Déterminer les images des points A et B par τ' . (0,25 pt)
- c) En déduire le centre de τ' . (0,75 pt)
- 2 – On note $f = \tau' \circ \ell$.
- a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport. (0,25 pt)
- b) Soit I le centre de f . Après avoir déterminé l'image de C par f , prouver que $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et $ID = \sqrt{3} \cdot IC$. (0,75 pt)
- c) En considérant le triangle (ICD), donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$ et placer I sur la figure. (0,75 pt)
- d) Déterminer et construire l'ensemble : $(E) = \{M \in \mathcal{P} / MD^2 - 3MC^2 = 0\}$ (1 pt)
- II – On note K le milieu de [CD]. On choisit comme repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
1. Quelles sont les affixes de A, C, J, K ? (0, 5 pt)
2. On note S la similitude directe qui transforme A en J et C en K.
- a) Ecrire l'expression complexe de S. (0,25 pt)
- b) Donner ses éléments géométriques. (0,25 pt)

Partie B.

E, F, G sont trois points non alignés au plan $\mathcal{P}$, θ un réel donné non nul.

On note : R_F : la rotation de centre F et d'angle θ .

R_E : la rotation de centre E et d'angle θ .

On note $H = R_F(E)$, $P = R_F(G)$ et $Q = R_E(G)$.

1. Quelle est la nature de $R_E \circ R_F^{-1}$? (0,75 pt)
2. En déduire que E H P Q est un parallélogramme. (1,25 pt)

PROBLEME 2**(9 points)****Partie A.**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$, $\|\vec{j}\| = 5 \text{ cm}$.

1. On pose $g(x) = -\frac{1}{x} + \ln x$.

a) Etudier la variation de g .

(0,5 pt)

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ et en déduire le signe de

$g(x)$ suivant les valeurs de x .

(0,5+0,25 pt)

2. Etudier la variation de f .

(1 pt)

3. Ecrire $f(\alpha)$ sans $\ln \alpha$ et en déduire que $\frac{e^{-2}}{2} < f(\alpha) < 2\frac{e^{-3/2}}{3}$.

(0,25+ 0,5 pt)

4. Tracer la courbe (C).

(0,5 pt)

5. On pose $G(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt, \forall x > 0$. Montrer que G est dérivable et calculer $G'(x)$. **(0,25+ 0,5 pt)**

Partie B.

On pose $\forall x > 0, h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à $h(x) = x$.

(0,25 pt)

2. Calculer $h'(x)$ et vérifier que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], -\frac{4}{9} e^{2/3} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{1/2}$.

En déduire qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], |h'(x)| \leq k$. **(0,25+0,5+0,5pt)**

3. Prouver que $\forall x, y \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], |h(x) - h(y)| \leq k |x - y|$

(0,75 pt)

4. On définit la suite (U_n) par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$.

(0,5 pt)

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq k |U_n - \alpha|$

(0,75 pt)

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$ et calculer $\lim U_n$. **(0,25 + 0,25 pt)**

Partie C.

On considère l'équation différentielle (E) $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$

1. Vérifier que la fonction f de la partie A est solution de (E).

(0,25 pt)

2. Résoudre alors (E).

(0, 5 pt)

On donne : $e^{-2} \approx 0,13$, $e^{-3/2} \approx 0,22$, $e^{1/2} \approx 1,6$, $e^{2/3} \approx 1,94$.

N.B. : - L'Exercice et les DEUX Problèmes sont obligatoires.
- Machine à calculer autorisée.

Exercice (4 points)

- I) Un dé cubique a quatre faces numérotées 0 et deux faces numérotées 1. Quand on lance ce dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.
- 1.- On lance ce dé une fois. Calculer les probabilités des événements suivants :
- A : « La face supérieure du dé porte le numéro 0 ». (0,50 pt)
B : « La face supérieure du dé porte le numéro 1 ». (0,25 pt)
- 2.- On lance ce dé cinq fois de suite ; les lancers étant indépendants, calculer les probabilités des événements suivants :
- C : « Le numéro 0 apparaît exactement une fois ». (0,50 pt)
D : « Le numéro 1 apparaît exactement cinq fois ». (0,25 pt)
E : « Le numéro 0 apparaît au moins une fois ». (0,50 pt)
- II) 1.- a) Convertir dans la base 10 l'entier x écrit dans le système binaire : $x = \overline{(10101)}_2$. (0,25 pt)
b) Convertir dans le système binaire l'entier naturel $y = 23$ de la base 10. (0,25 pt)
- 2.- a) Dresser la table de multiplication et la table d'addition de $9/29$. (0,25 + 0,25 pt)
b) Résoudre dans $9/29$ l'équation à une inconnue x : $x^2 + x + \overline{2} = \overline{0}$. (0,50 pt)
c) Résoudre dans $9/29 \times 9/29$ le système de deux équations à deux inconnues x et y
- $$\begin{cases} \overline{2}x + y = \overline{0} \\ x + \overline{3}y = \overline{0} \end{cases} \quad (0,50 \text{ pt})$$

Problème 1 (7 points)

On considère un triangle (ABC) rectangle en A avec mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ et $AB = 2AC = 8 \text{ cm}$.

Soient I, J et E les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].

PARTIE A

- 1.- a) Déterminer et construire le barycentre G du système des points pondérés $\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}$. (0,50 pt)
b) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et calculer la distance AG. (0,25 + 0,25 pt)
c) Montrer que le point E est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC). (0,25 pt)
d) Construire le point D tel que (ABDC) soit un rectangle et déterminer 2 isométries affines qui laissent globalement invariant le rectangle (ABDC). (0,25 + 0,25 pt)
e) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M vérifiant : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 20$. (0,50 pt)
Vérifier que E appartient à (C). (0,25 pt)
- 2.- Montrer que pour tout point M du plan contenant A, B et C $-\frac{3}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur fixe $\overrightarrow{w}$ que l'on précisera. Construire le point K tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AK}$. (0,25 + 0,25 pt)

PARTIE B

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Soient S_1 la similitude plane directe qui transforme C en C et I en A ; S_2 la similitude plane directe qui transforme I en I et A en C.

- 1.- Déterminer Z_A, Z_B, Z_C, Z_I affixes respectives des points A, B, C et I. (0,50 pt)
- 2.- a) Déterminer les expressions complexes de S_1 et S_2 . (0,5 + 0,5 pt)
b) Préciser les éléments caractéristiques de ces deux similitudes directes. (0,5 + 0,5 pt)
- 3.- Soit $R = S_2 \circ S_1$.
a) Préciser l'image de I par R. (0,25 pt)
b) Donner l'expression complexe associée à la transformation ponctuelle R. (0,50 pt)

- c) En déduire ses éléments géométriques. (0,25 pt)
- 4.- Soit g la transformation ponctuelle réciproque de S_1 .
Caractériser g et trouver la représentation complexe associée à g . (0,25 + 0,25 pt)

Problème 2 (9 points)

Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = x [\ln x]^n \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 2 cm.

PARTIE I

On désigne par $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1.- Calculer I_1 . (0,50 pt)
- 2.- A l'aide d'une intégration par parties,
 - a) Calculer I_2 . (0,25 pt)
 - b) Donner une expression de I_{n+1} en fonction de I_n . (0,50 pt)
 - c) En déduire I_3 . (0,25 pt)

PARTIE II Etude des fonctions f_n pour n fixé

- A/ 1.- a) Montrer que f_n est continue en 0. (0,25 pt)
 b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0. (0,25 pt)
 c) En déduire la tangente à (C_n) au point d'abscisse $x_0 = 0$. (0,25 pt)
- 2.- Montrer que l'équation $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$ admet trois solutions dans l'intervalle $[0, +\infty[$. (0,50 pt)
 En déduire que toutes les courbes (C_n) passe par 3 points fixes dont on précisera les coordonnées. (0,25 pt)
- B/ Variation de f_n , pour $n \geq 2$.
- 1.- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$. (0,25 pt)
 - 2.- Montrer que pour tout $x > 0$: $f'_n(x) = [n + \ln x] [\ln x]^{n-1}$. (0,50 pt)
 - 3.- Pour n impair
 - a) Montrer que $f'_n(x)$ et $[n + \ln x]$ sont de même signe. (0,25 pt)
 - b) Dresser le tableau de variation de f_n . On calculera en particulier $f_n(e^{-n})$. (0,50 + 0,25 pt)
Application : Dresser le tableau de variation de f_3 . (0,25 pt)
 - 4.- Pour n pair
 - a) Montrer que :
 - pour tout $x \in]0, e^{-n}[\cup]1, +\infty[$: $f'_n(x) > 0$. (0,25 pt)
 - pour tout $x \in [e^{-n}, 1]$: $f'_n(x) \leq 0$. (0,25 pt)
 - b) Dresser le tableau de variation de f_n . (0,50 pt)
Application : Dresser le tableau de variation de f_2 . (0,25 pt)
 - 5.- Etudier les positions relatives de (C_2) et (C_3) respectivement dans les intervalles $]1, e[$ et $[e, +\infty[$. (0,25 + 0,25 pt)
 - 6.- Montrer que le point $I(1, 0)$ est un point d'inflexion de (C_3) . (0,25 pt)
 - 7.- Tracer dans un même repère (C_2) et (C_3) . (0,50 + 0,50 pt)
- C/ On note g la restriction de f_2 à l'intervalle $[1, e]$.
- 1.- Montrer que g est une bijection de l'intervalle $[1, e]$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,25 pt)
 - 2.- Calculer $(g^{-1})'(e)$, g^{-1} étant la fonction réciproque de g . (0,25 pt)
 - 3.- Représenter graphiquement g^{-1} dans le même repère que (C_2) et (C_3) . (0,50 pt)
 On donne : $e^{-3} \approx 0,05$; $e^{-2} \approx 0,13$; $e \approx 2,7$.

N. B : - L'Exercice et les DEUX Problèmes sont obligatoires.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE (4 points)

- 1°) On donne l'équation : $2x - y = 1$ (1).
x et y étant les inconnues, x et y sont des entiers relatifs.
a/ Trouver une solution particulière (x_0, y_0) de cette équation. (0,25pt)
b/ Résoudre dans 9×9 l'équation (1). (0,75pt)
- 2°) Un entier naturel A est tel que :
- dans la base 10, A s'écrit : $A = b + 6$.
- dans le système binaire, A s'écrit : $A = (1a1)_2$.
Trouver une relation qui lie a et b. (0,50pt)
- 3°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système à deux inconnues x et y suivant :
$$\begin{cases} x + y = 60 \\ \text{PGCD}(x, y) = 12. \end{cases}$$
 (0,50pt)
- 4°) Deux urnes identiques U_1 et U_2 contiennent chacune :
- deux boules numérotées chacune 0.
- trois boules numérotées chacune 1.
- une boule numérotée 2.
On tire au hasard une boule de U_1 puis on extrait au hasard et simultanément deux boules de U_2 .
a/ Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Les boules obtenues portent le même numéro ». (0,50pt)
B : « La somme des numéros notés est égale à 4 ». (0,50pt)
b/ Soient x le numéro de la première boule tirée et y la somme des numéros des boules obtenues au deuxième tirage. Calculer la probabilité de l'événement :
C : « Le couple (x, y) est solution de l'équation $2x - y = 1$ ». (1,00pt)

PROBLEME 1 (7 points)

Soit (ABC) un triangle isocèle et rectangle en A avec $AB = AC = 4\text{cm}$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA] et E le symétrique de A par rapport à J.

PARTIE 1

- 1°) a/ Montrer que $\vec{JI} = \frac{\vec{JA} + \vec{JB}}{2}$ et $\vec{JK} = \frac{\vec{JA} + \vec{JC}}{2}$. En déduire que $\vec{IK} = \frac{1}{2} \vec{BC}$. (0,25+0,25pt)
- b/ Montrer que $\vec{KI} = \frac{\vec{KA} + \vec{KB}}{2}$ et $\vec{KJ} = \frac{\vec{KB} + \vec{KC}}{2}$. En déduire que $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{AC}$. (0,25+0,25pt)
- c/ Montrer que le quadruplet (AIJK) est un carré. Faites une figure. (0,25+0,50pt)
- 2°) Soit r la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{BC}$.
a/ Déterminer l'image du point I par t et celle de K par r. (0,25+0,25pt)
b/ Déterminer l'image de I par f = rot.
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. (0,25+0,25pt)
c/ Soit g = tor. Déterminer l'image de K par g. (0,50pt)
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g. (0,25pt)
- 3°) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en E et J en C.
Préciser le rapport et l'angle de S. (0,50+0,50pt)
N.B. : Justifier votre réponse.

PARTIE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (A, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) où $\vec{e}_1 = \frac{1}{4} \vec{AB}$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{4} \vec{AC}$.

Dans ce repère, on donne les points : A(0, 0), B(4, 0) et C(0, 4).

- 1°) Préciser les coordonnées des points E et J. (0,25pt)
- 2°) a/ Donner l'écriture complexe de S. (S étant la similitude plane directe donnée dans la PARTIE 1, 3°). (1,00pt)
b/ En déduire les coordonnées du centre Ω de S. (0,50pt)
- 3°) Soit la transformation $\mathcal{S} = \text{SoS}_{(AB)}$, où $S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).

a/ Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\mathbb{C}$.

(0,25pt)

b/ Déterminer l'écriture complexe associée à $\mathbb{C}$.

(0,50pt)

PROBLEME 2 (9 points)

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} (1-x) e^{\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + \frac{x}{2} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(C) sa représentation graphique dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm).

PARTIE A

1°) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, 0 [$ par : $g(x) = (1-x) \ln(1-x) - x$.

a/ Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

(1,50pt)

b/ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

(0,25pt)

2°) a/ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

(0,25pt)

b/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(0,25pt)

c/ Pour $x > 0$, montrer que :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{\frac{x}{2}} \right] - e^{\frac{x}{2}}.$$
 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(Indication : poser $X = \frac{x}{2}$).

(0,50+0,25pt)

d/ En utilisant les résultats de b/ et c/, quelles conclusions peut-on tirer sur f puis sur (C) ?

(0,50pt)

3°) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(0,25+0,25pt)

b/ Pour tout x élément de l'intervalle $] -\infty, 0 [$, montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{2(1-x)}$.

(0,25pt)

c/ Pour tout x élément de l'intervalle $] 0, +\infty [$, calculer $f'(x)$.

(0,50pt)

d/ Dresser le tableau de variation de f .

(0,50pt)

4°) Etudier les branches infinies de (C).

(0,25+0,25pt)

5°) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en deux points distincts

d'abscisses respectives 1 et α avec $-2 < \alpha < -1$.

(0,25+0,50pt)

6°) Tracer la courbe (C) en précisant les demi-tangentes à l'origine O du repère.

(0,75+0,25pt)

7°) Calculer, en cm^2 , l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

(0,25pt)

PARTIE B

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_0 = \sqrt{e} - 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{2^{n+1}(n!)^2} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$.

1°) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

(0,25pt)

2°) Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}[(n+1)!]^2}$.

(0,50pt)

3°) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n.$$

(0,25pt)

4°) Donner alors l'expression de I_n en fonction de n .

(0,25pt)

On donne :

$$\ln 2 \approx 0,7$$

$$\ln 3 \approx 1,1$$

$$\sqrt{e} \approx 1,6$$

- N.B. : - L'Exercice et les deux problèmes sont obligatoires.
 - Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (4 points)

I – Dans un système de numération de base n , on considère les nombres

$$a = \overline{211}, b = \overline{312} \text{ et } c = \overline{133032}$$

- 1 – a) Sachant que $c = ab$, montrer que n divise 8. (0,75 pt)
 b) En déduire la valeur de n . (0,25 pt)
 c) Ecrire a et b dans le système décimal. (0,25 pt)
- 2 – Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : $37x + 54y = 3$ (0,75pt)

II – Une urne contient 4 jetons portant respectivement les numéros 0,1,2,3.

On tire un à un sans remise des jetons jusqu'à ce que l'urne soit vide.

- 1) Combien y a-t-il des résultats possibles ? (0,5 pt)
 2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 E : « Le numéro du 3^e jeton tiré est égal à 3 ». (0,5 pt)
 F : « Le numéro du 3^e jeton tiré est compris entre les numéros des deux premiers ». (0,5 pt)
 G : « Le produit des numéros des deux derniers jetons est non nul ». (0,5 pt)

PROBLEME I (7 points)

Dans le plan orienté (P), on considère le triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 2AB = 4$ cm

et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. On note : r_A la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$;

r_B la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

PARTIE A : Méthode géométrique

- 1 – a) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. (0,5 pt)
 b) En décomposant r_A et r_B en deux symétries orthogonales convenablement choisies, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f = r_A \circ r_B$. (1,25 pt)
- 2) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme A en C.
- a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S . (0,5 pt)
 b) Faire la construction géométrique du point C_1 image du point C par la similitude S . (0,25 pt)
 c) On note C_2 l'image du point C_1 par la similitude S ; montrer que les points A, B et C_2 sont alignés. (0,5 pt)

PARTIE B : Utilisation de nombres complexes

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$; $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2\sqrt{3}}$

- 1- Donner les affixes des points A, B et C. (0,5 pt)
 2- a) Donner les expressions complexes des rotations r_A et r_B . (0,25+0,25 pt)
 En déduire celle de $f = r_A \circ r_B$. (0,25 pt)

- b) Donner les éléments caractéristiques de f . (0,5 pt)
- 3 - Donner l'expression complexe de la similitude S définie dans la PARTIE A et en déduire ses éléments caractéristiques. (0,75pt)
- 4 - Soit g la transformation définie par sa forme complexe : $z' = (-1 - i\sqrt{3})\bar{z} + 4 + 2i\sqrt{3}$
- a) Déterminer les affixes de B' et C' images respectives de B et C par la transformation g . (0,25 + 0,25 pt)
- b) Vérifier que les points B , C et C' sont alignés. (0,25 pt)
- c) En déduire les éléments caractéristiques de g . (0,75 pt)

Problème II (9 pts)

Soit f_α la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f_\alpha(0) = 0$ et $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{1-x}$ pour $x > 0$ où α est un nombre réel non nul.

On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

PARTIE A

- 1- Etudier suivant le signe de α , le sens de variation de f_α . (1,5 pt)
- 2- On prend $\alpha = 1$.
- a) Dresser le tableau de variation de f_1 . (1 pt)
- b) Construire la courbe (C_1) . (1 pt)
- c) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $I = \int_0^1 4 f_1(x) dx$ et interpréter géométriquement ce résultat. (0,75+0,25 pt)
- 3- On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 4(x-1)e^{1-x}$
- a) Vérifier que f_1 est une solution de (E). (0,5 pt)
- b) Résoudre l'équation (E') : $y'' - 2y' + y = 0$ et en déduire les solutions générales de (E). (0,75 pt)

PARTIE B

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

- 1- a) En utilisant un encadrement de e^{1-x} sur l'intervalle $[0,1]$, montrer que pour tout $n \geq 1$,

on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ (0,75 pt)

- b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ (0,75 pt)

- 2- On pose $J_n = n!e - I_n$

- a) Calculer J_1 . (0,25 pt)
- b) Exprimer J_{n+1} à l'aide de J_n . (0,25 pt)
- En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 1$, J_n est un entier naturel. (0,25 pt)
- c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, le nombre $n!e$ tel que $n!e = J_n + I_n$ n'est pas un entier naturel. (0,25 pt)
- d) Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

Montrer que pour $n \geq q$, le nombre $n! \frac{p}{q}$ est un entier naturel. (0,5 pt)

Déduire des questions précédentes que e n'est pas un nombre rationnel. (0,25 pt)

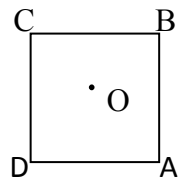
NB : - L'Exercice et les deux Problèmes sont obligatoires.
- Machine à calculer autorisée.

Exercice (4 points)

- I. 1 - Montrer par récurrence que $9^n - 2^n$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (0,50 pt)
 2 - Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $3n - 2$ et $5n - 3$ sont premiers entre eux. (0,25 pt)
 3 - On considère dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $x^2 - x + 1 = 0$.
 a - Vérifier que 5 est une solution de (E). (0,25 pt)
 b - Démontrer que l'équation (E) est équivalente à : $(x - 4)^2 = 1$. (0,50 pt)
 c - En déduire l'ensemble S des entiers relatifs x vérifiant $\begin{cases} |x| < 7 \\ x^2 - x + 1 = 0. \end{cases}$ (0,50 pt)
- II. Une urne contient dix boules blanches numérotées de 1 à 10, six boules noires numérotées de 11 à 16 et quatre boules vertes numérotées de 17 à 20.
 1 - On tire au hasard et successivement sans remise deux boules de l'urne ; calculer la probabilité des événements suivants :
 A : « les deux boules tirées sont de même couleur ». (0,50 pt)
 B : « les numéros des boules tirées sont des nombres premiers ». (0,50 pt)
 2 - On tire au hasard et successivement avec remise deux boules de l'urne ; calculer la probabilité des événements suivants :
 C : « une au moins des boules tirées est blanche ». (0,50 pt)
 D : « les numéros des boules tirées sont divisibles par 7 ». (0,50 pt)
 (N.B. : Mettre les résultats sous forme de fractions irréductibles)

Problème I (7 points)

Dans le plan orienté (P), on considère le carré ABCD de centre O tel que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$. Soit E le milieu du segment [CD]. On considère le carré DEFG de centre O' tel que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}) = \frac{\pi}{2}$. On note respectivement (Γ) et (Γ') les cercles circonscrits aux carrés ABCD et DEFG.



Partie A

- 1 - Faire une figure avec $AB = 6\text{cm}$. (0,25 pt)
 2 - Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
 a - Déterminer le rapport et l'angle de S. (0,25+0,25)
 b - Préciser l'image du point E par S et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF})$. (0,25+0,25)
 3 - On note I le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
 a - Placer le point I sur la figure. (0,25 pt)
 b - Montrer que le point I est l'intersection des cercles (Γ) et (Γ') . (0,50 pt)
 (On rappelle que : quatre points distincts A, B, C et D appartiennent à un même cercle si et seulement si $\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) [\pi]$)
 c - En déduire que les droites (ID) et (BF) sont perpendiculaires. (0,50 pt)
 4 - On considère la symétrie orthogonale s_Δ d'axe $(\Delta) = (OO')$. Montrer que $s_\Delta(D) = I$. (0,50 pt)

Partie B

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(D, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$.

- 1 - Donner les affixes des points A, B, C, D et G. (1,00 pt)
 2 - a - Ecrire l'expression complexe de la similitude plane directe S de centre D qui transforme A en B. (0,50 pt)
 b - En déduire les éléments caractéristiques de S. (0,50 pt)

3 - On considère l'application $f : (P) \longrightarrow (P)$, qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe

le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$; $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, tel que $z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)z + \left(-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}i\right)$.

- a - Déterminer la nature et les éléments géométriques de f . (0,25+0,50)
- b - Exprimer x' et y' en fonction de x et y . (0,50 pt)
- c - Déterminer l'affixe z_I du point I tel que $f(D) = I$. (0,50 pt)
- d - Vérifier que les points G, I et C sont alignés. (0,25 pt)

Problème II (9 points)

Partie A

I. On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

1 - Etudier la variation de g , puis en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \geq 0$. (0,25+0,25)

2 - Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$ puis déduire des questions précédentes que $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$. (0,50+0,50)

II. Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \end{cases}$, si $x \neq 0$.

1 - a - Etudier la continuité et la dérivabilité de f , à droite au point d'abscisse 0. (0,25+0,25)

b - Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 0. (0,25 pt)

c - Etudier les variations de la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$. En déduire le signe de h pour tout $x \geq 0$. (0,50+0,25)

d - Déterminer la fonction dérivée f' de f et en déduire son signe. (0,25+0,25)

e - Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ avec la tangente (T) , dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ avec 1 unité = 2cm. (0,5+0,5+0,25)

2 - Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, avec $x \geq 0$. Montrer que $\frac{3}{4} \leq F(1) \leq \frac{21}{26}$. (On pourra utiliser la question I.2-) Que peut-on en conclure ? (0,50+0,25)

Partie B

I. 1 - Montrer que l'image par f de l'intervalle $I = [0,1]$ est incluse dans lui-même. (0,25 pt)

2 - Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in I$. (0,50 pt)

3 - Soit la fonction k définie sur $[0, +\infty[$ par : $k(x) = x^3 + x^2 + 2x - 2(x+1) \ln(x+1)$. Calculer la dérivée $k'(x)$ de $k(x)$ pour tout $x \geq 0$ et montrer que k' est croissante sur $[0, +\infty[$. En déduire le signe de $k'(x)$ et de $k(x)$ pour tout $x \geq 0$. (0,25x4)

4 - Montrer alors que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$, puis en déduire que pour tout $x \in I$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. (0,50+0,25)

II. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1 - Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$. (0,25 pt)

2 - Montrer, en appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis, que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$. (0,25 pt)

3 - En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. (0,25 pt)

4 - Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$ (0,25 pt)

N.B. : - L'Exercice et les deux Problèmes sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE 1 (4 points)

A - Probabilité

Une urne contient six billes indiscernables au toucher, dont quatre numérotées 12 et deux numérotées 13.

- 1 – Pour commencer, le jeu consiste à extraire simultanément et au hasard trois billes de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « la somme des trois nombres inscrits sur les trois billes extraites est strictement supérieure à 36 ».

(0,5)

F : « les trois billes extraites portent le même numéro ».

(0,5)

- 2 – Maintenant, le jeu consiste à extraire successivement et sans remise, deux billes de l'urne.

Calculer la probabilité de l'événement :

G : « le produit des deux nombres inscrits sur les deux billes est un carré parfait »

(0,5)

- 3 – Enfin, le jeu consiste à extraire successivement et avec remise, sept billes de l'urne. Calculer la probabilité de l'événement.

H : « obtenir au moins une bille numéro 13 ».

(0,5)

N.B. : On donnera tous les résultats à 10^{-2} près.

B - Arithmétique

- 1 – On considère le nombre A défini pour tout entier naturel n par $A = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$. Démontrer que A est divisible par 11 pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) en utilisant les congruences

(0,5)

b) en raisonnant par récurrence.

(0,5)

- 2 – Déterminer tous les entiers relatifs x vérifiant le système :

$$\begin{cases} 3x - 2 \equiv 0 [5] \\ |x| < 10 \end{cases}$$

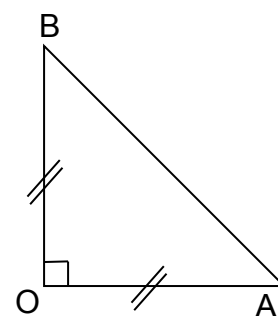
(1,0)

PROBLEME 1 (7 points)

PARTIE A Dans le plan orienté ($\mathcal{P}$), l'unité de longueur est le centimètre.

On donne :

- Le triangle OAB (figure ci-contre)
- Le triangle OCB, équilatéral direct de centre de gravité G.
- R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$
- R_O la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
- R la composée $R_B \circ R_O$.



- 1 – a) Faire une figure en prenant $OA = OB = 8$.

(0,25)

b) Préciser la nature de la transformation R.

(0,25)

c) En décomposant R_B et R_O , déterminer le centre de R.

(1,0)

- 2 – On désigne par H le barycentre des points pondérés (O,2), (B,1) et (C,1). Soit I le milieu du segment [CB].

a) Construire H.

(0,5)

b) Déterminer l'ensemble ($\mathcal{C}$) des points M du plan ($\mathcal{P}$) tels que :

$$2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{AO}^2$$

(0,75)

c) Montrer que ($\mathcal{C}$) passe par I. Construire ($\mathcal{C}$).

(0,25 + 0,25)

PARTIE B On munit le plan ($\mathcal{P}$) du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

- 1 – Déterminer l'abscisse de chacun des points O, A, B, C, et G. (1,0)
- 2 – a) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OA})$ et la valeur du rapport $\frac{OA}{OG}$. (0,5 + 0,5)
- b) En déduire les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme G en A et laisse O invariant. (1,0)
- c) Donner l'expression complexe de S. (0,75)

PROBLEME 2 (9 points)

PARTIE A Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est la fonction numérique définie dans l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} \quad \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans un plan ($\mathcal{P}$) muni d'un repère orthonormé direct, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1 – a) Montrer que f_n est continue et dérivable en 0. (0,25 + 0,25)
- b) Dresser le tableau de variation de f_n sur $[0, +\infty[$. (1,5)
- 2 – On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(u) = e^{-u} + u - 1$.
 - a) Déterminer le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$. (1,25)
 - b) Déduire de cette monotonie de g , que pour tout réel u de $[0, +\infty[$: $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$. (0,5)
 - c) Montrer ensuite, que pour tout réel h de $[0, +\infty[$: $0 \leq e^{-h} + h - 1 \leq \frac{h^2}{2}$. (0,5)
 - d) En déduire que pour tout réel x de $]0, +\infty[$: $0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$ et que la droite (Δ_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote de (C_n) . (0,5 + 0,25)
 - e) Vérifier que (C_n) reste au-dessus de (Δ_n) . (0,25)
- 3 – Tracer (C_2) et (Δ_2) dans $(\mathcal{P})$. (0,75)

PARTIE B On pose $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

- a) Montrer que pour tout réel t de $[0 ; 1]$: $(t - \frac{1}{n}) \leq f_n(t) \leq t$. (0,75)
- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}$. (0,25)

PARTIE C On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \frac{-x^2 + x + 1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

- 1 – Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$. (0,5)
- 2 – a) Montrer que la fonction f telle que $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$, où $x \in]0, +\infty[$, est solution de (E). (0,25)
- b) φ étant une fonction numérique dérivable sur $]0, +\infty[$, montrer que $(\varphi + f)$ est solution de (E) si et seulement si φ est solution de (E'). (0,75)
- c) Acheter la résolution de (E). (0,5)

- N.B. :**
- L'Exercice et les deux Problèmes sont obligatoires.
 - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE

(4 points)

A - Probabilité

Chaque lettre du mot « FLEURS » est écrite sur chaque face d'un dé cubique normal (une seule lettre sur chaque face). Un enfant lance trois fois successives ce dé et d'une manière indépendante. Il obtient ainsi un « mot » de trois lettres (un mot peut avoir un sens ou non).

- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - A « L'enfant obtient un mot commençant par une consonne ». (0,5)
 - B « L'enfant obtient un mot commençant et se terminant par la même lettre ». (0,5)
- Soit C l'événement « l'enfant obtient un mot ayant des lettres toutes différentes ».
 - a) Définir l'événement $\bar{C}$, événement contraire de C. (0,5)
 - b) Calculer la probabilité de l'événement $\bar{C}$. (0,5)

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

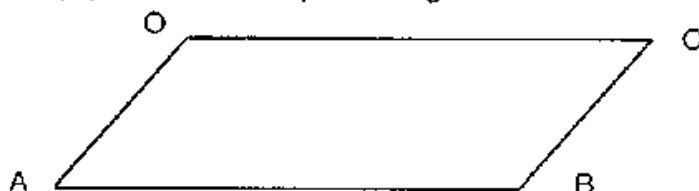
B - Arithmétique

- Dans cette question, a désigne un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
Calculer $a^2 + 3a + 2$ pour $a = 4$. (0,25)
- a – Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $7x - 3y = 0$. (0,5)
b – Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, une solution particulière de l'équation (F) : $7x - 3y = 2$. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (F). (0,5+0,75)

PROBLEME 1

(7 points)

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on donne le parallélogramme OABC.



PARTIE A (Construction sur une page entière).

Construire les triangles OCD et OEA, rectangles et isocèles en O, de sens direct.
Puis placer le point G, milieu du segment $[DE]$. (0,75)

PARTIE B

On se propose de démontrer par deux méthodes différentes que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont orthogonaux et que $CA = 2OG$.

1) Par les nombres complexes.

On munit le plan $(\mathcal{P})$ d'un repère orthogonal direct d'origine O. On désigne par a et b les affixes respectives des points C et E.

- Déterminer les affixes respectives des points D et A. (0,25+0,25)
- Déterminer Z et Z' affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$. (0,5+0,5)
- Exprimer Z' en fonction de Z . (0,5)
- Démontrer que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont orthogonaux et que $CA = 2OG$. (0,5+0,5)

2) Par les transformations.

On donne : - r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- h l'homothétie de centre D et de rapport 2 ;
- s la composée r o h.

a – Donner la nature de la transformation s. (0,25)

b – Déterminer s(G) et s(O). (0,5+0,5)

c – En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux et que $CA = 2OG$. (0,5+0,5)

PARTIE C

Dans le repère orthogonal $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, déterminer l'expression complexe de la transformation s ainsi que l'abscisse de son centre. (1)

PROBLEME 2

(9 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité 2cm.

PARTIE A. Etude de la fonction f.

1) On donne la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

a - Dresser le tableau de variation de g. (1,5)

b - Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α dans $\mathbb{R}$ et que $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$. (0,5)

(on donne $e=2,7$; $e^{-0,35} = 0,88$, $e^{-0,36} = 0,69$.)

c - En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x. (0,25)

2) a - Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = g(x)$. (0,5)

b - Dresser le tableau de variation de f. (0,75)

c - Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote de (C). (0,5)

d - Tracer dans le même repère, la droite (D) et la courbe (C) (0,75)

(on prend, pour construire (C), $\alpha = 0,35$).

PARTIE B. Etude d'une suite.

On appelle I l'intervalle $[1;2]$.

1- On considère la fonction h définie sur I par : $h(x) = f(x) - x$.

a – Démontrer que h est strictement décroissante sur I, puis dresser son tableau de variation. (1,25)

b – En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique, notée β , appartenant à I. (0,25 + 0,25)

2- Démontrer que, pour tout réel x de I, on a : $f(x) \in I$ et $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$. (0,25+0,25)

3- $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite numérique définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

a – Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n \in I$. (0,25)

b – Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$

$$\text{et que } |U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \beta|.$$

(0,5+0,75)

c- Prouver que la suite (U_n) converge vers un réel ℓ , que l'on précisera. (0,25)

4- Déterminer l'entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p,

on ait : $|U_n - \beta| \leq 10^{-2}$.

(0,25)

EXERCICE (4points)

A – Arithmétique .

1. Effectuer la division euclidienne de -283 par 19 . (0,25)
2. a) Traduire en terme de congruence la division euclidienne de 11 par 7 . (0,25)
 b) Prouver que, pour tout entier naturel n , le nombre $(2^{3n+1} + 3^{6n} + 11^{3n+1})$ est divisible par 7 . (0,75)
3. Dans le système décimal, un entier naturel non nul X s'écrit :

$$X = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0} ; \text{ avec } a_p \neq 0. \text{ Justifier qu'on a : } X \equiv 0[11] \text{ si } \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i a_i \equiv 0[11] \quad (0,75)$$

B – Probabilité.

Dans un restaurant, un menu est composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. On a le choix entre 3 entrées, 5 plats et 4 desserts. Une jeune fille va dans ce restaurant et elle choisit un menu au hasard.

- a) Parmi les plats se trouve du poisson frit. Quelle est la probabilité pour qu'elle mange du poisson frit ? (1)
- b) Dans les entrées, il existe deux crudités différentes et la glace aux fraises fait partie du dessert. Quelle est la probabilité pour qu'elle mange de la crudité et de la glace aux fraises ? (0,5)
- c) Quelle est la probabilité pour qu'elle mange de la crudité, du poisson frit et de la glace aux fraises ? (0,5)

PROBLEME 1 (7 points)

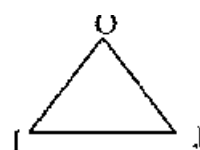
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

PARTIE A. On considère un triangle équilatéral direct TED . r_1 est la rotation de centre E et d'angle $\frac{2\pi}{3}$,

r_2 la rotation de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Utiliser le théorème de la décomposition pour déterminer le centre de la rotation $r_1 \circ r_2$. (0,5)

PARTIE B. OIJ est un triangle équilatéral direct :

1. Construire, à l'extérieur de OIJ , le parallélogramme direct $OJKL$ et le triangle équilatéral direct OIP .



2. On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{JO}$.

- a) Préciser la nature de la transformation g définie par $g = r \circ t$. (0,25)
- b) Déterminer les images par g des points I et K . En déduire les éléments géométriques de g , ainsi que la nature du triangle IKP . (0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,5)

PARTIE C. (I)- On considère M , E et N trois points non alignés. Soit H le barycentre du système

$\{(M; 3); (E; 1); (N; 1)\}$, Q celui de $\{(M; 3); (N; 1)\}$ et R celui de $\{(M; 3); (E; 1)\}$.

1. Démontrer que les droites (EQ) et (NR) passent par H . (0,5)
2. Soit P le milieu du segment $[EN]$.
 a) Prouver que M , P et H sont alignés. (0,5)
 b) Exprimer $\overrightarrow{PH}$ en fonction de $\overrightarrow{PM}$. (0,75)

(II) - On donne un triangle rectangle direct ABC et isocèle en A tel que $AB = AC = a$; $a > 0$.

1. Déterminer le point G barycentre du système $\{(A; 4); (B; -1); (C; -1)\}$. Construire G. (0,5 + 0,5)
2. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que : $4\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2a^2$. Construire $(\mathcal{E})$. (1 + 0,75)

PROBLEME 2 (9 points)

PARTIE I. Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{x-1}{\ln(x)} \text{ si } 0 < x < 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

$(\mathcal{C})$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 10 cm.

- (A)- 1. Donner l'ensemble de définition de f . (0,25)
 2. Prouver que f est continue en 0 et en 1. (0,5 + 0,5)
 3. Justifier que f est dérivable sur $]0;1[$. Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $H(x)$

où H est la fonction définie sur $]0;1[$ par : $H(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln(x)$ (0,5 + 0,5)

4. Etudier les variations et le signe de H . Vérifier que f est strictement croissante. (0,5 + 0,25)
 5. Etudier la dérivabilité de f en 0. (0,5)

- (B)- 1. Prouver que pour tout réel a de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ on a :

$$0 \leq \frac{1}{1-a} - (1+a) \leq 2a^2 \quad \text{et} \quad 0 \leq -\ln(1-a) - \left(a + \frac{a^2}{2}\right) \leq \frac{2a^3}{3}. \quad (0,5 + 0,5)$$

2. On considère la fonction numérique Ψ définie sur $]0;1[$ par : $\Psi(t) = \frac{1}{f(t)}$. Prouver que,

pour tout réel b de $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, on a : $0 \leq \Psi(1+b) - \Psi(1) + \frac{b}{2} \leq \frac{2b^2}{3}$. (0,5)

En déduire que Ψ est dérivable en 1 et donner $\Psi'(1)$. (0,5 + 0,25)

3. Déduire de ce qui précède que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$. (0,5 + 0,25)

4. Tracer $(\mathcal{C})$ et ses tangentes à l'origine des axes et au point d'abscisse 1. (0,5+0,25+0,25)

PARTIE II. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $a_n = \frac{n^n}{n!}$ où $n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

1. Etudier la monotonie de (a_n) . (0,25)

2. Etablir les inégalités : $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$, $n \in \mathbb{N}^*$. (On rappelle que pour tout réel positif x ,

on a : $(1+nx) \leq (1+x)^n$ et $\ln(1+x) \leq x$.) (0,5)

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 6, on a : $2^n \leq a_n \leq e^n$. (0,75)

Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2011

MATHEMATIQUES – Série : C

N.B. : - L' exercice et les DEUX Problèmes sont obligatoires.

- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée

EXERCICE (4 points)

A- Probabilité

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées : 0, 1, 1, 2, 2 et 2.

1- On lance une fois ce dé. Calculer les probabilités P_0 , P_1 , P_2 d'apparition respective des faces numérotées 0, 1, 2. (0,25pt x3)

2- Une épreuve consiste à lancer trois fois de suite ce dé et d'une manière indépendante.

On note chaque fois le numéro obtenu sur la face supérieure de ce dé.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « La somme des numéros obtenus est égale à 4 ». (0,25pt)

B : « Obtenir exactement deux fois le numéro 1 ». (0,5pt)

C : « Obtenir chacun des trois numéros différents lors des 3 lancers ». (0,5pt)

NB : on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible

B- Arithmétique

1- a) Convertir dans la base 10 l'entier a écrit dans le système binaire : $a = \overline{(1011101)}_2$. (0,25pt)

b) Convertir dans le système binaire l'entier naturel $b = 54$ de la base 10. (0,25pt)

2- a) Dresser la table d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. (0,25pt+0,25pt)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

(0,5pt)

c) Résoudre l'équation : $x^2 - x - \bar{z} = \bar{u}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(0,5pt)

PROBLEME1 (7 points)

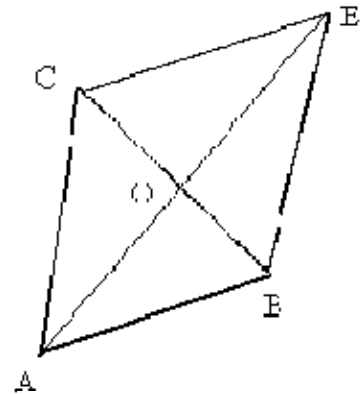
ABEC est un losange de centre O dans un plan orienté $(\mathcal{P})$ tel que

$$AB = AC = BC = 4 \text{ cm et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

1- Reproduire cette figure en vraie grandeur. (0,5pt)



2 - a) On considère le système de points pondérés $J = \{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$.

Montrer que ce système admet un barycentre G et que G est le milieu du segment [OA]. (0,25pt+0,25pt)

b) Montrer que le vecteur $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ où M est un point variable, est un vecteur constant que l'on déterminera. (0,5pt) (0 ; 5)

c) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan $(\mathcal{P})$ vérifiant :

$$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \quad (0,5pt)$$

3 - Soit S la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et qui transforme A en B.

On note I le centre de S et I' son image par la symétrie centrale S_B de centre B.

a) Montrer que le triangle IAI' est un triangle équilatéral de sens direct. (0,5pt)

b) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$ (0,5pt)

c) Placer alors les points I et I' (0,5pt)

Partie B : Utilisation des nombres complexes.

On rapporte le plan $(\mathcal{P})$ au repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ ($\vec{u}, \vec{v}$).

1-a) Donner les affixes z_A et z_B respectives de A et B. (0,25pt + 0,25pt)

b) Donner le module et un argument de l'affixe z_C de C et en déduire l'affixe z_C sous forme algébrique. (0,25pt + 0,25pt + 0,25pt)

c) Calculer l'affixe z_O de O. (0,25pt)

2-a) Donner l'expression complexe de la similitude directe S de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, qui transforme A en B. (0,5pt)

b) En déduire l'affixe z_I du centre I de S. (0,5pt)

c) Vérifier que $\frac{z_I}{z_O}$ est un nombre réel et que $\frac{z_B - z_I}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur. (0,25pt+0,25pt)

d) Que peut-on en déduire pour les points I, O et A d'une part et pour les droites (IB) et (AB) d'autre part. (0,25pt+ 0,25pt)

PROBLEME 2 (9 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x - 1$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie A : Etude de la fonction f.

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (0,25pt + 0,25pt)

(Pour la limite en $+\infty$, poser $X = \frac{x}{2}$)

2- a) Etudier les variations de f. (0,75pt)

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ (0,75pt)

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions 0 et α dans $\mathbb{R}$ et $2 < \alpha < 3$ (0,25pt+0,5pt)

3 - Tracer $\mathcal{C}$ et (D) dans un même repère. (1pt+ 0,5pt)

On donne $e = 2,7$; $e^{\frac{3}{2}} = 4,48$ et pour construction, on prendra $\alpha = 2,5$.

4 - Soit λ un nombre réel strictement inférieur à -1 .

a) Exprimer en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$, en cm^2 , de la portion du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$.

la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = -1$. (0,5pt)

b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. (0,5pt)

Partie B : Etude d'une suite.

On considère la fonction numérique g définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = 2n(x+1)$.

1 - Etudier les variations de la fonction g . (0,75pt)

2 - Montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$. (0,5pt)

3 - Montrer que pour tout $x \in [2; +\infty[$, $g(x) \in [2; +\infty[$. (0, 5pt)

4 - $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite numérique définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = g(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$ et que tous les

termes de la suite appartiennent à $[2; +\infty[$. (on ne demande pas de le démontrer).

a) Démontrer que pour tout $x \in [2; +\infty[$, on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$. (0,5pt)

b) Démontrer, en utilisant les théorèmes des inégalités des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on

a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (0,25pt + 0,25pt)

c) Prouver que la suite (U_n) converge vers un réel ℓ que l'on précisera. (0,5pt)

d) Déterminer l'entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p on ait :

$|U_n - \alpha| \leq 10^{-4}$. (0,5pt)

Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2012

MATHEMATIQUES – Série : C

NB : - L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires

- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

Exercice : (4 points)

1 - On considère, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation définie par : (E) : $11x - 7y = 9$.

On note par (x_0, y_0) la solution de cette équation.

- a) Montrer que : $4x_0 \equiv 2 \pmod{7}$ (0,5)
- b) En déduire une solution particulière de l'équation (E). (0,25)
- c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E). (0,75)
- d) Trouver un couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant : $11a - 7b = 9 = \text{PGCD}(a, b)$. (0,5)

2- On dispose d'un dé cubique parfait à six faces numérotées 2, 3, 4 dont une face marquée 2, trois faces marquées 3 et deux faces marquées 4.

On lance trois fois de suite ce dé. On note chaque fois le numéro apparu à la face supérieure, en l'écrivant dans l'ordre de gauche à droite pour former un nombre entier naturel.

Calculer la probabilité de chaque événement suivant :

- A : « Le nombre formé ne contient que des chiffres premiers ». (0,5)
- B : « le chiffre 4 apparaît au moins une fois dans le nombre formé ». (0,5)
- C : « Obtenir l'écriture du nombre 92 dans le système à base 5 ». (0,5)
- D : « La somme des chiffres dans le nombre formé est 8 ». (0,5)

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Problème 1 : (7 points)

On considère dans le plan P un triangle rectangle et isocèle ABC tel que $AB=AC=2$

(unité graphique : 2cm) et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

On désigne par G le milieu du segment [BC] et par O celui de [AC]. On met les points A et C sur une droite horizontale.

Partie I :

1- a- Déterminer et construire le barycentre F des points A, B et C affectés respectivement de 2, -1 et 1. Montrer que ABGF est un parallélogramme. (0,25+0,5+0,25)

b- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan P tel que :

$$|| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} || = || 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} ||. \quad (0,75 + 0,25)$$

2- On appelle J le symétrique de B par rapport à A et (D) la droite passant par J et parallèle à (AC).

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan P tel que, si H est le projeté orthogonal de M sur (D) alors l'équation de (Γ) est : $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = MH^2 - 4$ (1)

a- Montrer que (Γ) passe par A et C. (0,5)

b- Calculer FA^2 , FB^2 et FC^2 . (0,5)

c- Démontrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation $2MF^2 = MH^2$.

En déduire la nature de (Γ) . (0,75 + 0,25)

Partie II : Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

1- Déterminer respectivement les affixes z_C , z_J et z_F des points C, J et F. (0,5)

2- On considère une similitude plane indirecte S qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

a- Sachant que S transforme F en J et laisse invariant C, donner l'expression complexe de S. (0,5)

b- En déduire les éléments caractéristiques de S. (0,75)

3 - a- Calculer les affixes des points $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$. (0,5)

b- Construire dans le même plan P, l'image par S du triangle ABC. (0,75)

Problème 2 : (9 points)

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^x & , \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \ln \left[2x + \sqrt{4x^2 + 1} \right] & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1 - a) Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$. (0,25)

b) En admettant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2$, étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. (0,25)

2 - Etudier les variations de f en dressant son tableau de variation. (1)

3 - Soit g la fonction définie sur $[2 ; +\infty[$ par : $g(x) = x - f(x)$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [2 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$. (0,5)

b) Prouver que $f(x) = \ln(x) + \ln \left[2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right]$, pour $x > 0$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ (0,25 + 0,25)

c) Déduire le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α et une seule, telle que $2 \leq \alpha \leq 3$. (0,25 + 0,5)

4 - Soit l'intervalle $I = [2 ; 3]$.

a) Démontrer que, si $x \in I$ alors $f(x) \in I$. (On pourra utiliser A-2). (0,5)

b) Prouver que pour tout $x \in I$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

En déduire que : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$, pour $x \in I$. (0,5 + 0,25)

5 - Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (0,25)

b) Montrer que, pour tout n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (0,25 + 0,25)

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers le nombre réel α . (0,25)

d) Déterminer n_0 pour que u^{n_0} soit une valeur approchée de α à 0,1 près.

Calculer u^{n_0} . (0,25 + 0,25)

6 - On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 2cm.

a) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$ (0,25)

b) Tracer $(\mathcal{C})$ et la droite $(D) : y = x$, en précisant α et les demi-tangentes à $(\mathcal{C})$ en $x_0 = 0$. (0,75)

Partie B :

On considère l'équation différentielle : $(E_1) : y' - y = xe^x$.

1- Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' - y = 0$. (0,5)

2- Soient a et b deux réels et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = (ax + b)e^x$.

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de (E_1) . (0,25)

b) ϕ étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(\phi + u)$ est une solution de (E_1) si et seulement si ϕ est une solution de (E_2) . (0,5)

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) . (0,25)

3- Déterminer la solution de (E_1) qui s'annule en 0. (0,5)

On donne : $\ln(4 + \sqrt{17}) \approx 2,39$; $\ln(6 + \sqrt{37}) \approx 2,49$; $\ln 5 \approx 1,61$

Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2013

MATHEMATIQUES – Série : C

- NB :**
- L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires
 - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.
 - Papiers millimétrés autorisés.

EXERCICE 1 : 4 points

A - Arithmétique

- 1 – Un nombre A s'écrit 121 en base 4 et 221 en base n , $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer n . (0,25 pt)
- 2 – Prouver que, pour tout entier naturel n , $2^{6n+1} + 9^{n+1} \equiv 0 [11]$. (0,5 pt)
- 3 – Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système $\begin{cases} PGCD(a;b) = 6 \\ PPCM(a;b) = 240 \end{cases}$ (0,75 pt)

B – Probabilité

$n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n . On veut placer ces boules dans n boîtes numérotées de 1 à n ; chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules.

1 – Pour $n = 4$, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « Chaque boîte contient une boule ». (0,25 pt)

F : « Chaque boîte contient une boule de telle sorte que la boîte et la boule ont le même numéro ». (0,25 pt)

G : « La boîte numérotée 1 contient exactement deux boules ». (0,25 pt)

2 – Pour $n \geq 2$, on désigne par $P_n(k)$ la probabilité pour que la boîte numérotée 1 contienne exactement k boule(s), $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

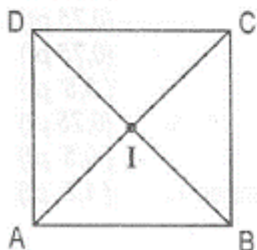
a) Démontrer que, pour tout n , $P_n(k) = C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$ (1 pt)

b) En déduire que : $\sum_{k=0}^n C_n^k (n-1)^{n-k} = n^n$. (0,75 pt)

PROBLEME 1 : 7 points

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A



Dans le plan complexe $\mathcal{P}$, on considère le carré direct ABCD de centre I. Quels que soient les points M et N du plan, on note par :

r_M la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$t_{\overline{MN}}$ la translation de vecteur $\overline{MN}$.

$\mathcal{S}_{(MN)}$ la réflexion d'axe (MN).

1°/ En décomposant r_A et r_B , déterminer la nature et les éléments géométriques de $r_B \circ r_A$. (0,5 pt)

2°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $R = (A, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

a) Déterminer la forme algébrique de $a = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$. (0,25 pt)

b) En déduire l'angle et le rapport de la similitude plane directe de centre C qui transforme B en A. (0,5 pt)

3°/ Soit $f = \mathcal{S}_{(AD)} \circ r_A \circ t_{AC}$.

a) Démontrer que f est un antidépassement. (0,75 pt)

b) En décomposant convenablement r_A , préciser la nature et les éléments caractéristiques de f. (0,75 pt)

c) En déduire l'expression complexe de f. (0,75 pt)

Partie B

1° Etant donné un nombre réel θ .

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à variable $t, (E_\theta): t^2 - 2t \cos \theta + 1 = 0$.

(0,75 pt)

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation à variable

complexe $z, (E'_\theta): z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0$.

(0,5 pt)

2° On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation $\left(E_{\frac{\pi}{3}}\right)$ telles que :

$\operatorname{Re}(z_A) < 0; \operatorname{Im}(z_B) < 0$ avec $z_B = -z_A; z_D = \bar{z}_A$ et $z_C = \bar{z}_B$ où z_A, z_B, z_C et z_D sont les affixes respectives des points A, B, C et D.

a) Placer les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique d'unité 3 cm.

(0,5 pt)

b) Pour quelle valeur de θ les points A, B, C et D sont-ils les sommets d'un carré ?

(0,25 pt)

3° - A, B, C et D étant les sommets du rectangle défini dans la question 2° - a) et λ un réel tel que $\lambda \in [-1; 1]$. On appelle G_λ le barycentre du système des points pondérés

$S_\lambda = \{(A; \lambda^2 + 1); (B; \lambda); (D; -\lambda)\}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AG_\lambda}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$.

(0,5 pt)

b) On pose $(E) = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\|\}$.

Déterminer et construire (E).

(1 pt)

PROBLEME 2 : 9 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x & \text{si } x \in]0; 1[\\ f(x) = (3x - 3)e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par (C) sa courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

Partie A

1° a) Démontrer que f est continue au point d'abscisse 1.

(0,5 pt)

b) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 1.

(0,75 pt)

2° a) Etudier, suivant les valeurs de x, le sens de variation de f.

(0,75 pt)

b) Dresser alors le tableau de variation de f.

(0,5 pt)

3° a) Démontrer que f admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.

(0,75 pt)

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point I.

(0,5 pt)

c) Tracer (T) et (C) dans le même repère en précisant les demi-tangentes au point d'abscisse 1.

(1,5 pt)

Partie B

Pour tout réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, on pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t) dt$.

Quels que soient les entiers n et k tels que : $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1°/ a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $I(\lambda)$ en fonction de λ .

b) Calculer alors $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$.

(0,5 pt)

(0,25 pt)

2°/ a) Démontrer que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(1 pt)

b) En déduire que $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(0,5 pt)

c) Démontrer alors que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

(0,75 pt)

d) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} t f(t)$.

(0,25 pt)

e) Calculer ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(0,5 pt)

NB : Pour la construction, on prend $e^{-1} = 0,4$; $e^{-2} = 0,2$ et $e^{-3} = 0,05$.



C

Options : C

Code matière : 009

Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

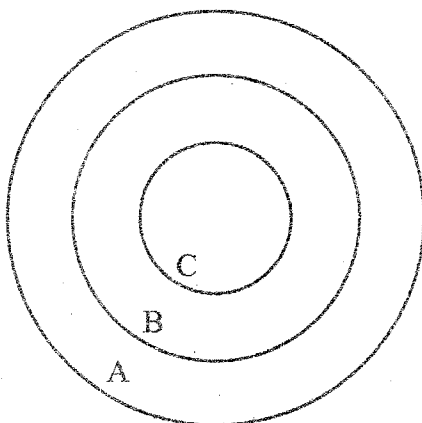


**NB : L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.
L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.**

EXERCICE (4 points)

Partie A

Dans un concours de tir, la cible circulaire se divise en trois zones: A, B et C.



Chaque tir atteint nécessairement l'une des trois zones A, B, et C.

P_A , P_B et P_C sont respectivement les probabilités d'atteindre les zones A, B et C.

Sachant que $P_C = \frac{1}{6}$ et P_A , P_B et P_C forment, dans cet ordre, une progression arithmétique.

1°) Calculer P_A et P_B .

(0,5pt)

2°) On effectue quatre tirs d'une manière indépendante. Calculer la probabilité d'atteindre au moins une fois la zone C.

(0,5pt)

3°) Un joueur tire jusqu'à ce que la zone C soit atteinte.

Calculer la probabilité de l'événement E: « Le jeu s'arrête au 3^{ème} tir ».

(0,5pt)

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et P_n la probabilité pour que le jeu s'arrête au n^{ème} tir.

Ecrire P_n en fonction de n. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

(0,5pt)

Partie B

1- Soit x et y deux entiers naturels.

Démontrer que : $(x + 6y)^2 - x^2$ est divisible par 12 et que $(x + 6y)^4 - x^4$ est divisible par 24. (1pt)

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $3x \equiv 2 \pmod{7}$.

(0,5pt)

3- Déterminer la base b du système de numération dans lequel : $(\overline{12})_b \times (\overline{22})_b = (\overline{314})_b$.

(0,5pt)

/...

PROBLEME1 (7 points)

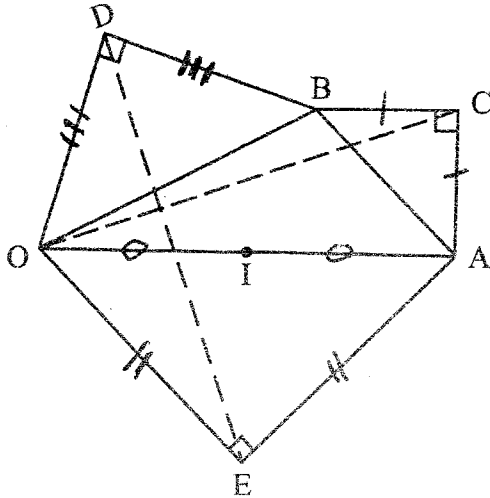
Les parties I et II sont indépendantes.

On considère un triangle quelconque AOB.

AOE est un triangle direct isocèle et rectangle en E

BAC est un triangle direct isocèle et rectangle en C

OBD est un triangle direct isocèle et rectangle en D



On se propose de démontrer que les droites (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que $OC = ED$.

PARTIE I : Méthode 1 : Utilisation des transformations.

On note :

- S_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme C en B.
- S_2 la similitude plane directe de centre O qui transforme B en D.
- $f = S_2 \circ S_1$.

1-a) Déterminer le rapport et l'angle de chacun des transformations S_1 et S_2 .

(1pt)

b) Prouver que f est une rotation dont on précisera l'angle.

(0,5pt)

2- Déterminer l'image de I par S_1 et celle de E par S_2 .

(0,5pt)

En déduire que I est invariant par f .

(0,25pt)

3-On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $R(O)$ et $R(C)$

(0,75pt)

b) En déduire que (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que $OC = ED$.

(0,5pt)

PARTIE II : Méthode 2 : Utilisation des nombres complexes.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$.

On note b l'afixe de B.

1) Calculer en fonction de b l'afixe de C et l'afixe de D.

(1pt)

2) Calculer l'afixe Z_E de E.

(0,5pt)

3-a) Démontrer que $\frac{Z_D - Z_E}{Z_C - Z_O} = i$.

(1pt)

b) En déduire que (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que $OC = ED$.

(1pt)

/...

PROBLEME2 (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & \text{si } x < 1 \\ x-1 + \ln \frac{2x}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1cm.

Partie I

1-Prouver que f est continue en $x_0=1$.

(0,5pt)

2- a) Vérifier que pour tout $x > 1$: $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$

(0,25pt)

Démontrer que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1) = \frac{3}{2}$.

(0,25pt)

b) Etudier la dérivabilité à gauche de f en $x_0=1$.

(0,25pt)

3- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(0,5pt)

4- a) Etudier le sens de variation de f sur son domaine de définition.

(1pt)

b) Dresser le tableau de variation de f .

(0,5pt)

5- On pose $\varphi(x) = f(x) - x + 1 - \ln 2$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Que signifie ce résultat pour la courbe (C)?

(0,75pt)

6- Tracer les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$, l'asymptote et la courbe (C)

(1pt)

Partie II

1-On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = (-2x + 1)e^x$

Soit g une solution de (E), démontrer que toute fonction φ définie par $\varphi(x) = e^{-x}g(x)$

vérifie $\varphi'(x) = -2x + 1$. En déduire la solution de (E) qui prend la valeur 1 en $x=0$. (1,25pts)

(0,5pt)

2- Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\sqrt{3} \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

3- Soit la suite numérique $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par:

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

a) Calculer I_1 . Interpréter géométriquement ce résultat.

(0,5pt)

b) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$.

(1pt)

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

(0,5pt)

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$.

(0,25pt)

On donne: $e^{-3} \approx 0,05$; $e^{-2} \approx 0,14$; $e^{-1} \approx 0,37$;

$\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$

Série D - SESSION 1999

N.B. : Les **Quatre Exercices** sont obligatoires.

EXERCICE I (20 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 2cm, on donne le point A d'affixe -2 .

Soit Z le nombre complexe défini par : $Z = \frac{iz + 3}{z + 2}$, avec $z \neq -2$ et $z \in \mathbb{C}$.

On pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

- 1 - Déterminer X et Y en fonction de x et y . (3 points)
- 2 - Déterminer et construire dans P les deux ensembles (C) et (D) définis par :
 $(C) = \{ M(x, y) / Z \text{ soit réel } \}$.
 $(D) = \{ M(x, y) / Z \text{ soit imaginaire pur } \}$. (4 points)
- 3 - Soient B, C et D les points d'affixes respectives : $i, 2 + 2i, 1 - i$.
On note par S la similitude plane directe qui transforme B en C et C en D .
 - a - Donner l'expression complexe de S . (3points)
 - b - Préciser ces éléments géométriques. (6points)
 - c - Construire l'image du cercle d'équation : $x^2 + y^2 + 2x - 3y = 0$ par S , dans le repère précédent. (4points)

EXERCICE II (20 points)

Le tableau ci-dessous donne en milliards de francs malgache (FMG) les importations d'une société, de 1993 à 1998.

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Importations : y_i	5	6,5	7	6,5	10	12

- 1- Représenter le nuage de points associé à cette série statistique (x_i, y_i) dans un repère orthogonal. L'unité graphique sera prise égale à 1cm sur l'axe des abscisses x , et 1cm pour 1 milliards sur l'axe des ordonnées y . (4points)
- 2- Calculer le coefficient de corrélation linéaire. (6points)
- 3- Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite dans le même repère défini ci-dessus. (6points)
- 4- A l'aide de cette droite de régression de y en x , quelle estimation peut-on faire du montant des importations en l'an 2004 ? (4points)
On exprimera les résultats sous forme décimale, deux chiffres après virgule.

EXERCICE III

(20 points)

Soit f la fonction définie sur $D_f =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} & \text{si } x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

d'unité 1cm.

- 1- a) Montrer que f est continue et dérivable au point 0. (3points)
- b) Calculer les limites aux bornes de D_f . (2points)
- 2- a) Soit $x \in D_f$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur D_f . (3 points)
- b) Dresser le tableau de variation de f . (1 point)
- c) Etudier les branches infinies de la courbe (C) .
Tracer (C) et la droite (T) tangente à (C) au point d'abscisse e^2 . (3 points)
- 3- Soit g la fonction définie sur $D =]1 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x + \ln x}{\ln x}$, pour tout $x \in D$.

On note par (Γ) la courbe représentative de g dans le repère précédent.

- a) Etudier la position relative de (Γ) et (C) . (2 points)
 - b) Dresser le tableau de variation de g
et tracer (Γ) dans le même repère que (C) . (4 points)
 - c) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par les deux courbes (Γ) , (C) et les droites d'équations respectives $x = 2$, $x = e$. (2 points)
- On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $e \approx 2,71$; $e^2 \approx 7,4$.

EXERCICE IV

(20 points)

Soit D_1 un dé cubique truqué numéroté de 1 à 6.

On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i lors d'un lancer du dé D_1 ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

On suppose que p_1, p_3, p_5 forment, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; puis p_2, p_4, p_6 forment, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et que $p_2 = 4p_1$.

Soit D_2 un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6.

Chaque face de D_2 a donc la même probabilité d'apparition lors d'un lancer de ce dé.

- 1- a) Montrer que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 vérifient le système :

$$\begin{cases} p_2 = 4p_1 ; p_4 = p_1 \\ p_3 = \frac{1}{2}p_1 ; p_5 = p_6 = \frac{1}{4}p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1. \end{cases}$$
 (4 points)
- b) Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 . (6 points)
- 2- On lance les deux dés D_1 et D_2 simultanément. On note par X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus de D_1 et D_2 après lancement.
 - a) Donner l'image de X , (ensemble des valeurs prise par X). (2 points)
 - b) Calculer la probabilité des événements suivants :
 $[X = 2], [X = 3], [X = 4]$ et $[X \geq 5]$. (8 points)

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 1 5 points

$\mathcal{P}$ est un plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (6 - i)z + 11 - 3i = 0$. (0,5 pt)
- b. Déterminer les nombres complexes z et z' tels que :

$$\begin{cases} 2z - z' = 6 - 5i \\ -z + z' = 3i. \end{cases} \quad (0,5 \text{ pt})$$

Dans tout ce qui suit, on note par A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = 3 + i$, $b = 3 - 2i$, $c = 6 - 2i$ et $d = 6 + i$.

2. a. Placer dans $\mathcal{P}$ les quatre points A, B, C et D. (0,5 pt)
- b. Démontrer que le triangle (BAD) est isocèle et rectangle en A, et le triangle (BCD) est isocèle et rectangle en C. (0,75 pt)
- c. En déduire que les quatre points A, B, C et D se trouvent sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre Ω et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure précédente. (0,75 pt)
3. Soit S la similitude plane directe de centre A et qui transforme B en C. (1 pt)
- a. Préciser les éléments caractéristiques de S. (1 pt)
- b. Construire sur la figure précédente le transformé de ABCD par S. (1 pt)

Exercice 2 5 points

N.B. : On exprimera les résultats sous forme décimale à 10^{-2} près.

Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires y_i d'une entreprise selon les frais de publicité x_i (x_i et y_i sont exprimés en millions de francs malagasy) de 1992 à 1999.

Années	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
x_i	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
y_i	52	59	60	65	70	72	73	75

On donne :

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 24,40 ; \sum_{i=1}^8 y_i = 526 ; \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 78,20 ; \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 35048 ; \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 1645,10.$$

1. a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$. (1 pt)
(Unité graphiques :
- 2 cm représente 1 million de francs malagasy sur l'axe des abscisses.
- 1 cm représente 10 millions de francs malagasy sur l'axe des ordonnées). (0,75 pt)
2. a. Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point. (1,5 pt)
- a. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire associé à cette série statistique est : $r \approx 0,98$. (0,25 pt)
- b. Interpréter ce résultat. (0,75 pt)
- c. Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression de y en x et tracer cette droite. (0,75 pt)
3. a. Montrer que $x_1, x_2, \dots, x_8$ constituent les 8 premiers termes d'une suite arithmétique (x_n) dont on précisera la raison. (0,25 pt)
- b. Donner une estimation du chiffre d'affaires de cette entreprise en 2002. (0,5 pt)

Exercice 3 5 points

N.B. : – Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
– On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : rouges, vertes et noires.

1. On suppose qu'il y ait 12 boules dans l'urne dont : 3 rouges, 4 noires et 5 vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. (0,5 pt)
- a. Déterminer le nombre de tirages possibles.

- b. Déterminer les probabilités des événements suivants :
- A : « Avoir 3 boules noires ». (0,5 pt)
 B : « Avoir 3 boules de même couleur ». (0,5 pt)
 C : « Avoir au moins deux boules noires ». (0,5 pt)
 D : « Avoir au plus deux boules rouges ». (0,5 pt)
2. On suppose qu'il y ait 25% de boules rouges dans l'urne. On appelle « gain » l'obtention d'une boule rouge lors d'un tirage d'une boule de l'urne. L'expérience consiste à tirer au hasard et successivement 4 boules de l'urne en remettant dans l'urne chaque boule tirée avant de tirer une autre. Soit X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe le nombre de gains.
- a. Vérifier que l'univers image de X est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. (0,25 pt)
- b. Montrer que la probabilité d'avoir 3 gains est égale à $\frac{3}{64}$. (0,5 pt)
- c. Déterminer la loi de probabilité de X . (1 pt)
- d. Définir la fonction de répartition F de X . (0,5 pt)
- e. Si n est le nombre de boules rouges, $3n - 7$ le nombre de boules vertes et $2n - 1$ le nombre de boules noires dans l'urne, calculer n . (0,25 pt)

Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

On note par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = (-x + 2)e^x - 1$.
- a. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h). (0,5 pt)
- b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0 ; +\infty[$. Vérifier que α est compris entre $\frac{3}{2}$ et 2. (0,5 pt)
- c. En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $h(x)$. (0,5 pt)
2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat. (0,5 pt)
- b. Etudier, suivant les valeurs de x , la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = 1$. (On admet que $e^x - x > 0$ sur $[0 ; +\infty[$). (0,5 pt)
3. a. Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$. (0,5 pt)
- b. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ et donner le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- c. Tracer (D) et $(\mathcal{C})$ dans un même repère. (On prendra $\alpha \approx 1,84$ et $f(\alpha) \approx 1,20$). (0,5 pt)
4. Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \ln(e^x - x)$.
- a. Calculer $F'(x)$. (0,5 pt)
- b. On note par $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe $(x'Ox)$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. Utiliser l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour montrer que
- $$A(\alpha) = 4 \ln \left[\frac{(1 - \alpha)^2}{2 - \alpha} \right] \text{ cm}^2. \quad (0,5 \text{ pt})$$

N.B. : Les QUATRE Exercices sont obligatoires.

Exercice – 1 (5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i$.

1. a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure αi où α est un réel que l'on déterminera. (0,5 pt)
 b) Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - \alpha i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera. (0,5 pt)
 c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (0,5 pt)
2. Dans le plan complexe (**P**) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 3 - 3i$ et $z_C = 2i$.
 a) Placer les points A, B, C. (0,25 pt)
 b) On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. Donner la forme trigonométrique de Z . (1 pt)
 c) En déduire la nature du triangle ABC. (0,25 pt)
3. On considère la transformation S du plan (**P**) dans (**P**), qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :
$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y \end{cases}$$

 a) Donner l'expression complexe de S . (0,5 pt)
 b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S . (1 pt)
 c) Soit le cercle (**C**) de centre I (1 ; -1) et de rayon $r = \sqrt{2}$.

Déterminer la nature et les éléments géométriques du transformé (**C'**) de (**C**) par la transformation S . (0,5 pt)

Exercice – 2 (5 points)

N.B. : On exprimera les résultats sous forme décimale à 10^{-2} près.

Le tableau suivant indique les variations des dépenses mensuelles y_i de la famille Rakoto lors des 7 premiers mois de l'année 2000. (x_i désigne le rang du mois et y_i est exprimé en milliers de francs malagasy).

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	375	387	385	393	400	410	415

On donne : $\sum_{i=1}^7 x_i = 28$; $\sum_{i=1}^7 y_i = 2.765$; $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$; $\sum_{i=1}^7 y_i^2 = 1.093.393$; $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 11.241$

1. a) Représenter le nuage de points $M(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. (1 pt)
 - Sur l'axe des abscisses, choisir 1 cm pour unité graphique.
 - Sur l'axe des ordonnées, placer 370 à l'origine puis choisir 1 cm pour représenter 10.000-francs.
 b) Calculer les coordonnées du point moyen G. (0,5 pt)
2. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r . (1,5 pt)
 b) Interpréter ce résultat. (0,5 pt)
3. Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression (**D**) de y en x . Tracer cette droite. (0,75 + 0,25 pt)
4. En utilisant la droite (**D**), donner une estimation des dépenses de la famille Rakoto pour le mois d'Octobre 2000. (0,5 pt)

Exercice – 3**(5 points)**

Une urne contient 12 jetons indiscernables au toucher dont 6 jaunes, 3 verts et 3 rouges.

1. On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne.

Soit X la variable aléatoire définie de la façon suivante :

- X prend la valeur 1 si les 3 jetons tirés sont de la même couleur.
- X prend la valeur -2 si 2 et 2 seulement des 3 jetons tirés sont de la même couleur.
- X prend la valeur 0 si les 3 jetons tirés sont de 3 couleurs différentes.

- a) Déterminer la loi de probabilité X .

(1,5 pt)

- b) Définir la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Unités : $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$; $\|\vec{j}\| = 11 \text{ cm}$.

(1 pt)

2. On répète 5 fois de suite et de façon indépendante l'épreuve qui consiste à tirer au hasard et simultanément 3 jetons.

A chaque épreuve, on marque 1 point si l'événement $(X = 1)$ est réalisé sinon on marque 0 point.

Soit Y la variable aléatoire égale au total des points marqués à l'issue des 5 épreuves.

- a) Déterminer la loi de probabilité de Y .

(1 pt)

- b) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y .

(0,5 pt)

3. On enlève un jeton vert du contenu initial de l'urne. On tire au hasard et simultanément 2 jetons que l'on ne remet plus dans l'urne puis on tire de nouveau au hasard et simultanément 2 jetons.

Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons verts au deuxième tirage.

(1 pt)**Exercice – 4****(5 points)**

On considère la fonction numérique f définie sur 3 par : $f(x) = (2 - x)e^x - 2x - 2$.

On note par **(C)** la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = (1 - x)e^x - 2$.

- a) Etudier les variations de g (on ne demande pas la courbe représentative de g).

(1 pt)

- b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in 3$.

(0,25 pt)

2. a) Etudier les variations de f en utilisant 1.b).

(1 pt)

- b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x - 2$ est asymptote à **(C)**.

(0,25 pt)

- c) Etudier suivant les valeurs de x , la position relative de **(C)** par rapport à (D) .

(0,5 pt)

- d) Déduire de 1.a) que l'origine O est un point d'inflexion pour **(C)** et donner l'équation de la tangente (T) à **(C)** au point O .

(0,5 pt)

- e) Construire (T) , (D) et **(C)**.

(1 pt)

3. Soit **A** l'aire du domaine plan limité par la courbe **(C)**, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire **A**.

(0,5 pt)

N.B. : Les QUATRE exercices sont obligatoires.

EXERCICE 1 (5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$.

- 1°/ a) - Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure αi où α est un réel que l'on déterminera. (0,5 pt)
- b) - Mettre $P(z)$ sous la forme $(z - \alpha i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera. (0,5 pt)
- c) - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (0,5 pt)
- 2°/ Dans le plan complexe ($\mathbb{P}$) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 3 + i; z_B = 2i; z_C = 2 - 2i$.
- a) - Placer les points A, B, C (On complètera cette figure au fur et à mesure des questions). (0,5 pt)
- b) - On pose $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Donner la forme trigonométrique de Z . (0,5 pt)
- c) - En déduire la nature du triangle ABC . (0,5 pt)
- d) - Calculer l'affixe du point E tel que $ABEC$ soit un carré. (0,25 pt)
- e) - Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. (0,25 pt)
- 3°/ Soit S la similitude plane directe transformant A en C et laissant invariant le point B .
- a) - Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. (0,5 + 0,5 pt)
- b) - Déterminer et construire l'image par S du quadrilatère $ABED$. (0,5 pt)

EXERCICE 2 (5 points)

Le tableau suivant indique, pour une même distance, les variations des quantités y_i d'essence consommées de certaines voitures suivant leurs puissances x_i (x_i est exprimé en chevaux et y_i en litres).

x_i	3	4	5	5	6	7	8	10
y_i	10	12	20	25	28	30	32	35

On donne : $\sum_{i=1}^8 x_i = 48$; $\sum_{i=1}^8 y_i = 192$; $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 324$; $\sum_{i=1}^8 y_i^2 = 5202$; $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 1287$.

- 1°/ a) - Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. (1 pt)
- * 1 cm sur l'axe des abscisses représente 1 cheval.
- * 1 cm sur l'axe des ordonnées représente 5 litres.
- b) - Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point. (0,75 pt)
- 2°/ a) - Calculer le coefficient de corrélation linéaire associé à cette série statistique. (1,5 pt)
- b) - Interpréter ce résultat. (0,25 pt)
- 3°/ a) - Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression (D) de y en x . Tracer cette droite. (0,75 + 0,25 pt)
- b) - Donner une estimation de la quantité d'essence consommée par une voiture de puissance de 12 chevaux. (0,5 pt)

EXERCICE 3 (5 points)

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher dont :

- cinq jetons blancs numérotés : 2, 4, 6, 8, 10.
- cinq jetons noirs numérotés : 1, 3, 5, 7, 9.

L'épreuve E consiste à tirer au hasard et successivement trois jetons de l'urne sans remettre dans l'urne le jeton qui a été tiré.

1°/ a) – Quel est le nombre de triplets que l'on peut obtenir ? (0,5 pt)

b) – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Les jetons tirés sont de même couleur ». (0,5 pt)

B : « Les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression arithmétique de raison 2 ». (0,5 pt)

C : « Les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression géométrique de raison 2 ». (0,5 pt)

2°/ Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve, désigne le rang du premier jeton noir tiré. (On admet que ce rang est 0 s'il n'y a aucun jeton noir tiré).

a) – Déterminer la loi de probabilité de X. (1 pt)

b) – Définir la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement dans un repère orthogonal

(O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Unités : $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$; $\|\vec{j}\| = 9 \text{ cm}$. (0,25 + 0,25 pt)

3°/ On répète 5 fois de suite et de manière indépendante l'épreuve E. A chaque épreuve, on marque 1 point si l'on tire un jeton noir au premier coup sinon on marque 0 point.

Soit Y la variable aléatoire égale au total des points marqués à l'issue des 5 épreuves.

a) – Déterminer la loi de probabilité de Y. (0,5 pt)

b) – Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y. (0,25 + 0,25 pt)

c) – Calculer la probabilité pour que l'on marque au moins 1 point à l'issue des 5 épreuves. (0,5 pt)

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = (x + 1) \ln|x|$. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité 1 cm.

1°/ a) – Déterminer le domaine de définition Df de f. (0,25 pt)

b) – Calculer les limites aux bornes de Df. (0,25 pt)

2°/ Soit $g(x) = \frac{x+1}{x} + \ln|x|$.

a) – Etudier les variations de g (on ne demande pas la courbe représentative de g). (0,5 pt)

b) – Calculer g(-1) et préciser le signe de g(x) suivant les valeurs de x. (0,5 pt)

3°/ a) – Calculer f'(x) et l'exprimer en fonction de g(x). (0,5 pt)

b) – Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

4°/ a) – Montrer que le point I (1, 0) est un point d'inflexion pour la courbe (C). (0,25 pt)

b) – Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point I. (0,25 pt)

c) – Etudier les branches infinies de (C). (0,25 pt)

d) – Construire (T) et (C). (0,25 pt)

+ 0,5 pt)

5°/ Calculer, en cm², l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe (x'Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (On pourra faire une intégration par parties). (1 pt)

N.B. : Le candidat doit traiter les *DEUX Exercices* et le *Problème*.

Exercice 1 (5 points)

On considère deux dés cubiques D et D'. Le dé D numéroté de 1 à 6 est **pipé** de telle sorte que les probabilités p_i , $1 \leq i \leq 6$ d'apparition de la face numérotée i vérifient les conditions suivantes :

- $p_1 = p_2 = p_3$
- $p_4 = 3p_1$
- $p_6 = 2p_5 = 4p_4$

Le dé D' est **non pipé**, numéroté : 1, 1, 1, 2, 2, 4. On note p'_1 , p'_2 et p'_4 les probabilités d'apparitions respectives des faces numérotées 1, 2 et 4.

1. Montrer que $p_1 = \frac{1}{24}$. En déduire p_i , $2 \leq i \leq 6$. (1 pt)
2. On lance quatre fois de suite le dé D d'une façon indépendante. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face numérotée 5.
 - a) Donner la loi de probabilité de X. (1 pt)
 - b) Calculer l'espérance et la variance de X. (0,5 pt)
3. On lance simultanément les dés D et D'. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - A. « la somme des numéros obtenus est égale à 5 ». (0,75 pt)
 - B. « la somme des numéros obtenus est inférieure ou égale à 7 ». (1 pt)
 - C. « les numéros obtenus sont identiques ». (0,75 pt)

Exercice 2 (5 points)

Soit le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (1 pt)
2. Dans le plan complexe $\mathbf{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M d'affixe $z = x + iy$ et M' d'affixe $z' = x' + iy'$. x, y, x', y' sont des réels.

Soit S la similitude plane directe qui à tout point M associe le point M' telle que :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$$
 - a) Ecrire l'expression complexe de S. (1 pt)
 - b) Donner ses éléments caractéristiques. (0,75 pt)
 - c) Donner l'image par S des points A(0, 2) et I(1, 2). (0,5 pt)
3. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donner la nature et les éléments géométriques de $S' = R \circ S$ où $\circ$ est la composition des applications. (1 pt)
4. Quel est l'ensemble (E) des points M d'affixe z vérifiant $|(-1 + i)z + 3 + i| = \sqrt{2}$? (0,75 pt)

Problème

(10 points)

Soit f la fonction telle que $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{\ln x}{x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Calculer f' et f'' dérivées première et seconde de f . (1 pt)
2. a) Etudier la variation de f' . (1 pt)
b) En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 pt)
3. Etudier la variation de f . (1 pt)
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote oblique à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D) sur $]0, +\infty[$. (0,25 + 0,25 pt)
5. Montrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D) . (1 pt)
6. Tracer (D) , (T) et (C) . (1,25 pt)
7. Calculer en cm^2 , l'aire géométrique du domaine plan, limité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. (0,75 pt)
8. On considère la fonction g définie sur $[3, +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1 - f(x)$.
 - a) Montrer que g est décroissante. (0,5 pt)
 - b) En déduire que si $n \leq x \leq n + 1$ alors $0 < g(x) \leq g(n)$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. (1 pt)
 - c) On définit la suite $(U_n)_{n \geq 3}$ par $U_n = \int_n^{n+1} g(x) dx$.

Donner un encadrement de U_n , puis en déduire $\lim U_n$. (1,25 + 0,25 pt)

On donne : $e^{-3} \approx 0,05$ $e^{-1} \approx 0,37$

Série D - SESSION 2004

N.B. : - Les DEUX exercices et le PROBLEME sont obligatoires.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 : (5 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z . (1pt)

$$z^2 - (4 + 5i)z - 1 + 7i = 0.$$

2°) Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$; $z_B = 3 + 4i$ et $z_C = 4 - i$.

a/ Déterminer l'expression complexe associée à la similitude plane directe S telle que :

$$S(A) = B \quad \text{et} \quad S(B) = C. \quad (1pt)$$

b/ Préciser les éléments caractéristiques de S . (0,75pt)

3°) On note par I le milieu du segment $[BC]$.

a/ Calculer l'affixe z_I de I . (0,25pt)

b/ Placer les points A, B, C et I dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) (0,5pt)

c/ Déterminer et construire l'ensemble $(\square)$ des points M d'affixe z vérifiant :

$$\left| z - \frac{7 + 3i}{2} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2}. \quad (1pt)$$

d/ Déterminer et construire l'ensemble $(\square')$ image de $(\square)$ par S . (0,5pt)

EXERCICE 2 : (5 points)

Une urne U_1 contient six boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et trois boules numérotées 2.

Une autre urne U_2 contient cinq boules : deux boules numérotées 0, une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1°) On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne U_1 .

Calculer les probabilités des événements suivants :

A: << La somme des numéros notés est égale à 4 >> (0,5pt)

B: << Parmi les trois boules tirées, deux boules exactement sont numérotées par 2 >> (0,5pt)

C: << Le produit des numéros notés sur les trois boules tirées, est différent de 0 >> (0,5pt)

D: << Les trois boules obtenues portent le même numéro >> (0,5pt)

2°) On remet l'urne U_1 à sa condition initiale. On tire une boule de l'urne U_1 , puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_2 . On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité, associe le produit des numéros notés sur les trois boules obtenues.

a/ Vérifier que l'univers image de X est égal à l'ensemble $\{0, 2, 4, 8\}$. (0,5pt)

b/ Montrer que $P(X=0) = \frac{3}{4}$ et $P(X \geq 4) = \frac{11}{60}$. (0,25+0,5pt)

c/ Calculer la probabilité de l'événement : $(X=2)$. (0,25pt)

d/ Compléter le tableau des valeurs ci-dessous : (0,25+0,25pt)

k	0	2	4	8
$P(X=k)$	$\frac{3}{4}$			

e/ Montrer que $E(X) = \frac{16}{15}$, $E(X)$ étant l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . (0,25pt)

f/ Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X .

On utilisera pour la représentation graphique de F un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On prendra comme unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 6cm sur l'axe des ordonnées) (0,25+0,5pt)

(N.B : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).

PROBLEME (10 points) :

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

On note par $(\square)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm).

1°) On donne la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (0,25+0,25)

b/ Pour tout $x > 0$, calculer $g'(x)$ et étudier son signe. (1+0,5pt)

c/ Dresser le tableau de variation de g . (1pt)

d/ Montrer qu'il existe un et un seul nombre réel α vérifiant $g(\alpha) = 0$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (1pt)

2°) a/ Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$. (0,5pt)

b/ Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $f'(x) = e^x g(x)$. (0,5pt)

c/ Calculer $f'(\alpha)$. (0,25pt)

d/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (On pourra utiliser l'égalité $f(x) = \frac{e^x}{x} (x \ln x + 1)$). (0,25+0,25)

e/ Dresser le tableau de variation de la fonction f . (0,75pt)

3°) a/ Donner une équation de la tangente (T) à $(\square)$ au point d'abscisse 1. (0,5pt)

b/ Construire $(\square)$ et (T) dans un même repère. (1+0,5pt)

4°) On pose pour tout $x > 0$, $h(x) = e^x \ln x$

Montrer que h est une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (0,5pt)

5°) Soit $I = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$ où α est le réel défini à la question 1°) d/

a/ Montrer que $I = e^{\alpha} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$. (0,5pt)

b/ Interpréter géométriquement l'intégral I . (0,5pt)

On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ $\alpha \simeq 0,6$ $f(\alpha) \simeq 2,1$ $e \simeq 2,7$

Série D - SESSION 2005

N. B : - Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe i .

1°) Résoudre dans $\forall$ l'équation à une inconnue z suivante : $\frac{iz - 2 + 4i}{z - i} = z$. (1,00pt)

2°) A tout point M d'affixe z , avec $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe z'

$$\text{tel que : } z' = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}.$$

a/ Exprimer $z' - i$ en fonction de z . (0,50pt)

b/ Montrer que $(z' - i)(z - i) = -3 + 4i$. (0,25pt)

c/ En déduire la valeur de $|z' - i| \cdot |z - i|$. (0,25pt)

d/ Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que $|z - i| = \sqrt{10}$. (0,50pt)

e/ En utilisant les résultats précédents, montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{10}$ alors M' appartient à un cercle (C') de centre A dont on déterminera le rayon. (0,50pt)

3°) Soit S la similitude plane directe de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{5\pi}{4}$.

a/ Ecrire l'expression complexe de S . (1,00pt)

b/ Soit B le point d'affixe $1 + 3i$ et $B' = S(B)$. Déterminer l'affixe de B' .

Montrer que B' appartient au cercle (C) . (0,5+0,5pt)

EXERCICE 2 (5 points)

On dispose de deux dés cubiques parfaits et identiques D_1 et D_2 .

Chaque dé comporte :- trois faces numérotées 1

- deux faces numérotées 2

- une face numérotée 5.

1°/ On lance une fois le dé D_1 et on note le numéro apparu sur la face supérieure du dé.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le numéro apparu est impair ». (0,50pt)

B : « Le dé donne le numéro 1 ». (0,50pt)

2°/ On lance simultanément les deux dés D_1 et D_2 et on note les numéros apparus sur les faces supérieures des deux dés. On dit qu'on a effectué ainsi «une épreuve».

a) Soit l'événement C : « La somme des numéros notés est égale à 4 ».

Montrer que la probabilité de l'événement C : $P(C) = \frac{1}{9}$. (0,50pt)

b) Calculer la probabilité de l'événement :

E : « Les deux dés donnent le même numéro ». (0,50pt)

c) Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque éventualité, associe la somme des numéros apparus sur les faces supérieures des deux dés.

Préciser l'univers image de X puis déterminer la loi de probabilité de X . (0,25+1,0pt)

3°/ Une partie consiste à effectuer 4 épreuves successives d'une manière indépendante.

A chaque épreuve, on note les numéros obtenus. On fait une partie. Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois de réalisation de l'événement C lors d'une partie.

a) Préciser l'univers image de Y . (0,25pt)

b) Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y . (0,50+0,50pt)

c) Calculer $P(Y = 3)$. (0,50pt)

PROBLEME (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 \ln(x+1) & \text{si } x \in]-1, 0[\\ x - 1 + e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm).

1°) a/ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$. (0,50pt)

b/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. (0,50+0,50pt)

Que peut-on en conclure sur f ? (0,25pt)

2°) a / Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,25+0,25pt)

b/ si $x \in]-1, 0[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. (0,50+0,25pt)

c/ si $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. (0,50+0,25pt)

d/ Dresser le tableau de variation de f . (1,25pt)

3°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. (0,50pt)

4°) Tracer (C) et (D) dans un même repère (préciser les demi-tangentes à l'origine 0 du repère). (1+0,5+0,5pt)

5°) Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$.

On note $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$.

a/ Exprimer, en cm^2 , $A(\alpha)$ en fonction de α . (0,50pt)

b/ Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$. (0,25pt)

6°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_n^{n+1} [f(x) - (x - 1)] dx$.

(En remarquant que si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n, n+1]$ on a : $f(x) = x - 1 + e^{-x}$).

a/ Exprimer U_n en fonction de n . (0,50pt)

b/ Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (0,50pt)

7°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} . (0,25pt)

b/ Représenter graphiquement g^{-1} dans le même repère que (C). (0,50pt)

Série D - SESSION 2006

- NB :** - Les DEUX exercices et le problème sont obligatoires.
- Machine à calculer autorisée.

Exercice 1 (5 points)

- 1 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$. (1,25 pt)
- 2 – Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité 1 cm), on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :
 $z_A = -1 + i$; $z_B = 1 - i$; $z_C = 2i$ et $z_D = 4 + 6i$.
- a) Placer les points A, B, C et D. (0,5 pt)
- b) Ecrire l'expression complexe de la similitude directe S telle que $S(D) = A$ et $S(C) = B$. (1 pt)
- c) Donner les éléments caractéristiques de la similitude S. (0,75 pt)
- 3 – A tout point M d'affixe z ($M \neq D$), on associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que : $z_1 = \frac{2z - 4i}{z - 4 - 6i}$.
- a) Montrer que $OM_1 = \frac{2CM}{DM}$. (0,5 pt)
- b) Déterminer et représenter graphiquement les ensembles (Γ) et (Γ') tels que :
- (Γ) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z_1| = 2$. (0,5 pt)
 - (Γ') est l'image de (Γ) par la similitude S. (0,5 pt)

Exercice 2 (5 points)

Une urne contient 2 boules rouges et 4 boules vertes. Les boules rouges portent respectivement les numéros 0 et 1 ; les boules vertes portent respectivement les numéros 2, 3, 4 et 5. L'épreuve (E) consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne ; on appelle « succès » l'obtention de 3 boules de même couleur.

- 1 – On effectue une fois l'épreuve (E)
 Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
- A : « avoir un succès ». (0,75 pt)
- B : « avoir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 6 ». (0,75 pt)
- 2 – A chaque épreuve (E), on désigne par X la variable aléatoire réelle qui prend comme valeur le plus grand des numéros portés sur les 3 boules tirées.
- a) Donner l'univers-image de X. (0,5 pt)
- b) Donner la loi de probabilité de X. (2 pts)
- 3 – On répète n fois de suite, d'une manière indépendante l'épreuve (E). On note l'événement :
- A_n : « Obtenir au moins un succès lors des n épreuves (E) »
- a) Calculer la probabilité p_n de l'événement A_n . (0,5 pt)
- b) Déterminer le nombre minimum d'épreuves (E) qu'on doit effectuer pour que $p_n > 0,99$. (0,5 pt)

$$\text{On donne : } \ln \frac{5}{4} = 0,22 ; \ln 10 = 2,30$$

Problème (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ où e désigne le nombre réel base des logarithmes népériens.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

- 1 – On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.
- a) Donner le sens de variation de g . (1,25 pt)
- b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$. (1 pt)
- c) En déduire que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $g(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) < 0$. (0,5 pt)
- d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$. (0,5 pt)
- 2 – a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. (0,75+0,5 pt)
- b) Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f et vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$:
- $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}. \quad (0,5+0,25 \text{ pt})$$
- c) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- 3 – Tracer la courbe (C) en précisant les branches infinies.
- On prendra $\ln 2 = 0,69$; $e = 2,71$; $\alpha = 0,67$ et $f(\alpha) = 3,16$ pour la construction. (1,25 pt)
- 4 – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x) dx$.
- a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$. (1 pt)
- b) Montrer que $A_n = I_n + e$. (1 pt)
- c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e$. (1 pt)

=====

NB : - Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le PROBLEME.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE I (5 points)

Soit le Polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + (1 + i)z^2 + (4 - i)z - 6i + 12$.

- 1- a- Calculer $P(-3i)$. (0,50 pt)
 b- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle α que l'on déterminera. (0,50 pt)
 c- Déterminer le nombre complexe β tel que $P(z)$ peut s'écrire sous la forme :
 $P(z) = (z + 3i)(z + 2)(z + \beta)$. (0,50 pt)
 d- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (0,75 pt)
- 2- Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = -3i$; $z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.
 Déterminer la mesure de l'angle $(\widehat{BA}, \widehat{BC})$ et $\left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right|$ puis en déduire la nature du triangle ABC. (0,25+0,25)
- 3- Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (0,25 pt)
 Ecrire l'expression complexe de la rotation r . (0,50 pt)
- 4- On considère la transformation S du plan $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $S : z' = 2iz - 2 + 4i$.
 a- Donner la nature et les éléments caractéristiques de S . (0,25+0,75)
 b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation h telle que $r \circ h = S$. (0,50 pt)

EXERCICE II (5 points)

Un sac contient six jetons, portant les lettres A, B, C et D dont la répartition suivant les couleurs est donnée par le tableau ci-dessous :

Lettres Couleurs	A	B	C	D
Rouges	0	1	1	0
Jaunes	1	0	0	1
Noires	1	1	0	0

Chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

- I- On tire au hasard et successivement sans remise trois jetons du sac.
 - 1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 E : "obtenir exactement un jeton rouge". (0,50 pt)
 F : "obtenir dans l'ordre, les lettres B, A, C". (0,50 pt)
 - 2) Soit X la variable aléatoire associée au rang de la première consonne sortie.
 - a) Déterminer l'univers-image de X . (0,50 pt)
 - b) Etablir la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . (1+0,25)
- II- Une épreuve (E) consiste à tirer simultanément trois jetons du sac.
 - 1) Calculer la probabilité de l'évènement : G : "obtenir les lettres du mot B A C". (0,50 pt)
 - 2) On répète trois fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve (E).
 A chaque épreuve, on marque 1 point si l'évènement G est réalisé, sinon on marque 0 point.
 Soit Y la variable aléatoire égale au total des points obtenus à l'issue des trois épreuves.
 - a) Préciser l'univers-image de Y et déterminer la loi de probabilité de Y . (0,50+0,75)
 - b) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y puis la variance $V(Y)$ de Y . (0,25+0,25)

PROBLEME

(10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} + x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

I – Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x - 1)^2 e^{-x}$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. (0,25 pt)

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ en admettant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, n \in \mathbb{N}$. (0,25 pt)

c) Calculer la dérivée $g'(x)$ de g pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,50 pt)

d) Dresser le tableau de variation de g . (1,00 pt)

e) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,25+0,50)

II– 1- a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (0,50+0,50)

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variation de f . (0,50+1,00)

2- a) Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$. (0,50 pt)

b) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A. (0,50 pt)

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ (0,50 pt)

d) Etudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ en $-\infty$. (0,50 pt)

e) Tracer (T), (Δ) et $(\mathcal{C})$. (0,25+0,25+1)

3- a) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$. (0,50 pt)

b) En déduire l'aire géométrique $\mathcal{A}$, en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$. (0,75 pt)

On donne : $e \approx 2,7$; $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,4$

N.B. : - Les deux Exercices et le Problème sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

Exercice 1 (5 points)

- 1) Résoudre dans $\forall$ l'équation : $z^2 - (1 - 3i)z - 4 = 0$. (1,00)
- 2) a) Dans le plan complexe (P), muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) d'unité 2 cm, placer les points A, B et D d'affixes respectives 1, $(-1 - i)$ et $(2 - 2i)$ ainsi que le point C milieu du segment [BD] dont on précisera l'affixe. (0,25+0,25)
- b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $\left| \frac{z+1+i}{z-2+2i} \right| = 1$. (1,00)
- c) Montrer que (Δ) passe par A. Acheter alors la construction de (Δ). (0,50+0,50)
- 3) On considère la similitude plane directe S définie par : $\begin{cases} S(B) = B \\ S(A) = D \end{cases}$
Préciser les éléments caractéristiques de S. (0,5+0,5+0,5)

Exercice 2 (5 points)

A – On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- 1) On lance une fois le dé. Calculer la probabilité d'avoir un nombre strictement supérieur à 2. (0,50)
- 2) Maintenant, on lance deux fois de suite ce dé. Une éventualité est un couple d'entiers naturels (a,b). On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque couple (a,b) obtenu, associe le réel $|a - b|$.
 - a) Déterminer l'univers image de X. (1,00)
 - b) Etablir la loi de probabilité de X. (0,50)

B – Lors d'un test, les notes obtenues par 4 candidats, aux épreuves de chant et de musique, sont indiquées dans le tableau suivant :

Musique (x_i)	α	3	6	9
Chant (y_i)	2	4	5	β

- 1) On sait que le point moyen associé à cette série statistique a pour coordonnées $\bar{x} = 5$ et $\bar{y} = 4,5$; déterminer les notes α et β respectivement obtenues par deux candidats différents en musique et en chant. (0,25+0,25)
- 2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interpréter le résultat obtenu. (1,00+0,50)
- 3) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (1,00)

PROBLEME (10 points)

- I) g est la fonction numérique définie et continue sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.
- 1) Dresser le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$. (1,00)
 - 2) Montrer qu'il existe un réel unique α dans $]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (0,50)
 - 3) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (1,00)

II) On considère maintenant la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = (x + 1) - \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right).$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

- 1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout réel x de $]0, +\infty[$ où f' est la fonction dérivée de f . (1,00)
- b) En déduire que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour tout réel x de $]0, +\infty[$. (0,50)
- 2) a) Calculer les limites de f aux bornes de $]0, +\infty[$. (0,50+0,50)
- b) Dresser le tableau de variation de f . (1,50)
- 3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique de (C) . (0,50)
- b) Déterminer l'abscisse de A , point d'intersection de (C) avec (Δ) . (0,50)
- 4) Tracer (Δ) et (C) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(Pour construire, on prendra $\frac{1}{e} = 0,4$; $\alpha = 0,6$ et $f(\alpha) = 0,8$). (0,50+1,00)
- 5) Calculer l'intégrale I définie par $I = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$. (1,00)

- N.B. : - Les deux Exercices et le Problème sont obligatoires.
 - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité : 1 cm

- 1) P est le polynôme de la variable complexe z défini par :
 $P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (10+8i)z - 4 - 8i$.
 - a) Calculer $P(2)$. (0,25pt)
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. (1pt)
- 2) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = 2$; $c = 3 + i$ et d.
 - a) Calculer d pour que ABCD soit un carré. (0,75 pt)
 - b) On considère la similitude plane directe S définie par son expression complexe : $z' = (1 + i)z + 4i$
 - Donner les éléments caractéristiques de S . (1 pt)
 - Déterminer l'expression analytique de S . (1 pt)
- 3) Construire dans le même repère ABCD et A'B'C'D' son image par S . (1 pt)

EXERCICE 2 (5 points)

- 1) Les faces d'un dé cubique D_1 truqué sont numérotées : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3.
 On lance une fois ce dé. Chaque face a la même probabilité d'apparition.
 On note P_i la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i .
 Calculer P_1 , P_2 et P_3 . (0,25 + 0,25 + 0,25)
- 2) Les faces d'un deuxième dé cubique normal D_2 sont numérotées de 1 à 6.
 On lance en même temps les deux dés D_1 et D_2 .
 Chaque face a toujours la même probabilité d'apparition.
 - a) Calculer la probabilité de l'événement :
 A : « les deux dés affichent le même numéro » (0,5 pt)
 - b) On désigne par X la variable aléatoire définie par la somme des numéros affichés par les deux dés.
 - Donner la loi de probabilité de X (1 pt)
 - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. (1 pt)
- 3) On lance trois fois de suite et d'une façon indépendante le dé D_1 .
 On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face portant le numéro 2 lors de ces trois lancers.
 - a) Donner la loi de probabilité de Y . (1 pt)
 - b) Calculer la variance $V(Y)$. (0,75 pt)

NB : Tous les résultats seront exprimés sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(1 - \ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 1 cm.

- 1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $]0 ; +\infty[$. (0,5 pt)
- 2) a) Prouver que f est continue en $x_0 = 0$. (0,75 pt)
 b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. (0,5 pt)
- 3) a) Démontrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$ où f' désigne la fonction dérivée première de f . (0,5 pt)
 b) Après avoir précisé le sens de variations de f , dresser son tableau de variations. (0,5 + 0,5)
 4) Tracer la courbe (C). (2 pts)
- 5) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0 ; e[$.
 a) Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties l'intégrale

$$I = \int_{\alpha}^e f(x) dx$$
 (1,5 pts)
 b) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine plan délimité par l'axe $(\vec{O}, \vec{i})$, les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$ et la courbe (C).
 Calculer en cm^2 $\mathcal{A}(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$. (0,25 + 0,25)
- 6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e ; +\infty[$.
 a) Démontrer que g admet une application réciproque notée g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. (1 pt)
 b) Calculer $g(e^2)$ et $(g^{-1})'(e^2)$ (0,25 + 0,5)
- 7) Tracer dans le même repère que (C) la courbe représentative (Γ) de g^{-1} (1 pt)

On donne $e \approx 2,7$; $e^{-1} \approx 0,36$; $e^2 \approx 7,4$

EXERCICE 1 (4points)

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm.

1) On considère les points S, R et D d'affixes respectives (-4) , $(1-i)$ et $(3i)$.

Représenter, dans $\mathcal{R}$, l'image du triangle SRD, par la similitude plane directe de centre R,

d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

0,5

2) Soit Ψ le nombre complexe défini par $\Psi = \frac{z-3i}{z+4}$.

a) Interpréter géométriquement Ψ .

0,25+0,25

b) M étant le point d'affixe z , préciser la nature de chacun des ensembles (Δ) et (Σ) définis respectivement par :

$$(\Delta) = \{M \in (P); |\Psi| = 1\} \quad \text{et} \quad (\Sigma) = \left\{M \in (P); \arg(\Psi) = \frac{\pi}{2}\right\}$$

0,5+0,5+0,25

On justifiera que (Σ) ne passe pas par l'origine des axes.

c) Construire, dans $\mathcal{R}$, (Δ) et (Σ) .

1

3) On donne le polynôme Q , de la variable complexe z , défini par : $Q(z) = z^4 - 3iz^3 + 8iz + 24$.

a) Calculer $Q(3i)$.

0,5

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $Q(z) = 0$.

1,25

EXERCICE 2 (5 points)

1) A l'issue d'une expérience aléatoire, on définit une variable aléatoire X par le tableau suivant :

x	-1	2	3	4
$p(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$

a) Définir la fonction de répartition F de X .

1

b) Représenter graphiquement F dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 8\text{cm}$.

1

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

0,5 + 0,5

2) Une soubique contient des poussins jaunes et des poussins gris. Un enfant prend au hasard et simultanément deux poussins de la soubique. Il y a 3 fois plus de chances, pour lui, de prendre deux gris que deux jaunes.

La probabilité de prendre deux poussins de couleurs différentes est le double de celle de prendre deux poussins gris.

a) Prouver que la probabilité pour l'enfant de prendre deux poussins gris est égale à 0,3.

1,5

b) Déterminer la probabilité pour l'enfant de prendre au moins un poussin gris.

0,5

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = -x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x) \quad \text{si } 0 < x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

- 1) Préciser l'ensemble de définition de f . 0,25
- 2) Prouver que f est continue en 0 et en 1. 1
- 3) Justifier que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty. \quad \text{0,5 + 0,5}$$

Que peut-on en déduire pour la dérivabilité de f en 0 et en 1, puis pour les tangentes à la courbe

représentative de f aux points $O(0;0)$ et $P(1;0)$? 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25

- 4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;1[$. 0,75

b) Résoudre, dans $]0;1[$, l'inéquation : $\ln(1-x) - \ln(x) \leq 0$. 0,5

c) Dresser le tableau de variation de f . - 0,75

- 5) Tracer la courbe représentative de f et ses tangentes, dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 10 cm.

(On prend $\ln(2) \approx 0,7$) 1,75

- 6) Soit u et v les fonctions numériques définies respectivement sur $]0;1[$ par :

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{(x-1)^2}{2} \ln(1-x) - \frac{x^2 - 2x}{4}$$

- a) Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$. 0,5 + 0,5

- b) Déterminer la primitive sur $]0;1[$ de f qui prend la valeur $-\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{2}$. 2

Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2011

MATHEMATIQUES – Série : D

N.B. : - Les DEUX exercices et le Problème sont obligatoires.

- Machine à calculer scientifique NON programmable autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

Soit l'équation (E) : $z^3 + (1-i)z^2 + (-8+4i)z - 4 - 28i = 0$

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure ai où a est un nombre réel que l'on déterminera. (0,5pt)

2°) a- Montrer que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - a)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b, c sont des nombres complexes à déterminer. (0,75 pt)

b- Résoudre dans C l'équation (E) (0,75pt)

3°) Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 1 cm, on donne les points A, B, et C d'affixes respectives $-2i$; $3 + i$ et $-4 + 2i$.

a- Placer les points A, B, et C dans le plan (P). (0,25pt)

b- On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

Ecrire Z sous forme trigonométrique. (0,5 pt)

c- En déduire la nature du triangle ABC. (0,5pt)

d- Trouver l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme (0,5pt)

4°) Soit S la transformation d'expression complexe $z' = \frac{4}{3}iz - \frac{8}{3} - 2i$

a- Quelle est la nature de S et donner ses éléments caractéristiques. (0,25pt + 0,5pt)

b- Construire l'image $A'B'C'D'$ de ABCD par S^1 . (0,5pt)

EXERCICE 2 (5 points)

I) Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher dont :

. 3 rouges numérotées : 2 ; 2 ; 5

. 5 blanches numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

1) Le jeu consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir deux boules de couleurs différentes » (0,25pt)

B : « obtenir deux boules de numéros pairs » (0,5 pt)

C : « obtenir deux boules dont le produit des numéros est égal à 4 » (0,5 pt)

2) On tire au hasard et successivement avec remise 3 boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules portant le numéro 5 obtenu.

a) Déterminer l'univers image de X (0,5pt)

b) Donner la loi de probabilité de X (0,75pt)

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

II) On donne sur le tableau ci-dessous le nombre d'élèves d'un lycée ayant réussi le Baccalauréat durant 4 années successives :

Année	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année(x_i)	1	2	3	4
Nombre d'élèves en centaine (y_i)	3	5	6	9

1) Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ **1 si 4** associé à cette série statistique. (0,75pt)

Echelle : sur l'axe des abscisses, prendre 1cm pour représenter une unité.

sur l'axe des ordonnées, placer 2 à l'origine des axes puis prendre 1cm pour représenter 100 élèves.

2) Déterminer le point moyen G. (0,5pt)

3) Calculer le coefficient de corrélation r et interpréter. (0,5pt)

4) Ecrire l'équation de la droite de régression de y en x. (0,5pt)

5) Combien de réussites peut-on espérer en 2014 ? (0,25pt)

NB : Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

PROBLEME (10 points)

corrigé

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : **$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$**

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé **$(O, \vec{i}, \vec{j})$** d'unité 2cm.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : **$g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$**

a- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (0,5pt+0,5pt)

b- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée α dans $\mathbb{R}$

et que $-1 < \alpha < 0$. (0,5pt)

c- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5pt)

2) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,25 pt x2)

b- Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$. (0,5pt)

c- Montrer que $f(\alpha) = 1 + \frac{2\alpha^2}{\alpha - 1}$. (0,5pt)

d- Dresser le tableau de variation de f . (0,5pt)

3) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat. (0,25 pt x2)

b- Démontrer que la droite (D) : $y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ (0,5pt)

c- Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (D). (0,5pt)

4) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0 = 0$. (0,5pt)

b- Montrer qu'il existe un point A de $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ admet une tangente (T') parallèle à (D). (0,25pt)

Trouver les coordonnées du point A. (0,25pt)

5) Tracer (D), (T), (T') et $\mathcal{C}$ dans le même repère. Pour la construction, on prendra

$\alpha = -0,4$ et $f(\alpha) = 0,8$. (0,25pt x3 + 1,25pt)

6) a- A l'aide d'une intégration par partie ; calculer $I_\lambda = \int_0^\lambda x e^{-x} dx$ (0,5pt)

b- Déterminer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, (D) et les droites

d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$, ($\lambda > 0$) (0,5pt)

c- Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. (0,5pt)

Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2012

MATHEMATIQUES – Série : D

N.B : - Les DEUX exercices et le Problème sont obligatoires.

- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE 1 : (5 points)

1) Calculer $(2-i)^2$. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $iz^2 - iz + 1 + i = 0$. **(0,5pt + 1pt)**

2) Soit P le polynôme de variable complexe z définie par : $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$.

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle positive α que l'on déterminera. **(0,5pt)**

b) Déterminer les nombres a et b tels que : $P(z) = (z-1)(z-2-2i)(az+b)$. **(0,5pt)**

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthogonal direct $\mathcal{R}(\vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C, d'affixes respectives : 1 ; $2+2i$ et $1-i$.

$$U = \frac{2+2i}{1-i}$$

a) Donner la forme trigonométrique de U . **(0,75pt)**

b) En déduire la nature du triangle OBC. **(0,25pt)**

$$\begin{cases} z' = z + \gamma - 1 \\ \gamma' = -z + \gamma + 2 \end{cases}$$

4) Soit S la similitude plane directe telle que : Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. **(0,75pt + 0,75pt)**

EXERCICE 2 : (5 points)

Un bassin contient 10 poissons dont 2 carpes, 3 tanches et 5 gardons.

On pêche au hasard et simultanément 3 poissons par un filet du bassin. Chaque poisson a la même probabilité d'être pris par le filet.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « avoir aucune tanche ».

(0,75pt)

E_2 : « avoir au moins une carpe ».

(0,75pt)

E_3 : « avoir exactement 2 gardons ».

(0,5pt)

On répète quatre fois de suite cette épreuve d'une manière indépendante.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de la réalisation de l'évènement E_3 .

a) Donner la loi de probabilité de X. **(1,25pts)**

b) Calculer l'espérance mathématique $E(x)$ et la variance $V(x)$. **(0,5pt + 0,5pt)**

c) Calculer la probabilité $P(x \leq 3)$. **(0,75 pt)**

(N.B : on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).

PROBLEME : (10 points)

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1) Calculer $g'(x)$ puis étudier le sens de variation de g sur $]0 ; +\infty[$. (on ne demande pas les limites) **(0,5 pt+1 pt)**

2) Calculer $g(1)$. En déduire que g est strictement positif sur $]0 ; +\infty[$. **(0,5 pt+ 0,25 pt)**

II - Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + 2 \frac{\ln x}{x}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé **(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)**

d'unité graphique 2 cm.

1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 pt+ 0,25 pt)**

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **(0,5 pt)**

2) a- Montrer que la droite (Δ) , d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$. **(0,5 pt)**

b- Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) . **(0,25 pt)**

3) a- Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\frac{f'(x) - g(x)}{x^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de f . **(1pt)**

b- Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ suivant les valeurs de x . **(0,25 pt)**

c-Dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$. **(1 pt)**

4) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 1$. **(0,5 pt)**

b-Tracer (T) , (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère. **(0,5 pt+0,5 pt+1 pt)**

5) Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$.

a- Déterminer $h'(x)$. En déduire l'expression de $I(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx$ où $\alpha > 1$, en fonction de α . **(0,5 pt)**

b- Calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. **(0,5 pt)**

On donne $e \approx 2,7$.

Baccalauréat de l'enseignement général

Madagascar

Session 2013

MATHEMATIQUES – Série : D

NB : - Les deux exercices et le problème sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.
- Papiers millimétrés autorisés.

Exercice 1 : (5 pts)

Les Parties A et B sont indépendantes

- A- On dispose d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6, parfaitement équilibré et de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher de telle sorte que :
- U_1 contient 8 boules blanches et 2 boules noires.
 - U_2 contient 3 boules noires et 7 boules rouges.
- 1) L'épreuve consiste à lancer une fois le dé puis à tirer une boule de U_1 ou de U_2 .
Si le numéro 6 apparaît sur la face supérieure du dé, on tire une boule dans U_1 .
Sinon, on tire une boule dans U_2 .
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
- A : « Le chiffre 6 apparaît et on obtient une boule blanche ». (0,25 pt)
 - B : « Obtenir une boule noire ». (0,5 pt)
- 2) On tire au hasard et simultanément deux boules de U_2 et une boule de U_1 .
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boule(s) noire(s) obtenue(s).
- a) Déterminer l'univers image de X . (0,25 pt)
 - b) Etablir la loi de probabilité de X . (2 pts)
- B- Etant donnée une série statistique à deux variables (X, Y) dont la droite de régression de Y en X est : $y = 0,12x + 7,88$.
Sachant que la moyenne $\bar{X} = 51$ et le coefficient de corrélation $r = 0,93$.
- a) Déterminer la moyenne arithmétique $\bar{Y}$. (0,75 pt)
 - b) Peut-on avoir un ajustement linéaire par moindres carrés ? Expliquer.
Déterminer une équation de la droite de régression X en Y . (0,5 pt + 0,75 pt)
- On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Exercice 2 : (5 pts)

Soit $P(z) = z^3 - (3 + 3\sqrt{3}i)z^2 - (6 - 6\sqrt{3}i)z + 8 + 24\sqrt{3}i$ où $z \in \mathbb{C}$.

- 1) a/ Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions réelles que l'on précisera. (0,75 pt)
b/ En déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$. (0,75 pt)

Dans tout ce qui suit, on considère dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2; z_B = 4$ et $z_C = 1 + 3\sqrt{3}i$.

- 2) a/ Placer les points A, B et C . (0,5 pt)

b/ Donner la forme algébrique du nombre complexe $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ puis en déduire la nature du triangle ABC . (1 pt)

- 3) Soit D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. On note par S la similitude plane directe de centre A et qui transforme B en D .
- a) Déterminer l'affixe de D et placer ce point. (0,5 pt)
 - b) Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. (1,5 pt)

Problème : (10 points)

On considère la fonction f , à variable réelle x , définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{si } x \geq 0 \\ e^{3x} - 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O et d'unité graphique 2cm.

1- Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$. (0,75 pt)

2- Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$.

(On donnera une interprétation graphique de ces résultats).

(1,25pt + 0,75pt)

3- a/ Etudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$. (0,75 pt)

b/ Prouver que la droite (D) d'équation $y = -3x$ est une asymptote oblique pour la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$. (0,75 pt)

4- a/ Après avoir étudié le sens de variation de f , dresser son tableau de variation. (1,5 pt)

b/ Démontrer que, pour tout x réel négatif, $e^{3x} - 3x - 1 > 0$. (0,5 pt)

5- Tracer dans le même repère, en précisant les deux demi-tangentes, la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$. (1,25 pt)

6- On appelle g la restriction de la fonction f à $] -\infty; 0[$.

a/ Démontrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique α . (1 pt)

b/ On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g . Calculer, en fonction de α , $(g^{-1})'(2)$. (0,5 pt)

c/ Construire, dans le même repère que $(\mathcal{C})$, la courbe $(\mathcal{C}')$ représentant g^{-1} . (0,5 pt)

d/ Calculer, en fonction de α et en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ du domaine plan délimité par : la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) , les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$. (0,75 pt)





Série : D

Epreuve de : MATHÉMATIQUES

Durée : 03 heures 15 minutes

Code matière : 009

Coefficients : 4

NB : - Les deux (02) exercices et le problème sont obligatoires.

- L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (a+ib)z - 8 - 16i$,
où a et b sont des nombres réels non nuls.

1) Déterminer les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z) = 0$.

(0,5pt)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i = 0.$$

(1,5pt)

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm,

on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives : $z_I = 2i$, $z_J = 3+i$, $z_K = 2-2i$,

$$z_A = \sqrt{3} + i$$

a) Placer les points I, J et K. À l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, construire le point A.

(0,5pt)

b) Démontrer que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires.

(0,25pt)

4) Soit B le point du plan tel que $z_B = \bar{z}_A$.

a) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle AOB.

(1pt)

b) Calculer l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange.

(0,25pt)

5) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O.
Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

(1pt)

EXERCICE 2 : (5 points)

Une boîte contient six billets numérotés de 1 à 6.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux billets de la boîte. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque résultat est représenté par un couple $(a; b)$ de deux nombres distincts où a est le numéro apparu au premier tirage et b le numéro apparu au deuxième tirage.

a) Démontrer qu'il y a 30 couples possibles.

(0,5pt)

b) Soit A, l'évènement : « Les deux numéros tirés sont pairs ».

Calculer la probabilité de A.

(0,5pt)

c) Calculer la probabilité de l'évènement :

B : « Obtenir au moins un numéro impair ».

(1pt)

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat, associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres. Par exemple, pour les couples $(3; 5)$ et $(5; 3)$, la variable aléatoire X prend la valeur $5 - 3 = 2$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ?

(1pt)

b) Calculer les probabilités : $P(X=1)$ et $P(X=3)$.

(0,5pt)

c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

(1pt)

d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

(0,5pt)

PROBLEME : (10 points)

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie sur $D_f =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{2}{x}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (0,5pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ (poser $x = X^2$). En déduire que (C) admet une branche parabolique suivant (Ox) au voisinage de $+\infty$. (0,75pt)

2) On considère une deuxième fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x - 2$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (0,5pt)

b) Etudier la variation de g , puis dresser son tableau de variation. (1,5pts)

c) Démontrer qu'il existe un nombre réel unique $\alpha \in]2; e[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (0,75pt)
En déduire le signe $g(x)$. (0,5pt)

3) a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. (1pt)

b) Dresser le tableau de variation de f . On prend $\alpha = 2,5$ et $f(\alpha) = 1,12$. (1pt)

4) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$. (0,25pt)

b) Tracer dans le même repère la droite (T) et la courbe (C) . (1,25pt)

5) a) On donne $\int_{\alpha}^e \ln x \, dx = -\alpha \ln \alpha + \alpha$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_{\alpha}^e \frac{1}{2}(\ln x)^2 \, dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln \alpha)^2 + \alpha \ln \alpha - \alpha. \quad (1pt)$$

b) Calculer, en fonction de α et en cm^2 , l'aire géométrique $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations :

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad x = e. \quad (0,5pt)$$

c) Sachant que : $\alpha \ln \alpha = 2$, démontrer que $\mathcal{A} = \left(\frac{e}{2} + 4 - \frac{6}{\alpha} - \alpha \right) \text{cm}^2$. (0,5pt)
