MATHS 1 2021 : Corrigé proposé par G. BIGNON

1_ (a) $\omega_n^n = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n = e^{2i\pi} = 1$

$(\omega_n^k)^n = e^{2ik\pi} = 1$

Si $k \neq k'$, avec $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$

alors $\omega_n^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\omega_n^{k'} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$

Comme $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$ $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2k'\pi}{n} \in [0, 2\pi[$

donc $\arg(\omega_n^k) = \frac{2k\pi}{n} \neq \arg(\omega_n^{k'}) = \frac{2k'\pi}{n}$

donc $\omega_n^k \neq \omega_n^{k'}$

Donc, comme $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ ω_n^k est racine de $X^n - 1$, et que $X^n - 1$ est de degré n, alors les $(\omega_n^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont les n racines $\neq$ de $X^n - 1$.

Donc $\boxed{X^n - 1 = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_n^k)}$.

(b) Si $s = kn$, $k \in \mathbb{N}$ $\omega_n^{sq} = (\omega_n^n)^{kq} = 1$

donc $\sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{sq} = \sum_{q=0}^{n-1} 1 = n$

Si non alors on pose $s = k m + r$ la division euclidienne de s par n, donc ici $0 < r < m$.

Donc $w_m^s = w_m^{km+r} = w_m^r$.

avec $r \in [\![1, m-1]\!]$ donc $w_m^r \neq 1$ donc

$$\sum_{q=0}^{n-1} w_m^{sq} = \frac{1 - (w_m^s)^m}{1 - w_m^s} = 0 .$$

2 _ (a) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2i\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

donc $A_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ et $A_2^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2$
$= (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$

donc $Sp(A) = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$

donc A est diagonalisable.

$A \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}=-\sqrt{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ est une base de $\overrightarrow{vp}$.

3_ (a) $A_4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix}$

$\boxed{w_4=e^{\frac{2i\pi}{4}}=e^{\frac{i\pi}{2}}=i}$

Un calcul donne $A_4\overline{A_4}=4.I_4$ donc $A_4^{-1}=\frac{1}{4}\overline{A_4}$

$A_4^2=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&4&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}$ $\quad A_4^4=16I_4$

donc X^4-16 annule A_4

(c) donc $Sp(A_4)\subset\{-2,2,-2i,2i\}$

(d) $F_4(e_0)=\sum_{k=0}^{3}\left(\sum_{j=0}^{3}i^{kj}\delta_{j,0}\right)e_k$ où $\delta_{j,0}=\begin{cases}1 \text{ si } j=0\\0 \text{ sinon}\end{cases}$

$$=\sum_{k=0}^{3}i^0e_k=e_\Sigma\in P$$

$$F_4(e_\Sigma) = \sum_{k=0}^{3} \left(\sum_{j=0}^{3} i^{kj} \times 1 \right) e_k$$

$$\left(\sum_{j=0}^{3} e^{0\times j} e_0\right) + \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=0}^{3} i^{kj} \right) e_k \quad (Q1-b)$$

$$= 4e_0 + 0 \in P$$

donc $P = \mathrm{Vect}(e_0, e_\Sigma)$ est stable.

et $\underset{(e_0,e_\Sigma)}{\mathrm{Mat}}(F_{|P}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C_4$

$$\det(C_4 - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4$$

Donc $Sp(C_4) = \{-2, 2\}$

et $C_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $C_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\vec{vp}$ de C_4.

Donc $F_{4|P}(2e_0 + e_\Sigma) = 2\,(2e_0 + e_\Sigma)$

et $F_{4|P}(-2e_0 + e_\Sigma) = -2(2e_0 - e_\Sigma)$

donc $2, -2 \in Sp(F_4)$ et

$2e_0+e_2)$ et $-2e_0+e_2$ sont des vp associés

(Cela vient du fait que $F_4(\underset{\in P}{2e_0+e_2}) = F_{4|P}(2e_0+e_2)$
$= 2(2e_0+e_2)$

(e) $F_4(e_0+e_2) = \sum_{k=0}^{3} \left(i^{k\times 0} + i^{2k} \right) e_k$

$$= \sum_{k=0}^{3} \left(1+(-1)^k\right) e_k = 2e_0+2e_2$$
$$= 2(e_0+e_2)$$

$$F_4(e_1-e_3) = \sum_{k=0}^{3} \left(i^{k\times 1} - i^{k\times 3} \right) e_k$$

$$= (i-i^3)e_1 + (i^3-i^9)e_3$$
$$= 2ie_1 - 2ie_3 = 2i(e_1-e_3)$$

donc (e_0+e_2) est un vp associé à 2
(e_1-e_3) est un vp associé à $2i$

On vérifie aisément que $(2e_0+e_2, 2e_0-e_2, e_0+e_2, e_1-e_3)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^4$.

Donc on a une base de vp de F_4.

Donc F_a est diagonalisable et $Sp(F_a) = \{2, -2, 2i\}$.

4_ (a) (i) $F_n(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jk} \times 1 \right) e_k$

$= e_0$ d'après Q. 1_ b_

(ii) $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jk} a^j \right) e_k$

Comme $|a| \neq 1$, $|w_n^k a| \neq 1$ donc

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 - (a w_n^k)^n}{1 - a w_n^k} \right) e_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a}{1 - a w_n^k} e_k .$$

(iii) $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jk} \binom{n-1}{j} \right) e_k$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (1 + w_n^k)^n e_k$$

Binôme de Newton

(b) Calculons :

$$\overline{y_{n-k}} = \overline{\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{(n-k)j} x_j}$$

propriétés de $\overline{}$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-(n-k)j} x_j \quad \text{car } \underline{x_j \in \mathbb{R}}.$$

il suffit de remarquer que, comme $w_n^n = 1$

alors $w_n^{n-k} = w_n^{-k} = \overline{w_n^k}$

donc $w_n^{-(n-k)j} = (w_n^j)^{-(n-k)} = (w_n^j)^k$

donc $\overline{y_{n-k}} = \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{kj} x_j = y_k$.

5_ On calcule $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coef (i,j) :

$$A_n.\overline{A_n}\,(i,j) = \sum_{k=1}^{n} A_n(i,k)\,\overline{A_n}\,(k,j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_n^{(i-1)(k-1)} . \overline{w_n^{(k-1)(j-1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_n^{(k-1)(i-1+1-j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(w_n^{(i-j)}\right)^{(k-1)} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ n \text{ sinon} \end{cases}$$

d'après 1_b.

Donc $A_n \cdot \overline{A_n} = n I_n$ donc $\boxed{A_n^{-1} = \dfrac{\overline{A_n}}{n}}$

(b) F_n est inversible car A_n l'est et F_n^{-1} a pour matrice dans B_n : $\frac{1}{n}\overline{A_n}$ donc

$$\boxed{F_n^{-1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \overline{w_n^{kj}}\, x_j\right) e_k}$$

(c) $${}^t(\overline{A_n X})A_n X = {}^t(\overline{A_n}\,\overline{X})A_n X$$
$$= {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A_n} A_n X$$
p.s.a) $$= {}^t\overline{X}\, n I_n X = n\, {}^t\overline{X} X.$$

(d) $$n({}^t\overline{X})X = n(\overline{x_0} \cdots \overline{x_{n-1}})\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1}\end{pmatrix} = n\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2$$

$${}^t(\overline{A_n}\,\overline{X})A_n X = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}|(A_n X)(j)|^2\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{kj} x_j\right|^2$$

<u>Remarque</u> : Pour une colonne X, ${}^t\overline{X} X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

et ceci est une norme sur le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^n$.

On remarquera que ${}^t X X$ ne définit pas une norme sur $\mathbb{C}^n$ car un carré n'est pas positif dans $\mathbb{C}$ donc on perd l'aspect défini-positif.

6 _ (a) Soit $\lambda \in \underline{Sp(A_n)}$ et X un $\vec{vp}$ associé.

On a $\quad {}^t(\overline{A_n X}) A_n X = {}^t(\overline{\lambda X}) \lambda X$

$$= |\lambda|^2 \, {}^t\overline{X} X .$$

a d'après 5-b), ceci vaut $n \, {}^t\overline{X} X$ donc comme $X \neq 0$, ${}^t\overline{X} X \neq 0$ et $n = |\lambda|^2$

ie $|\lambda| = \sqrt{n}$.

(b) $$b_{k,j} = \sum_{i=0}^{n-1} A_n(k,i) . A_n(i,j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} w_n^{ki} \, w_n^{ij}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(w_n^{k+j}\right)^i$$

On a $w_n^{k+j} = 1$ ssi $k+j = n$ ou $k+j = 0$ ie $j = n-k$ ou $k = j = 0$

donc $$b_{k,n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$

et $$b_{0,0} = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$

Sinon $$b_{k,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(w_n^{k+j}\right)^n = 0$$ d'après Q1-b_

(c) $$A_n^4(k,j) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{k,i} . b_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ n^2 \text{ si } k = j \end{cases}$$

Donc $\boxed{A_n^4 = n^2 I_n}$.

Donc $X^4 - n^2$ annule A_n

Donc $\boxed{Sp(A_n) \subset \{-\sqrt{n}, \sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}}$.

7_ (a) $F_n(e_1 + e_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (w_n^k + w_n^{k(n-1)}) e_k$

On a $w_n^{n-1} = w_n^{-1}$ (car $w_n^n = 1$)

donc $F_n(e_1+e_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (w_n^k + w_n^{-k}) e_k$ formule d'Euler

$= \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) e_k$

$\boxed{= 2\, e_{\cos}}$.

de même comme $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$F_n(e_1 - e_{n-1}) = \boxed{2i\, e_{\sin}}$.

(b) D'après 6_b) $G_n(e_1 + e_{n-1})$

$= F_n^2(e_1+e_{n-1}) = n e_0 + n e_1$

(il suffit de lire la matrice A_n^2).

donc $F_m(e_{\cos}) = F_m\left(F_m\left(\frac{e_1+e_{n-1}}{2}\right)\right)$
$= \frac{1}{2} G_m^2 (e_1 + e_{n-1}) = \frac{m}{2}(e_1+e_{n-1})$

de même on trouve $F_m(e_{\sin}) = i\frac{m}{2}(e_1 - e_{n-1})$.

(c) Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 /$ $\alpha(e_1+e_{n-1}) + \beta(e_{\cos}) = 0$

ie $\beta e_0 + (\alpha + \beta\cos\frac{2\pi}{m})e_1 + \sum_{k=2}^{m-2} \beta\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)e_k + \left(\alpha+\beta\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\right)e_{n-1} = 0$

Comme $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est libre alors, on a aisément $\beta = 0$

puis $\alpha = 0$. Donc la famille $(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$ est libre.

donc $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel.

et d'après ce qui précède $F_m(e_1+e_{n-1}) = 2e_{\cos} \in \mathcal{P}$
$F_m(e_{\cos}) = \frac{m}{2}(e_1+e_{n-1}) \in \mathcal{P}$

donc $\mathcal{P}$ est un plan stable par F_m.

et $\underset{(e_1+e_{n-1}, \cos)}{\mathrm{Mat}}(F_m/\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a $\det\begin{pmatrix} -\lambda & m/2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - m$

donc cette matrice admet $-\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}$ comme vp.

et $\begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} = \sqrt{n} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{n}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{n} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{n}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{n}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des $\vec{vp}$

associés qui forment une base de $\vec{vp}$.

(d) On montre de même que $\mathcal{R}$ est de dimension 2 et qu'il est stable (d'après 7.a) et 7.b))

Alors $\mathrm{Mat}(F_{n|\mathcal{R}}) = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{n}{2} \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$

Ici les valeurs propres sont $i\sqrt{n}$ et $-i\sqrt{n}$.

L'énoncé suggère sous-entend de déterminer des $\vec{vp}$, mais on ne s'en sert pas dans la suite donc je ne m'attarde pas.

(e) Ce qu'on veut nous faire dire ici, c'est la même chose qu'en 3. d) : que les valeurs propres d'un endomorphisme induit sont aussi des vp de l'endomorphisme. Ce fait évident doit quand même être vérifié :

Soit $\mathcal{E}$ un $\vec{vp}$ de $F_{n|Q}$, disons associé à $i\sqrt{n}$.

$$F_n(\underset{\in Q}{\mathcal{E}}) = F_{n|Q}(\mathcal{E}) = i\sqrt{n}\,\mathcal{E}.$$

donc $i\sqrt{n}$ est aussi une valeur propre de F_n.

Donc les complexes $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$ sont vp de F_n, et comme on sait déjà que $Sp(F_n) \subset \{\pm\sqrt{n}, \pm i\sqrt{n}\}$ d'après 6. c)

Alors $Sp(F_n) = \{\pm\sqrt{n}, \pm i\sqrt{n}\}$.

PARTIE II.

8 – (a) $\begin{cases} \varphi_n(e_j) = e_{j-1} & j \in [\![1, n-1]\!] \\ \varphi_n(e_0) = e_{n-1} \end{cases}$

$\begin{cases} \varphi_n^2(e_j) = \varphi_n(e_{j-1}) = e_{j-2} & j \in [\![2, n-1]\!] \\ \varphi_n^2(e_0) = e_{n-2} \quad ; \quad \varphi_n^2(e_1) = e_{n-1} \end{cases}$

donc $J_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

(b) Si $j \in [\![k, n-1]\!]$ $\varphi_n^k(e_j) = \varphi_n^{k-1}(e_{j-1})$
$= e_{j-k}$: récurrence rapide car $j-k \geq 0$

Si $j \in [\![0, k-1]\!]$ $\varphi_n^k(e_j) = \varphi_n^{k-j}(\varphi_n^j(e_j))$
$= \varphi_n^{k-j}(e_0) = \varphi_n^{k-j-1}(\varphi_n(e_0))$
$= \varphi_n^{k-j-1}(e_{n-1})$
$= e_{n-k+j}$.

(c) La formule ci-dessus est valable encore pour $k = n$, donc :
$\varphi_n^n(e_j) = e_j$ donc $\varphi_n^n = id$

(d) Donc $J_n^k = C(e_k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

$J_n^n = C(e_0) = I_n$.

9_(a) $J_n^n - I_n = 0$ donc $X^n - 1$ annule J_n donc

$Sp(J_n) \subset \{\omega_n^0, \dots, \omega_n^{n-1}\}$.

(b) $$\varphi_n(F_n(e_k)) = \varphi_n\left(\sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{ki} e_i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{k.i}\varphi_n(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1}\omega_n^{ki} e_{i-1} + e_{n-1}$$

$$= \omega_n^k\left(\sum_{i=1}^{n-1} \omega_n^{k(i-1)} e_{i-1} + \omega_n^{-k} e_{n-1}\right)$$

$i-1=i$

$$= \omega_n^k\left(\sum_{i=0}^{n-2}\omega_n^{ki} e_i + \omega^{k(n-1)} e_{n-1}\right)$$

car $\omega_n^{-k} = \omega_n^{kn-k} = \omega_n^{k(n-1)}$ $(\omega_n^{kn} = 1)$

donc $\varphi(F_n(e_k)) = \omega_n^k F_n(e_k)$.

et $F_n(e_k) \neq 0$ donc c'est un $\vec{vp}$ associé à la vp ω_n^k.

(c) On a donc trouvé n valeurs propres $\neq$ (cf. Q1)

Donc φ_n est diagonalisable et $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=0}^{n-1} E_{w_n^k}(\varphi_n)$

avec $E_{w_n^k}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(F_n(e_k))$.

Donc les colonnes de A_n forment une base de $\vec{vp}$ pour φ_n donc A_n est la matrice de passage de B_n à $(F_n(e_k))_{0\leq k\leq n-1}$ qui diagonalise J_n :

Comme par ailleurs $A_n^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A_n}$, on a bien

$$J_n = A_n \begin{pmatrix} w_n^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{n}\overline{A_n}$$

10 _ $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(C(e_0), \dots, C(e_{n-1}))$
donc $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$ est un e-v.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \,/\, \lambda_0 C(e_0) + \dots + \lambda_{n-1} C(e_{n-1}) = 0$

donc $$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_0 \end{pmatrix} = 0$$

donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1}$ i.e la famille est libre.

Donc $\dim \mathrm{Circ}_m(\mathbb{C}) = m$.

(b) On va démontrer ce résultat à l'aide de la 11_(a)

11_ (a) En 8. (b) on a vu que $J_m^k = C(e_k)$

donc $C(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_m^k$.

Ce qui permet de répondre à la 10. b, en effet :

Soient $(a,b) \in (\mathbb{C}^n)^2$ $C(a).C(b) = \left(\sum a_k J_m^k\right)\left(\sum b_i J_n^i\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_k b_i J_m^{k+i}$$

et comme $J_m^n = I_n$ alors $J_m^{n+k} = J_m^k$

donc $\sum\sum a_k b_i J_m^{k+i} \in \mathrm{Vect}(J_m^0, \dots, J_m^{n-1})$
$= \mathrm{Circ}_m(\mathbb{C})$

donc $C(a).C(b) \in \mathrm{Circ}_m(\mathbb{C})$.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, comme $C(a) = P(J_m)$

alors comme J_m est diagonalisable alors

$C(a)$ aussi : $P(J_n) = P(Q D_n Q^{-1}) = Q \underbrace{P(D_n)}_{\text{matrice diagonale}} Q^{-1}$

et les valeurs propres de $C(a) = P(J_n)$ sont les $P(\lambda)$ où $\lambda \in Sp(J_n)$ ie

$$Sp(C(a)) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{ik} \;/\; i \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

(c) D'après ce qui précède, ici, $P = X + X^{n-1}$

donc $Sp(S_n) = Sp(C(\alpha)) = \left\{ w_n^k + (w_n^k)^{n-1} \;/\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$

or S_n inversible $\iff 0 \notin Sp(S_n)$

et $w_n^k + w_n^{k(n-1)} = 0 \underset{\text{car } w_n^{n-1} = \frac{1}{w_n}}{\iff} w_n^k + \frac{1}{w_n^k} = 0$

$\iff 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$ or comme $k \in [\![0, n-1]\!]$

$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0$ donc $0 \notin Sp(S_n)$ donc

S_n est inversible.

12- (a) $J_n C(a) = J_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^{k+1}$

$= C(a)\, J_m$ donc $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C}) \subset \Omega$.

(b) On a vu en 11.b. que $C(a)$ et J_m sont diagonalisables et possède une matrice de passage commune. Ainsi elles ont les mêmes vp donc leur endomorphismes canoniquement associés aussi donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $F_n(e_k)$ est un vp de g.

ie $\exists \lambda_k \in \mathbb{C} \mid g(F_n(e_k)) = \lambda_k F_n(e_k)$.

(c) $$\frac{1}{m} \overline{A_m} M A_m = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cela vient du fait que A_m est la matrice de passage de B_m à $(F_n(e_0), \dots, F_n(e_{n-1}))$ et que $A_m^{-1} = \frac{1}{m} \overline{A_m}$.

(d) Soit φ, définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & D_m = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \mid (\lambda_i) \in \mathbb{C}^n \right\} \\ M & \longmapsto & \frac{1}{m} \overline{A_m} M A_m \end{array}$$

φ arrive bien dans D_m d'après 12. c).
φ est linéaire (évident)
φ est injective car si $\varphi(M) = 0$ alors $M = 0$ car M semblable à 0.
donc, comme $\dim D_m = n$
alors par injectivité $\dim \Omega \leq \dim D_m = n$.

Comme $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C}) \subset \Omega$ et que $\dim \mathrm{Circ}(\mathbb{C}) = n$

On peut affirmer que $\dim \Omega = n$ et que $\Omega = \mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$.

13 — (a) $[F_n(x)]_k = \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jk} x_j$

et $[F_{\frac{n}{2}}(y)]_k = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} w_{\frac{n}{2}}^{jk} x_{2j}$

$[F_{\frac{n}{2}}(z)]_k = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} w_{\frac{n}{2}}^{jk} x_{2j+1}$

On découpe $[F_n(x)]_k$ selon les pairs et impairs :

$$[F_n(x)]_k = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} W_n^{2jk} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} W_n^{(2j+1)k} x_{2j+1}$$

Il suffit alors de remarquer que $W_{\frac{n}{2}} = W_n^2$!

Ainsi $[F_n(x)]_k = [F_{\frac{n}{2}}(y)]_k + w_n^k [F_{\frac{n}{2}}(z)]_k$
(car $w_n^{(2j+1)k} = w_n^{2jk+k} = w_n^k . w_{\frac{n}{2}}^{j}$)

$$[F_n(x)]_{k+\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n-1} W_n^{j(k+\frac{n}{2})} x_j$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} W_n^{2j(k+\frac{n}{2})} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} W_n^{(2j+1)(k+\frac{n}{2})} x_{2j+1}$$

or $W_n^{2j(k+\frac{n}{2})} = W_n^{2jk} \times W_n^{2jn} = W_{\frac{n}{2}}^{jk} \times 1$.

et $W_n^{(2j+1)(k+\frac{n}{2})} = W_n^{2jk+jn+k+\frac{n}{2}} = W_n^{k+\frac{n}{2}} . W_{\frac{n}{2}}^{jk}$

et $-w_n^{\ell} = (-1)\, w_n^{\ell} = w_n^{\frac{n}{2}} \cdot w_n^{\ell}$, donc :

$$[F_n(x)]_{k+\frac{n}{2}} = [F_{\frac{n}{2}}(y)]_k - w_n^{\ell}\,[F_{\frac{n}{2}}(z)]_k .$$

(b) L'algorithme calcule selon la formule récursive ci-dessous les coordonnées de $F_n(x)$.

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = \left([F_n(x)]_\ell\right)_{0 \le \ell \le n-1}.$$

(c) Pour passer de $F_{\frac{n}{2}}(x)$ à $F_n(x)$, on fait une boucle répéter de $\frac{n}{2} = 2^{N-1}$ opérations

Dans chaque itération il y a 4 opérations donc $4 \times 2^{N-1} = 2^{N+1}$ opérations.

A cela s'ajoute le coût du calcul de $F_{\frac{n}{2}}$ pour y et pour z donc $2 \times U_{N-1}$

Ainsi $U_N = 2 \times U_{N-1} + 2^{N+1}$.

(d) $V_N = \dfrac{U_N}{2^N} = \dfrac{2 \times U_{N-1} + 2^{N+1}}{2^N} = \dfrac{U_{N-1}}{2^{N-1}} + 2$

$= V_{N-1} + 2$

On reconnaît une suite arithmétique :

donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $v_N = 2 \times N + v_0 = 2N$

Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $u_N = 2N \times 2^N = N 2^{N+1}$.

14_ (a) $[F_n(x)]_k = [F_n(y * z)]_k$

$$\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jk} (y*z)_j = \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jk} \left(\sum_{i=0}^{j} y_i z_{j-i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} w_n^{jk} y_i z_{j-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} w_n^{(j+i)k} y_i z_j$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_i w_n^{ik} \sum_{j=0}^{n-1-i} w_n^{jk} z_j$$

or pour $i \geq \frac{n}{2}$ $y_i = 0$ donc :

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} y_i w_n^{ik} \sum_{j=0}^{n-1-i} w^{jk} z_j$$

et pour $j \geq \frac{n}{2}$ $z_j = 0$, donc car $i \leq \frac{n}{2} - 1$

on a $n-1-i \geq \frac{n}{2}$, donc $\sum_{j=0}^{n-1-i} w_n^{jl} z_j = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} w_n^{jl} z_j$

donc $[F_n(x)]_l = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} y_i w_n^{il} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} w_n^{jl} z_j$

$$= [F_n(\hat{y})]_l \cdot [F_n(\hat{z})]_l .$$

(b) 1ère étape coûte : $N \cdot 2^{N+1} = 2\log_2(n) \cdot n$

2ème étape coûte : n opérations

3ème étape coûte : autant que la première car le calcul de F_n^{-1} est équivalent au calcul de F_n :

D'après la question précédente $A_n^{-1} = \frac{1}{n} \overline{A_n}$

donc calculer F_n^{-1} se fait de la même manière

que le calcul de F_n en substituant $\overline{w_n}$ à w_n, et

en divisant tout par n.

Donc on a un coût de $2\log_2(n)\, n + 1$

Coût total : $n + 4\log_2(n)\,n + 1$

Remarque : Ce point est <u>très difficile</u> à remarquer.

(c) Le calcul de x_k de cette manière coûte :

$k+1$ produits : $y_0 z_k, y_1 z_{k-1}, \dots, y_k z_0$

k additions : $y_0 z_k + y_1 z_{k-1}$ etc.

donc un coût de :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k+1+k = n(n-1)+n = n^2$$

Conclusion :

Comme $n + 4n\log_2(n) + 1 \underset{+\infty}{=} o(n^2)$

La méthode est plus efficace (pour des grandes valeurs de n).

Remarque : Ces questions sont, à mon sens, infaisables pour qui n'a pas été initié aux questions de complexité algorithmique.