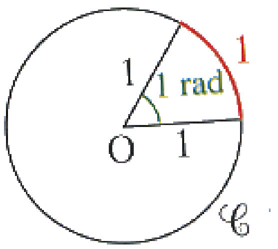
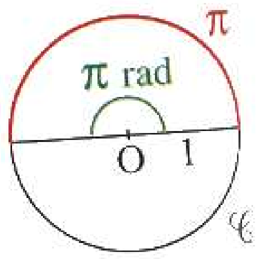
I. Cosinus et sinus d'un réel

a) Le radian

Définition : C est le cercle de centre O et de rayon 1.
Le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur C un arc de longueur 1.





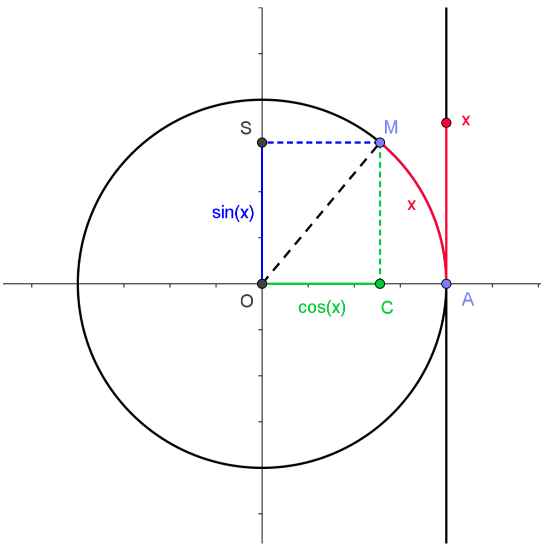
Un angle de mesure π rad a aussi pour mesure 180°.

b) Cercle trigonométrique

Définition : Le cercle trigonométrique de centre O est celui qui a pour rayon 1 et qui est muni d'un sens direct : le sens inverse des aiguilles d'une montre.

c) Cosinus et sinus d'un réel

A tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels.



Définition : L'abscisse du point M est le cosinus du réel x, noté cos(x) ou simplement cos x.
L'ordonnée du point M est le sinus du réel x, noté sin(x) ou simplement sin x.

On obtient ainsi deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$:
Cos : x ➔ cos(x)   sin : x ➔ sin(x)

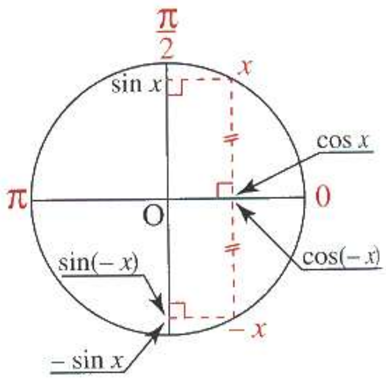
Propriétés :
Pour tout réel x,
$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Démonstration de $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
Le triangle OMC est rectangle en C.
En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient : $OM^2 = OC^2 + CM^2$
Soit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (car OM = 1)

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

d) Propriétés



Pour tout réel x, cos(-x) = cos(x) et sin(-x) = - sin(x)

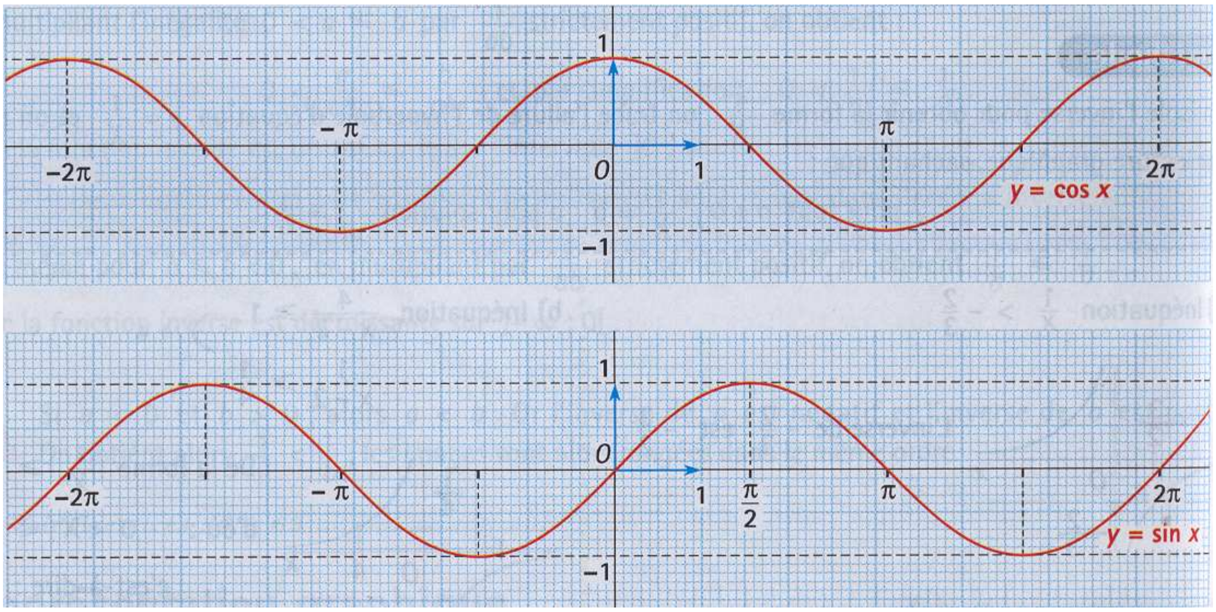
On dit que la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

Pour tout réel x, cos(x+2π) = cos(x) et sin(x+2π) = sin(x)

Conséquence graphique :
Il suffit de tracer les courbes représentatives de cos et sin sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple [-π ;π].

On obtient les courbes sur tout autre intervalle d'amplitude 2π par translation.

e) Représentation graphique



Les courbes d'équations y = cos(x) et y = sin(x) sont des **sinusoïdes**.

f) Variations sur [-π ; π].

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0