



# Équations différentielles

---

Fiche de Léa Blanc-Centi.

## 1 Ordre 1

### Exercice 1

---

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $y' + 2y = x^2$  ( $E_1$ )
2.  $y' + y = 2 \sin x$  ( $E_2$ )
3.  $y' - y = (x+1)e^x$  ( $E_3$ )
4.  $y' + y = x - e^x + \cos x$  ( $E_4$ )

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006991]

### Exercice 2

---

Déterminer toutes les fonctions  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivables, telles que

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006992]

### Exercice 3

---

1. Résoudre l'équation différentielle  $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}$ . Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant  $y(0) = 3$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$  sur  $]0; \pi[$ . Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant  $y(\frac{\pi}{4}) = 1$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006993]

### Exercice 4 Variation de la constante

---

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1.  $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$  sur  $]0; +\infty[$
2.  $y' - y = x^k \exp(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $k \in \mathbb{N}$
3.  $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$  sur  $]0; +\infty[$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006994]

### Exercice 5

---

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1.  $a = 0$

2.  $a = -1$  (faire le changement de fonction inconnue  $z(x) = x + y(x)$ )

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006995]

### Exercice 6

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier :

1.  $x^2y' - y = 0$  ( $E_1$ )

2.  $xy' + y - 1 = 0$  ( $E_2$ )

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006996]

## 2 Second ordre

### Exercice 7

Résoudre

1.  $y'' - 3y' + 2y = 0$

2.  $y'' + 2y' + 2y = 0$

3.  $y'' - 2y' + y = 0$

4.  $y'' + y = 2\cos^2x$

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006997]

### Exercice 8

On considère  $y'' - 4y' + 4y = d(x)$ . Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque  $d(x) = e^{-2x}$ , puis  $d(x) = e^{2x}$ . Donner la forme générale des solutions quand  $d(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x)$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006998]

### Exercice 9

Résoudre sur  $]0; \pi[$  l'équation différentielle  $y'' + y = \cotan x$ , où  $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006999]

### Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1.  $x^2y'' + xy' + y = 0$ , sur  $]0; +\infty[$ , en posant  $x = e^t$  ;

2.  $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + my = 0$ , sur  $\mathbb{R}$ , en posant  $x = \tan t$  (en fonction de  $m \in \mathbb{R}$ ).

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[007000]

## 3 Pour aller plus loin

### Exercice 11 Équations de Bernoulli et Riccati

#### 1. Équation de Bernoulli

(a) Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \quad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction  $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$ .

(b) Trouver les solutions de l'équation  $xy' + y - xy^3 = 0$ .

## 2. Équation de Riccati

(a) Montrer que si  $y_0$  est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par  $u(x) = y(x) - y_0(x)$  vérifie une équation de Bernoulli (avec  $n = 2$ ).

(b) Résoudre  $x^2(y' + y^2) = xy - 1$  en vérifiant d'abord que  $y_0(x) = \frac{1}{x}$  est une solution.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[007001]

---

### Exercice 12

1. Montrer que toute solution sur  $\mathbb{R}$  de  $y' + e^{x^2}y = 0$  tend vers 0 en  $+\infty$ .
2. Montrer que toute solution sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + e^{x^2}y = 0$  est bornée. (*Indication* : étudier la fonction auxiliaire  $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$ .)

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[007002]

---

### Exercice 13

1. Résoudre sur  $]0; +\infty[$  l'équation différentielle  $x^2y'' + y = 0$  (utiliser le changement de variable  $x = e^t$ ).
2. Trouver toutes les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \neq 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[007003]

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Une telle fonction  $f$  est solution d'une équation différentielle  $y' + y = c$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

1.  $x$  est solution particulière
  2.  $\cos$  est solution particulière
- 

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Solution particulière :

1.  $-\frac{1}{2x}$
  2.  $\frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x)$
  3.  $\frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$
- 

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

1. C'est une équation à variables séparées.
- 

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

1. une infinité de solutions
  2. une solution
- 

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

Pour la fin : principe de superposition.

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

Utiliser la méthode de variation de la constante.

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

1. (a) Se ramener à  $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$ .  
(b)  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$  ou  $y = 0$ .
  2. (a) Remplacer  $y$  par  $u + y_0$ .  
(b)  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln|x| + \lambda x}$  ou  $y = \frac{1}{x}$ .
-

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

On commence par résoudre l'équation homogène associée  $y' + 2y = 0$  : les solutions sont les  $y(x) = \lambda e^{-2x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de  $(E_1)$ . Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme :

$y_0(x) = ax^2 + bx + c$  est solution de  $(E_1)$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + 2y_0(x) = x^2$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que  $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$  convient.

Les solutions de  $(E_1)$  sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

Les solutions de l'équation homogène associée  $y' + y = 0$  sont les  $y(x) = \lambda e^{-x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de  $(E_2)$ . Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin :

$y_0(x) = a \cos x + b \sin x$  est solution de  $(E_2)$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + y_0(x) = 2 \sin x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (a + b) \cos x + (-a + b) \sin x = 2 \sin x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que  $y_0(x) = -\cos x + \sin x$  convient.

Les solutions de  $(E_2)$  sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

3. Les solutions de l'équation homogène associée  $y' - y = 0$  sont les  $y(x) = \lambda e^x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré  $d = 1$  : or la fonction exponentielle du second membre est la même ( $e^x$ ) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de  $e^x$  par une fonction polynomiale de degré  $d + 1 = 2$  :

$y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$  est solution de  $(E_3)$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) - y_0(x) = (x + 1)e^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (2ax + b)e^x = (x + 1)e^x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que  $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$  convient.

Les solutions de  $(E_3)$  sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

4. Les solutions de l'équation homogène associée  $y' + y = 0$  sont les  $y(x) = \lambda e^{-x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de  $e^{-x}$ ) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :

$y_0(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha \cos x + \beta \sin x$  est solution de  $(E_4)$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + y_0(x) = x - e^x + \cos x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha + \beta) \cos x + (-\alpha + \beta) \sin x = x - e^x + \cos x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que

$$y_0(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

convient.

Les solutions de  $(E_4)$  sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

### Correction de l'exercice 2 ▲

Une fonction  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  convient si et seulement si

- $f$  est dérivable
- $f$  est solution de  $y' + y = c$
- $f$  vérifie  $f(0) + f(1) = c$  (où  $c$  est un réel quelconque)

Or les solutions de l'équation différentielle  $y' + y = c$  sont exactement les  $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + c$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à  $c$  est une solution particulière de  $y' + y = c$ ). Évidemment ces fonctions sont dérivables, et  $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$ , donc la troisième condition est satisfaite si et seulement si  $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$ .

Ainsi les solutions du problème sont exactement les

$$f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1})$$

pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Comme le coefficient de  $y'$  ne s'annule pas, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

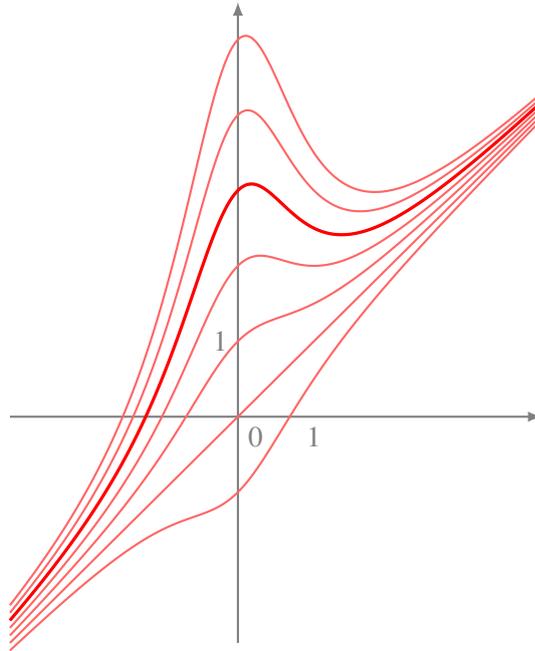
- (a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les  $y(x) = \lambda e^{A(x)}$ , où  $A$  est une primitive de  $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Puisque  $a(x)$  est de la forme  $-\frac{u'}{u}$  avec  $u > 0$ , on peut choisir  $A(x) = -\ln(u(x))$  où  $u(x) = x^2 + 1$ . Les solutions sont donc les  $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{x^2+1}$ .
- (b) Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre : on remarque que  $y_0(x) = x$  convient.
- (c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

(d)  $y(0) = 3$  si et seulement si  $\lambda = 3$ . La solution cherchée est donc  $y(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$ .

Voici les courbes intégrales pour  $\lambda = -1, 0, \dots, 5$ .



2. On commence par remarquer que  $y_0(x) = \cos x$  est une solution particulière. Pour l'équation homogène : sur l'intervalle considéré, le coefficient de  $y'$  ne s'annule pas, et l'équation se réécrit

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

Les solutions sont les  $y(x) = \lambda e^{A(x)}$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A$  est une primitive de  $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ . Puisque  $a(x)$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u > 0$ , on peut choisir  $A(x) = \ln(u(x))$  avec  $u(x) = \sin x$ . Les solutions de l'équation sont donc les  $y(x) = \lambda e^{\ln(\sin x)} = \lambda \sin x$ .

Finalement, les solutions de l'équation sont les

$$y(x) = \cos x + \lambda \sin x$$

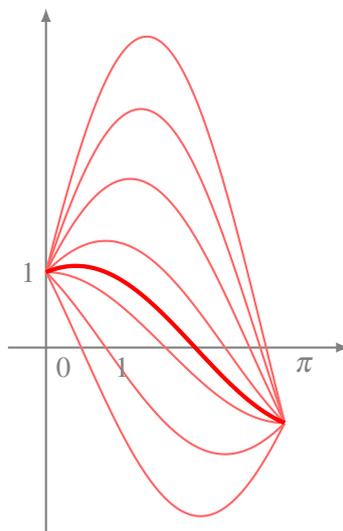
où  $\lambda$  est un paramètre réel.

3. On a

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos \frac{\pi}{4} + \lambda \sin \frac{\pi}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \lambda) = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

La solution cherchée est  $y(x) = \cos x + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) \sin x$

Voici les courbes intégrales pour  $\lambda = -2, -1, 0, \dots, 4$  et  $\frac{2}{\sqrt{2}} - 1$  (en gras).



---

## Correction de l'exercice 4 ▲

---

1.  $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$  sur  $]0; +\infty[$

(a) **Résolution de l'équation homogène**  $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$ .

Une primitive de  $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$  est  $A(x) = x^2 - \ln x$ , donc les solutions de l'équation homogène sont les  $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$ , pour  $\lambda$  une constante réelle quelconque.

(b) **Recherche d'une solution particulière.**

Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation  $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ . On cherche une telle solution sous la forme  $y_0(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2)$  où  $x \mapsto \lambda(x)$  est maintenant une fonction.

On calcule d'abord

$$y_0'(x) = \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) + \lambda(x) \left( -\frac{1}{x^2} + 2 \right) \exp(x^2)$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} y_0 \quad \text{est solution de } y' - (2x - \frac{1}{x})y &= 1 \\ \iff y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 &= 1 \\ \iff \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) + \lambda(x) \left( -\frac{1}{x^2} + 2 \right) \exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x}) \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \\ \iff \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \quad \text{cela doit se simplifier !} \\ \iff \lambda'(x) &= x \exp(-x^2) \end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre  $\lambda(x) = -\frac{1}{2} \exp(x^2)$ , ce qui fournit la solution particulière :

$$y_0(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

(c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2.  $y' - y = x^k \exp(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $k \in \mathbb{N}$

(a) **Résolution de l'équation homogène**  $y' - y = 0$ .

Les solutions de l'équation homogène sont les  $y(x) = \lambda \exp(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(b) **Recherche d'une solution particulière.**

On cherche une solution particulière sous la forme  $y_0(x) = \lambda(x) \exp(x)$  où  $x \mapsto \lambda(x)$  est maintenant une fonction.

Comme  $y_0'(x) = \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x)$  alors

$$\begin{aligned} y_0 \quad \text{est solution de } y' - y &= x^k \exp(x) \\ \iff \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x) - \lambda(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \\ \iff \lambda'(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \\ \iff \lambda'(x) &= x^k \end{aligned}$$

On fixe  $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ , ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x)$$

(c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x) + \lambda \exp(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3.  $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$  sur  $]0; +\infty[$

Le coefficient de  $y'$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ , l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}$$

(a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les  $y(x) = \lambda e^{A(x)}$ , où  $A$  est une primitive de  $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On peut donc choisir  $A(x) = -\ln(u(x))$  avec  $u(x) = 1 + \ln^2(x)$ . Les

solutions de l'équation sont les  $y(x) = \lambda e^{-\ln(1 + \ln^2(x))} = \frac{\lambda}{1 + \ln^2(x)}$ .

(b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche  $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1 + \ln^2(x)}$ , avec  $\lambda$  une fonction dérivable. Or  $z(x) = \frac{1}{1 + \ln^2(x)}$  est solution de l'équation homogène et  $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$  :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution} \\ \Leftrightarrow y_0' + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}y_0 &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \lambda'(x)z(x) + \lambda(x) \underbrace{\left[ z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}z(x) \right]}_{=0} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{1 + \ln^2(x)} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On peut donc choisir  $\lambda(x) = \ln x$ , ce qui donne la solution particulière  $y_0(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2(x)}$ .

(c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

Remarque : le choix d'une primitive de  $\lambda'$  se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple  $\lambda(x) = \ln x + 1$ , la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les

$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser  $\lambda_0' = 1 + \lambda$ , ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

1. L'équation différentielle  $y' - e^x e^y = 0$  est à variables séparées : en effet, en divisant par  $e^y$ , on obtient  $-y' e^{-y} = -e^x$ . Le terme de gauche est la dérivée de  $e^{-y}$  ( $y$  est une fonction de  $x$ ), celui de droite est la dérivée de  $x \mapsto -e^x$  :

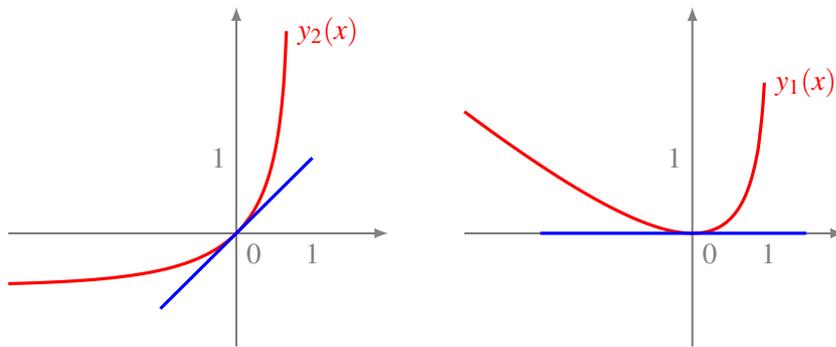
$$\frac{e^{-y}}{x} = \frac{(-e^x)}{x}$$

Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi  $y$  est solution sur  $I$  si et seulement si elle est dérivable sur  $I$  et  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, e^{-y} = -e^x + c$ . À  $c$  fixé, cette égalité n'est possible que si  $-e^x + c > 0$ , c'est-à-dire si  $c > 0$  et  $x < \ln c$ . On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{pour } x \in I_c = ]-\infty; \ln c[)$$

où  $c$  est un paramètre réel strictement positif.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe  $c > 0$  tel que  $0 \in I_c$  et  $y_c(0) = 0$  : autrement dit,  $c > 1$  et  $c - 1 = 1$ . Il s'agit donc de  $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$ , la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle  $I_2 = ]-\infty; \ln 2[$ . Sa tangente en l'origine a pour pente  $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$ , c'est la première bissectrice. Comme par construction  $y_2'$  est à valeurs strictement positives, la fonction  $y_2$  est strictement croissante.



2. Posons  $z(x) = x + y(x)$  :  $z$  a le même domaine de définition que  $y$  et est dérivable si et seulement si  $y$  l'est. En remplaçant  $y(x)$  par  $z(x) - x$  dans l'équation différentielle  $y' - e^x e^y = -1$ , on obtient  $z' - e^z = 0$ , c'est-à-dire  $z' e^{-z} = 1$ . Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que  $z$  est solution sur  $J$  si et seulement si elle est dérivable sur  $J$  et  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in J, e^{-z} = -x + c$ . À  $c$  fixé, cette égalité n'est possible que si  $c > x$ . On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{pour } x \in J_c = ]-\infty; c[)$$

où  $c$  est un paramètre réel.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $0 \in J_c$  et  $y_c(0) = 0$  : autrement dit,  $c > 0$  et  $c = 1$ . Il s'agit donc de  $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$ , la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle  $J_1 = ]-\infty; 1[$ . Sa tangente en l'origine a pour pente  $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$  : elle est horizontale.

## Correction de l'exercice 6 ▲

1.  $x^2 y' - y = 0$  ( $E_1$ )

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme  $y' + ay = b$ , on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de  $y'$  ne s'annule pas : on se place donc sur  $] -\infty; 0[$  ou  $] 0; +\infty[$ .

- (a) **Résolution sur  $] -\infty; 0[$  ou  $] 0; +\infty[$ .**

Sur chacun de ces intervalles, l'équation différentielle se réécrit

$$y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Ses solutions sont de la forme  $y(x) = \lambda e^{-1/x}$  (en effet, sur  $] -\infty; 0[$  ou  $] 0; +\infty[$ , une primitive de  $\frac{1}{x^2}$  est  $\frac{-1}{x}$ ).

(b) **Recollement en 0.**

Une solution  $y$  de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  doit être solution sur  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ , il existe donc  $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$  tels que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur  $\mathbb{R}$  : autrement dit, pour quels choix de  $\lambda_+, \lambda_-$  la fonction  $y$  se prolonge-t-elle en 0 en une fonction dérivable vérifiant  $(E_1)$  ?

—  $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$  et  $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ , donc  $y$  est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si

$\lambda_- = 0$ . On peut alors poser  $y(0) = 0$ , quel que soit le choix de  $\lambda_+$ .

— Pour voir si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \text{pour } x > 0, \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+ \left(\frac{-1}{x}\right) e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \\ \text{pour } x < 0, \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction  $y$  est dérivable en 0 et  $y'(0) = 0$ .

— Par construction, l'équation différentielle  $(E_1)$  est satisfaite sur  $\mathbb{R}^*$ . Vérifions qu'elle est également satisfaite au point  $x = 0$  :  $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$ .

(c) **Conclusion.**

Finalement, les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont exactement les fonctions suivantes :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2.  $xy' + y - 1 = 0$  ( $E_2$ )

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme  $y' + ay = b$ , on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de  $y'$  ne s'annule pas : on se place donc sur  $I = ] -\infty; 0[$  ou  $I = ]0; +\infty[$ .

(a) **Résolution sur  $I$ .**

Sur l'intervalle  $I$ , l'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

— Pour l'équation homogène  $y' + \frac{1}{x}y = 0$  une primitive de  $-\frac{1}{x}$  sur  $I$ , est  $-\ln|x|$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc les  $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda \frac{1}{|x|}$ . Quitte à changer  $\lambda$  en  $-\lambda$  si  $I = ] -\infty; 0[$ , on peut écrire les solutions de l'équation homogène sous la forme  $y(x) = \lambda \frac{1}{x}$ .

— Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant  $y(x) = \lambda(x) \frac{1}{x}$  : en remplaçant, on voit que  $y$  est solution sur  $I$  si et seulement si  $\lambda'(x) = 1$ . En intégrant, on obtient  $\lambda(x) = x$ . Une solution particulière est donc  $y_0(x) = 1$ .

— Sur  $I$  les solutions de  $(E_2)$  sont les  $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$  où  $\lambda$  est un paramètre réel.

(b) **Recollement en 0.**

Une solution  $y$  de  $(E_2)$  sur  $\mathbb{R}$  doit être solution sur  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ , il existe donc  $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$  tels que

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur  $\mathbb{R}$ . On voit tout de suite que  $y$  a une limite (finie) en 0 si et seulement si  $\lambda_+ = \lambda_- = 0$ . Dans ce cas, on peut alors poser  $y(0) = 1$  et  $y$  est la fonction constante égale à 1, qui est bien sûr dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $(E_2)$  est bien satisfaite au point  $x = 0$ .

(c) **Conclusion.**

Finalement,  $(E_2)$  admet sur  $\mathbb{R}$  une unique solution, qui est la fonction constante égale à 1.

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

1. Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est  $r^2 - 3r + 2 = 0$ , qui admet deux solutions :  $r = 2$  et  $r = 1$ . Les solutions sont donc les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).
2. L'équation caractéristique associée est  $r^2 + 2r + 2 = 0$ , qui admet deux solutions :  $r = -1 + i$  et  $r = -1 - i$ . On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $y(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$  ( $A, B \in \mathbb{R}$ ). Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme  $\lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1-i)x}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).
3. L'équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme  $(\lambda x + \mu)e^x$ .
4. Les solutions de l'équation homogène sont les  $\lambda \cos x + \mu \sin x$ . Le second membre peut en fait se réécrire  $\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$  : d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme  $a + b \cos(2x) + c \sin(2x)$ . En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si  $a = 1, b = -\frac{1}{3}, c = 0$ . Les solutions générales sont donc les  $\lambda \cos x + \mu \sin x - \frac{1}{3} \cos(2x) + 1$ .

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est  $r^2 - 4r + 4 = 0$ , pour laquelle  $r = 2$  est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les  $(\lambda x + \mu)e^{2x}$ .

Lorsque  $d(x) = e^{-2x}$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $ae^{-2x}$ , qui convient si  $a = \frac{1}{16}$ .

Lorsque  $d(x) = e^{2x}$ , comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de  $e^{2x}$  par un polynôme de degré 2. Comme on sait déjà que  $(\lambda x + \mu)e^{2x}$  est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0 : on cherche donc une solution de la forme  $ax^2 e^{2x}$ , qui convient si et seulement si  $a = \frac{1}{2}$ .

Puisque  $\frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$ , les solutions générales sont obtenues sous la forme  $y(x) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2 e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{2x}$ .

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

Les solutions de l'équation homogène sont les  $\lambda \cos x + \mu \sin x$ . En posant  $y_1(x) = \cos x$  et  $y_2(x) = \sin x$ , on va chercher les solutions sous la forme  $\lambda y_1 + \mu y_2$ , vérifiant

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \cotan x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0 \\ \lambda'(-\sin x) + \mu' \cos x = \cotan x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cotan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \\ \mu'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cotan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \end{cases}$$

d'après les formules de Cramer, où  $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$ . On obtient donc

$$\begin{cases} \lambda'(x) = -\cos x \\ \mu'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \end{cases}$$

ce qui donne une primitive  $\lambda(x) = -\sin x$ .

Pour  $\mu$ , on cherche à primitiver  $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$  à l'aide du changement de variable  $t = \cos x$  (et donc  $t = -\sin t x$ ), on calcule une primitive

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} x &= -\int \frac{t^2}{1-t^2} t = t - \int \frac{1}{1-t^2} t \\ &= t + \frac{1}{2} \ln(1-t) - \frac{1}{2} \ln(1+t) = \cos x + \frac{1}{2} \ln(1-\cos x) - \frac{1}{2} \ln(1+\cos x) \end{aligned}$$

En remplaçant, les solutions générales sont les

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (-\sin x) \cos x + \left( \cos x + \frac{1}{2} \ln(1-\cos x) - \frac{1}{2} \ln(1+\cos x) \right) \sin x$$

qui se simplifie  $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Puisqu'on cherche  $y$  fonction de  $x \in ]0; +\infty[$ , et que l'application  $t \mapsto e^t$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $]0; +\infty[$ , on peut poser  $x = e^t$  et  $z(t) = y(e^t)$ . On a alors  $t = \ln x$  et  $y(x) = z(\ln x)$ . Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\ln x) = e^{-t} z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in ]0; +\infty[, x^2 y'' + x y' + y = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit,  $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$  où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$$

où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

2. L'application  $t \mapsto \tan t$  étant bijective de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ , on peut poser  $x = \tan t$  et  $z(t) = y(\tan t)$ . On a alors  $t = \arctan x$  et ainsi :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2} (z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x)) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient que  $z$  est solution de l'équation différentielle  $z'' + mz = 0$ . Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :

—  $m < 0$  : alors  $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$  et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m} \arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m} \arctan x},$$

—  $m = 0$  :  $z'' = 0$  et donc  $z(t) = \lambda t + \mu$  et  $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$ ,

—  $m > 0$  : alors  $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$  et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m} \arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m} \arctan x)$$

où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

---

## Correction de l'exercice 11 ▲

---

### 1. Équation de Bernoulli

- (a) On suppose qu'une solution  $y$  ne s'annule pas. On divise l'équation  $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$  par  $y^n$ , ce qui donne

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$

On pose  $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$  et donc  $z'(x) = (1-n)\frac{y'}{y^n}$ . L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$$

- (b) Équation  $xy' + y - xy^3 = 0$ .

Cherchons les solutions  $y$  qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par  $y^3$  pour obtenir :

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0$$

On pose  $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$ , et donc  $z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}$ . L'équation différentielle s'exprime alors  $\frac{-1}{2}xz' + z - x = 0$ , c'est-à-dire :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_-x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Comme on a posé  $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$ , on se restreint à un intervalle  $I$  sur lequel  $z(x) > 0$  : nécessairement  $0 \notin I$ , donc on considère  $z(x) = \lambda x^2 + 2x$ , qui est strictement positif sur  $I_\lambda$  où

$$I_\lambda = \begin{cases} ]0; +\infty[ & \text{si } \lambda = 0 \\ ]0; -\frac{2}{\lambda}[ & \text{si } \lambda < 0 \\ ]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[ \text{ ou } ]0; +\infty[ & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

On a  $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$  pour tout  $x \in I_\lambda$  et donc  $y(x) = \varepsilon(x)\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$ , où  $\varepsilon(x) = \pm 1$ . Or  $y$  est continue sur l'intervalle  $I_\lambda$ , et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $y$  ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc  $\varepsilon(x)$  est soit constant égal à 1, soit constant égal à  $-1$ . Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \quad \text{sur } I_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

### 2. Équation de Riccati

- (a) Soit  $y_0$  une solution de  $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ . Posons  $u(x) = y(x) - y_0(x)$ , donc  $y = u + y_0$ . L'équation devient :

$$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$$

Comme  $y_0$  est une solution particulière alors

$$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x)$$

Et donc l'équation se simplifie en :

$$u' + (a(x) + 2y_0(x)b(x))u + b(x)u^2 = 0$$

qui est une équation du type Bernoulli.

(b) Équation  $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ .

— Après division par  $x^2$  c'est bien une équation de Riccati sur  $I = ]-\infty; 0[$  ou  $I = ]0; +\infty[$ .

—  $y_0 = \frac{1}{x}$  est bien une solution particulière.

— On a  $u(x) = y(x) - y_0(x)$  et donc  $y = u + \frac{1}{x}$ . L'équation  $x^2(y' + y^2) = xy - 1$  devient

$$x^2 \left( u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x \left( u + \frac{1}{x} \right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2 \left( u' + u^2 + 2\frac{u}{x} \right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

— Si  $u$  ne s'annule pas, en divisant par  $u^2$ , cette équation devient  $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{u} + 1 = 0$ . On pose  $z(x) = \frac{1}{u}$ , l'équation devient  $-z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0$ . Ses solutions sur  $I$  sont les  $z(x) = \lambda x + x \ln|x|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x \ln|x|}$  mais il y a aussi la solution nulle  $u(x) = 0$ .

— Conclusion. Comme  $y = u + \frac{1}{x}$ , on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur  $]-\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$  :

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x \ln|x|} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons  $A(x) = \int_0^x e^{t^2} t$ , une primitive de  $e^{x^2}$ . On ne sait pas expliciter cette primitive. Les solutions de  $y' + e^{x^2}y = 0$  s'écrivent  $f(x) = \lambda e^{-A(x)}$ .

Si  $x \geq 1$ , on a par positivité de l'intégrale  $A(x) = \int_0^x e^{t^2} t \geq 0$  et comme  $e^{t^2} \geq 1$  alors

$$A(x) = \int_0^x e^{t^2} t \geq \int_0^x 1 t = x$$

En conséquence :

$$0 \leq e^{-A(x)} \leq e^{-x}$$

Ainsi,

$$0 \leq |f(x)| \leq |\lambda| e^{-x}$$

et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

2. Supposons que  $y$  vérifie sur  $\mathbb{R}$  l'équation, et posons  $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$ . La fonction  $u$  est à valeurs positives, dérivable, et

$$u'(x) = 2y'(x)y(x) + e^{-x^2}2y''(x)y'(x) - 2xe^{-x^2}y'(x)^2$$

en utilisant que  $e^{-x^2}y''(x) = -y(x)$  (car  $y$  est solution de l'équation différentielle) on obtient :

$$u'(x) = -2xe^{-x^2}y'^2.$$

Ainsi la fonction  $u$  est croissante sur  $]-\infty; 0[$  et décroissante sur  $]0; +\infty[$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq u(x) \leq u(0)$ . Or  $y^2(x) \leq u(x)$  par construction, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |y(x)| \leq \sqrt{u(0)} = \sqrt{y(0)^2 + y'(0)^2}$$

### Correction de l'exercice 13 ▲

1. En faisant le changement de variable  $x = e^t$  (donc  $t = \ln x$ ) et en posant  $z(t) = y(e^t)$  (donc  $y(x) = z(\ln x)$ ), l'équation  $x^2 y'' + y = 0$  devient  $z'' - z' + z = 0$ , dont les solutions sont les  $z(t) = e^{t/2} \cdot \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Autrement dit,

$$y(x) = \sqrt{x} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$$

2. Supposons que  $f$  convienne : par hypothèse,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc  $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et par conséquent  $f'$  aussi. Ainsi  $f$  est nécessairement de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^*$  (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ ).

En dérivant l'équation  $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ , on obtient

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en réutilisant l'équation :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Ainsi on obtient que  $f$  est solution de  $x^2 y'' + y = 0$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Nécessairement, il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x > 0, f(x) = \sqrt{x} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$$

Par hypothèse,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , en particulier elle se prolonge en 0 de façon  $\mathcal{C}^1$ . Cherchons à quelle condition sur  $\lambda, \mu$  cela est possible. Déjà,  $f(x) = \sqrt{x} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  pour tous  $\lambda, \mu$  ; donc  $f(0) = 0$ . Mais

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$$

n'a pas de limite en 0 si  $\lambda \neq 0$  ou  $\mu \neq 0$ . En effet, pour  $x_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$ , on a  $x_n \rightarrow 0$  mais  $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$  qui admet une limite finie seulement si  $\lambda = 0$ . De même avec  $x'_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi + \frac{\pi}{2})}$  qui donne  $\frac{f(x'_n) - f(0)}{x'_n - 0} = \frac{\mu}{\sqrt{x'_n}}$  et implique donc  $\mu = 0$ .

Par conséquent, la seule possibilité est  $\lambda = \mu = 0$ . Ainsi  $f$  est la fonction nulle, sur  $[0, +\infty[$ . Le même raisonnement s'applique sur  $]-\infty, 0]$ . La fonction est donc nécessairement nulle sur  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.