

# Applications linéaires

---

## 1 Définition

### Exercice 1

Déterminer si les applications  $f_i$  suivantes sont linéaires :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & f_1(x, y) &= (2x + y, x - y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_2(x, y, z) &= (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_3(x, y, z) &= (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 & f_4(x, y) &= (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_5(P) &= (P(-1), P(0), P(1)) \end{aligned}$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000929]

### Exercice 2

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\phi$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même telle que  $\phi^n = 0$  et  $\phi^{n-1} \neq 0$ . Soit  $x \in E$  tel que  $\phi^{n-1}(x) \neq 0$ . Montrer que la famille  $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$  est une base de  $E$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000930]

## 2 Image et noyau

### Exercice 3

Soit  $E$  un espace vectoriel et soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$ , on définit l'application  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$  par  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
3. Que donne le théorème du rang ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000934]

### Exercice 4

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

- (i)  $\text{Ker } f = \text{Im } f$
- (ii)  $f^2 = 0$  et  $n = 2 \cdot \text{rg}(f)$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000943]

### Exercice 5

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000947]

### Exercice 6

Soit  $E$  et  $F$  de dimensions finies et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Montrer que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .
2. En déduire que  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$ .

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001027]

## 3 Injectivité, surjectivité, isomorphie

### Exercice 7

Pour les applications linéaires suivantes, déterminer  $\text{Ker } f_i$  et  $\text{Im } f_i$ . En déduire si  $f_i$  est injective, surjective, bijective.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & f_1(x, y) &= (2x + y, x - y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_2(x, y, z) &= (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 & f_3(x, y) &= (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_4(P) &= (P(-1), P(0), P(1)) \end{aligned}$$

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000956]

### Exercice 8

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  une base de  $E$ , et  $t$  un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de  $\begin{cases} \phi(e_1) = e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) = e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) = e_1 + te_3 \end{cases}$  définit une application linéaire  $\phi$  de  $E$  dans  $E$ . Écrire le transformé du vecteur  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ . Comment choisir  $t$  pour que  $\phi$  soit injective ? surjective ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000954]

### Exercice 9

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $\phi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme si et seulement si l'image par  $\phi$  de toute base de  $E$  est une base de  $F$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000963]

## 4 Morphismes particuliers

### Exercice 10

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $P$  le sous-espace des fonctions paires et  $I$  le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que  $E = P \oplus I$ . Donner l'expression du projecteur sur  $P$  de direction  $I$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000974]

### Exercice 11

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et soient  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients réels de degré  $n + 1$ . On considère l'application  $f$  qui à tout polynôme  $P$  de  $E$ , associe le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer l'équivalence

$f$  est bijective  $\iff A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

---

**Exercice 12**

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ , et  $f : E \rightarrow E$  définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que  $f$  est une application linéaire et donner une base de  $\text{Im } f$  et de  $\text{Ker } f$ .

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Une seule application n'est pas linéaire.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par  $\phi^{n-1}$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Faire un dessin de l'image et du noyau pour  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que le noyau est isomorphe à  $E_1 \cap E_2$ .

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Pour chacune des implications utiliser la formule du rang.

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Dire qu'un sous-espace  $F$  est stable par  $g$  signifie que  $g(F) \subset F$ .

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

$t = 0$  est un cas à part.

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Pour une base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  considérer la famille  $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ .

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Pour une fonction  $f$  on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Le projecteur sur  $P$  de direction  $I$  est l'application  $\pi : E \longrightarrow E$  qui vérifie  $\pi(f) \in P$ ,  $\pi \circ \pi = \pi$  et  $\text{Ker } \pi = I$ .

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Résultats utiles d'arithmétique des polynômes : la division euclidienne, le théorème de Bézout, le lemme de Gauss.

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

$P'$  désigne la dérivée de  $P$ . Pour trouver le noyau, résoudre une équation différentielle. Pour l'image calculer les  $f(X^k)$ .

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1.  $f_1$  est linéaire. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f_1((x, y) + (x', y')) &= f_1(x + x', y + y') \\ &= (2(x + x') + (y + y'), (x + x') - (y + y')) \\ &= (2x + y + 2x' + y', x - y + x' - y') \\ &= (2x + y, x - y) + (2x' + y', x' - y') \\ &= f_1(x, y) + f_1(x', y') \end{aligned}$$

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$f_1(\lambda \cdot (x, y)) = f_1(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) = \lambda \cdot (2x + y, x - y) = \lambda \cdot f_1(x, y).$$

2.  $f_2$  n'est pas linéaire, en effet par exemple  $f_2(1, 1, 0) + f_2(1, 1, 0)$  n'est pas égal à  $f_2(2, 2, 0)$ .
3.  $f_3$  est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  alors  $f_3((x, y, z) + (x', y', z')) = f_3(x, y, z) + f_3(x', y', z')$ . Et ensuite que pour tout  $(x, y, z)$  et  $\lambda$  on a  $f_3(\lambda \cdot (x, y, z)) = \lambda \cdot f_3(x, y, z)$ .
4.  $f_4$  est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout  $(x, y)$  et  $(x', y')$  alors  $f_4((x, y) + (x', y')) = f_4(x, y) + f_4(x', y')$ . Et ensuite que pour tout  $(x, y)$  et  $\lambda$  on a  $f_4(\lambda \cdot (x, y)) = \lambda \cdot f_4(x, y)$ .
5.  $f_5$  est linéaire : soient  $P, P' \in \mathbb{R}_3[X]$  alors

$$\begin{aligned} f_5(P + P') &= ((P + P')(-1), (P + P')(0), (P + P')(1)) \\ &= (P(-1) + P'(-1), P(0) + P'(0), P(1) + P'(1)) \\ &= (P(-1), P(0), P(1)) + (P'(-1), P'(0), P'(1)) \\ &= f_5(P) + f_5(P') \end{aligned}$$

Et si  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f_5(\lambda \cdot P) &= ((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1)) \\ &= (\lambda \times P(-1), \lambda \times P(0), \lambda \times P(1)) \\ &= \lambda \cdot (P(-1), P(0), P(1)) \\ &= \lambda \cdot f_5(P) \end{aligned}$$

---

## Correction de l'exercice 2 ▲

Montrons que la famille  $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$  est libre. Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1} \phi^{n-1}(x) = 0$ . Alors :  $\phi^{n-1}(\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1} \phi^{n-1}(x)) = 0$ . Mais comme de plus  $\phi^n = 0$ , on a l'égalité  $\phi^{n-1}(\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1} \phi^{n-1}(x)) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x) + \phi^n(\lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1} \phi^{n-2}(x)) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x) = \lambda_0 \phi^{n-1}(x)$ . Comme  $\phi^{n-1}(x) \neq 0$  on obtient  $\lambda_0 = 0$ .

En calculant ensuite  $\phi^{n-2}(\lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1} \phi^{n-1}(x))$  on obtient  $\lambda_1 = 0$  puis, de proche en proche,  $\lambda_2 = 2, \dots, \lambda_{n-1} = 0$ . La famille  $\{x, \phi(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$  est donc libre. En plus elle compte  $n$  vecteurs, comme  $\dim E = n$  elle est libre et maximale et forme donc une base de  $E$ .

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

---

1. Aucun problème...

2. Par définition de  $f$  et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\text{Im } f = \{f(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = E_1 + E_2.$$

Pour le noyau :

$$\text{Ker } f = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément  $(x_1, x_2) \in \text{Ker } f$ , vérifie  $x_1 \in E_1$ ,  $x_2 \in E_2$  et  $x_1 = -x_2$ . Donc  $x_1 \in E_2$ . Donc  $x_1 \in E_1 \cap E_2$ . Réciproquement si  $x \in E_1 \cap E_2$ , alors  $(x, -x) \in \text{Ker } f$ . Donc

$$\text{Ker } f = \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}.$$

De plus l'application  $x \mapsto (x, -x)$  montre que  $\text{Ker } f$  est isomorphe à  $E_1 \cap E_2$ .

3. Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim(E_1 \times E_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre  $\text{Ker } f$  et  $E_1 \cap E_2$  on obtient :

$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$

Mais  $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$ , donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

#### Correction de l'exercice 4 ▲

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ . Soit  $x \in E$ , alors  $f(x) \in \text{Im } f$  donc  $f(x) \in \text{Ker } f$ , cela entraîne  $f(f(x)) = 0$ ; donc  $f^2 = 0$ . De plus d'après la formule du rang  $\dim \text{Ker } f + \text{rg}(f) = n$ , mais  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f = \text{rg } f$ , ainsi  $2\text{rg}(f) = n$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $f^2 = 0$  alors  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$  car pour  $y \in \text{Im } f$  il existe  $x$  tel que  $y = f(x)$  et  $f(y) = f^2(x) = 0$ . De plus si  $2\text{rg}(f) = n$  alors la formule du rang donne  $\dim \text{Ker } f = \text{rg}(f)$  c'est-à-dire  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f$ . Nous savons donc que  $\text{Im } f$  est inclus dans  $\text{Ker } f$  mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux :  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ .

#### Correction de l'exercice 5 ▲

On va montrer  $g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$ . Soit  $y \in g(\text{Ker } f)$ . Il existe  $x \in \text{Ker } f$  tel que  $y = g(x)$ . Montrons  $y \in \text{Ker } f$  :

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

On fait un raisonnement similaire pour montrer  $g(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$ . Soit  $z \in g(\text{Im } f)$ , il existe  $y \in \text{Im } f$  tel que  $z = g(y)$ . Il existe alors  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Donc

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \text{Im } f.$$

#### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Par la formule  $\dim(G + H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H)$ , on sait que  $\dim(G + H) \leq \dim(G) + \dim(H)$ . Pour  $G = \text{Im } u$  et  $H = \text{Im } v$  on obtient :  $\dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \dim \text{Im } u + \dim \text{Im } v$ . Or  $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$ . Donc  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .

2. On applique la formule précédente à  $u + v$  et  $-v$  :  $\text{rg}((u + v) + (-v)) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v)$ , or  $\text{rg}(-v) = \text{rg}(v)$  donc  $\text{rg}(u) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(v)$ . Donc  $\text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u + v)$ . On recommence en échangeant  $u$  et  $v$  pour obtenir :  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$ .

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire "à la main".

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :  $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$  pour  $f : E \rightarrow F$ . Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1.  $f_1$  est injective, surjective (et donc bijective).

(a) Faisons tout à la main. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x, y) \in \text{Ker } f_1 &\iff f_1(x, y) = (0, 0) \iff (2x + y, x - y) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)\end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Ker } f_1 = \{(0, 0)\}$  et donc  $f_1$  est injective.

(b) Calculons l'image. Quels éléments  $(X, Y)$  peuvent s'écrire  $f_1(x, y)$  ?

$$\begin{aligned}f_1(x, y) = (X, Y) &\iff (2x + y, x - y) = (X, Y) \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = X \\ x - y = Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{X+Y}{3} \\ y = \frac{X-2Y}{3} \end{cases} \\ &\iff (x, y) = \left( \frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3} \right)\end{aligned}$$

Donc pour n'importe quel  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$  on trouve un antécédent  $(x, y) = \left( \frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3} \right)$  qui vérifie donc  $f_1(x, y) = (X, Y)$ . Donc  $\text{Im } f_1 = \mathbb{R}^2$ . Ainsi  $f_1$  est surjective.

(c) Conclusion :  $f_1$  est injective et surjective donc bijective.

2. (a) Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker } f_2 &\iff f_2(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff (2x + y + z, y - z, x + y) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Ker } f_2 = \text{Vect}(-1, 1, 1)$  et donc  $f_2$  n'est pas injective.

- (b) Maintenant nous allons utiliser que  $\text{Ker } f_2 = \text{Vect}(-1, 1, 1)$ , autrement dit  $\dim \text{Ker } f_2 = 1$ . La formule du rang, appliquée à  $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  s'écrit  $\dim \text{Ker } f_2 + \dim \text{Im } f_2 = \dim \mathbb{R}^3$ . Donc  $\dim \text{Im } f_2 = 2$ . Nous allons trouver une base de  $\text{Im } f_2$ . Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons par exemple  $v_1 = f_2(1, 0, 0) = (2, 0, 1) \in \text{Im } f_2$  et  $v_2 = f_2(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \in \text{Im } f_2$ . Par construction ces vecteurs sont dans l'image de  $f_2$  et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants. Donc  $\{v_1, v_2\}$  est une base de  $\text{Im } f_2$ .
- (c)  $f_2$  n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).
3. Sans aucun calcul on sait  $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.
- (a) Calculons le noyau :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker } f_3 &\iff f_3(x, y) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff (y, 0, x - 7y, x + y) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \dots \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Ker } f_3 = \{(0, 0)\}$  et donc  $f_3$  est injective.

- (b) La formule du rang, appliquée à  $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  s'écrit  $\dim \text{Ker } f_3 + \dim \text{Im } f_3 = \dim \mathbb{R}^2$ . Donc  $\dim \text{Im } f_3 = 2$ . Ainsi  $\text{Im } f_3$  est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $f_3$  n'est pas surjective.
- Par décrire  $\text{Im } f_3$  nous allons trouver deux vecteurs indépendants de  $\text{Im } f_3$ . Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple  $v_1 = f(1, 0) = (0, 0, 1, 1)$ . Pour  $v_2$  on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de  $v_1$ . Essayons  $v_2 = f(0, 1) = (1, 0, -7, 1)$ . Par construction  $v_1, v_2 \in \text{Im } f$ ; ils sont clairement linéairement indépendants et comme  $\dim \text{Im } f_3 = 2$  alors  $\{v_1, v_2\}$  est une base de  $\text{Im } f_3$ .
- Ainsi  $\text{Im } f_3 = \text{Vect}\{v_1, v_2\} = \{\lambda(0, 0, 1, 1) + \mu(1, 0, -7, 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ .
4.  $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc  $f_4$  ne peut être injective.
- (a) Calculons le noyau. Écrivons un polynôme  $P$  de degré  $\leq 3$  sous la forme  $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ . Alors  $P(0) = d$ ,  $P(1) = a + b + c + d$ ,  $P(-1) = -a + b - c + d$ .

$$\begin{aligned} P(X) \in \text{Ker } f_4 &\iff (P(-1), P(0), P(1)) = (0, 0, 0) \\ &\iff (-a + b - c + d, d, a + b + c + d) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \\ &\iff \dots \\ &\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\ &\iff (a, b, c, d) = (t, 0, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi le noyau  $\text{Ker } f_4 = \{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{X^3 - X\}$ .  $f_4$  n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

- (b) La formule du rang pour  $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  s'écrit  $\dim \text{Ker } f_4 + \dim \text{Im } f_4 = \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ . Autrement dit  $1 + \dim \text{Im } f_4 = 4$ . Donc  $\dim \text{Im } f_4 = 3$ . Ainsi  $\text{Im } f_4$  est un espace de dimension 3 dans  $\mathbb{R}^3$  donc  $\text{Im } f_4 = \mathbb{R}^3$ . Conclusion  $f_4$  est surjective.

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Comment est définie  $\phi$  à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour  $x \in E$  alors  $x$  s'écrit dans la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ . Et  $\phi$  est définie sur  $E$  par la formule

$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$

Soit ici :

$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$

Cette définition rend automatiquement  $\phi$  linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).

2. On cherche à savoir si  $\phi$  est injective. Soit  $x \in E$  tel que  $\phi(x) = 0$  donc  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$ . Comme  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est une base alors tous les coefficients sont nuls :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$

Si  $t \neq 0$  alors en résolvant le système on obtient  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0$ . Donc  $x = 0$  et  $\phi$  est injective.

Si  $t = 0$ , alors  $\phi$  n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = -2$ . Donc pour  $x = e_1 + e_2 - 2e_3$  on obtient  $\phi(x) = 0$ .

3. Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode.  $\phi$  est surjective si et seulement si la dimension de  $\text{Im } \phi$  est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici  $E$  de dimension 3). Or on a une formule pour  $\dim \text{Im } \phi$  :

$$\dim \text{Ker } \phi + \dim \text{Im } \phi = \dim E.$$

Si  $t \neq 0$ ,  $\phi$  est injective donc  $\text{Ker } \phi = \{0\}$  est de dimension 0. Donc  $\dim \text{Im } \phi = 3$  et  $\phi$  est surjective.

Si  $t = 0$  alors  $\phi$  n'est pas injective donc  $\text{Ker } \phi$  est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc  $\dim \text{Im } \phi \leq 2$ . Donc  $\phi$  n'est pas surjective.

On remarque que  $\phi$  est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Montrons que si  $\phi$  est un isomorphisme, l'image de toute base de  $E$  est une base de  $F$  : soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et nommons  $\mathcal{B}'$  la famille  $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ .
- (a)  $\mathcal{B}'$  est libre. Soient en effet  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 \phi(e_1) + \dots + \lambda_n \phi(e_n) = 0$ . Alors  $\phi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$  donc, comme  $\phi$  est injective,  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  puis, comme  $\mathcal{B}$  est libre,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .
- (b)  $\mathcal{B}'$  est génératrice. Soit  $y \in F$ . Comme  $\phi$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $y = \phi(x)$ . Comme  $\mathcal{B}$  est génératrice, on peut choisir  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . Alors  $y = \lambda_1 \phi(e_1) + \dots + \lambda_n \phi(e_n)$ .
2. Supposons que l'image par  $\phi$  de toute base de  $E$  soit une base  $F$ . Soient  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  la base  $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ .
- (a)  $\text{Im } \phi$  contient  $\mathcal{B}'$  qui est une partie génératrice de  $F$ . Donc  $\phi$  est surjective.
- (b) Soit maintenant  $x \in E$  tel que  $\phi(x) = 0$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . Alors  $\phi(x) = 0 = \lambda_1 \phi(e_1) + \dots + \lambda_n \phi(e_n)$  donc puisque  $\mathcal{B}'$  est libre :  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . En conséquence si  $\phi(x) = 0$  alors  $x = 0$  :  $\phi$  est injective.

En fait on montrerait de la même façon que “ $\phi$  est un isomorphisme si et seulement si l’image par  $\phi$  d’une base de  $E$  est une base de  $F$ ”.

### Correction de l’exercice 10 ▲

1. La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle :  $P \cap I = \{0\}$ . Montrons qu’une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

La fonction  $x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  est paire (le vérifier !), la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$  est impaire. Donc  $P + I = E$ .  
Bilan :  $E = P \oplus I$ .

2. Le projecteur sur  $P$  de direction  $I$  est l’application  $\pi : E \rightarrow E$  qui à  $f$  associe la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ , c’est-à-dire à  $f$  on associe la partie paire de  $f$ . Nous avons bien
- $\pi(f) \in P$ . Par définition de  $\pi$ ,  $\pi(f)$  est bien une fonction paire.
  - $\pi \circ \pi = \pi$ . Si  $g$  est une fonction paire alors  $\pi(g) = g$ . Appliquons ceci avec  $g = \pi(f)$  (qui est bien une fonction paire) donc  $\pi(\pi(f)) = \pi(f)$ .
  - $\text{Ker } \pi = I$ . Si  $\pi(f) = 0$  alors cela signifie exactement que la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  est la fonction nulle. Donc pour tout  $x : \frac{f(x) + f(-x)}{2} = 0$  donc  $f(x) = -f(-x)$ ; cela implique que  $f$  est une fonction impaire. Réciproquement si  $f \in I$  est une fonction impaire, sa partie paire est nulle donc  $f \in \text{Ker } \pi$ .

### Correction de l’exercice 11 ▲

1. Soit  $P \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors la division euclidienne de  $AP$  par  $B$  s’écrit  $AP = Q \cdot B + R$ , donc en multipliant par  $\lambda$  on obtient :  $A \cdot (\lambda P) = (\lambda Q)B + \lambda R$ . ce qui est la division euclidienne de  $A \cdot (\lambda P)$  par  $B$ , donc si  $f(P) = R$  alors  $f(\lambda P) = \lambda R$ . Donc  $f(\lambda P) = \lambda f(P)$ .  
Soient  $P, P' \in E$ . On écrit les divisions euclidiennes :

$$AP = Q \cdot B + R, \quad AP' = Q' \cdot B + R'.$$

En additionnant :

$$A(P + P') = (Q + Q')B + (R + R')$$

qui est la division euclidienne de  $A(P + P')$  par  $B$ . Donc si  $f(P) = R$ ,  $f(P') = R'$  alors  $f(P + P') = R + R' = f(P) + f(P')$ .

Donc  $f$  est linéaire.

2. Sens  $\Rightarrow$ . Supposons  $f$  est bijective, donc en particulier  $f$  est surjective, en particulier il existe  $P \in E$  tel que  $f(P) = 1$  (1 est le polynôme constant égale à 1). La division euclidienne est donc  $AP = BQ + 1$ , autrement dit  $AP - BQ = 1$ . Par le théorème de Bézout,  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.
3. Sens  $\Leftarrow$ . Supposons  $A, B$  premiers entre eux. Montrons que  $f$  est injective. Soit  $P \in E$  tel que  $f(P) = 0$ . Donc la division euclidienne s’écrit :  $AP = BQ + 0$ . Donc  $B$  divise  $AP$ . Comme  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, alors  $B$  divise  $P$ . Or  $B$  est de degré  $n + 1$  et  $P$  de degré moins que  $n$ , donc la seule solution est  $P = 0$ . Donc  $f$  est injective. Comme  $f : E \rightarrow E$  est injective et  $E$  est de dimension finie, alors  $f$  est bijective.

### Correction de l’exercice 12 ▲

1.  $f$  est bien linéaire...
2. Soit  $P$  tel que  $f(P) = 0$ . Alors  $P$  vérifie l’équation différentielle

$$P + (1 - X)P' = 0.$$

Dont la solution est  $P = \lambda(X - 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Donc  $\text{Ker } f$  est de dimension 1 et une base est donnée par un seul vecteur :  $X - 1$ .

3. Par le théorème du rang la dimension de l'image est :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = (n+1) - 1 = n.$$

Il faut donc trouver  $n$  vecteurs linéairement indépendants dans  $\operatorname{Im} f$ . Évaluons  $f(X^k)$ , alors

$$f(X^k) = (1-k)X^k + kX^{k-1}.$$

Cela donne  $f(1) = 1, f(X) = 1, f(X^2) = -X^2 + 2X, \dots$  on remarque que pour  $k = 2, \dots, n, f(X^k)$  est de degré  $k$  sans terme constant. Donc l'ensemble

$$\{f(X), f(X^2), \dots, f(X^n)\}$$

est une famille de  $n$  vecteurs, appartenant à  $\operatorname{Im} f$ , et libre (car les degrés sont distincts). Donc ils forment une base de  $\operatorname{Im} f$ .

---