COURS D'ELECTROSTATIQUE

emmanuel.marin@univ-st-etienne.fr
Laboratoire Hubert Curien
Site Carnot

Plan

- A - CHAMP ELECTRIQUE
  POTENTIEL ELECTRIQUE

- B - ELECTROSTATIQUE DES CONDUCTEURS (en équilibre)

- C - ENERGIE ELECTROSTATIQUE

CHAMP ELECTRIQUE - POTENTIEL ELECTRIQUE

I CHARGES ELECTRIQUES

Structure de la matière :

- Particules élémentaires caractérisées par :
  - Masse
  - Charge
  - Spin
  - Parité
  - …

  Propriétés abstraites ou familères

Charge : Expériences d'électricité statique

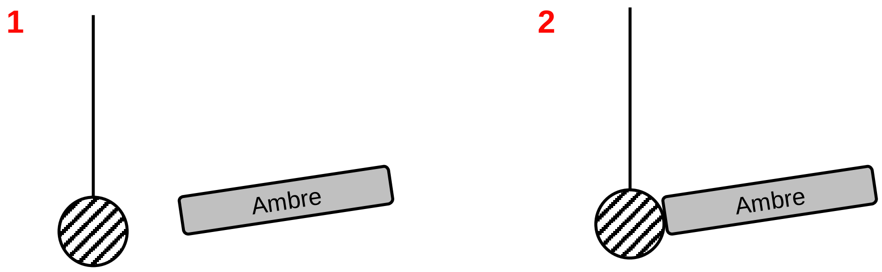
Tout le monde a déjà vécu l'expérience désagréable d'une "décharge électrique".

Attraction de corps légers avec des corps frottés

….

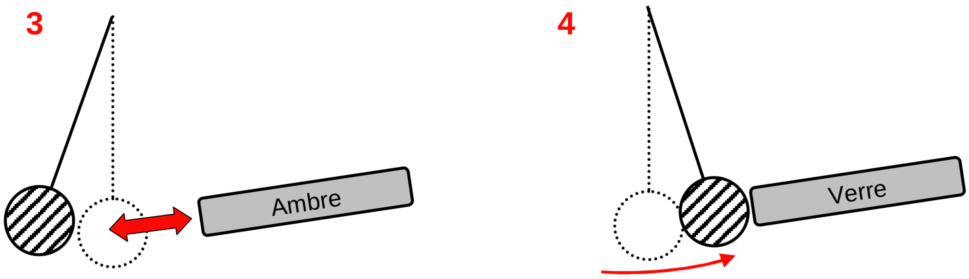
Expérience 1

Prenons une boule très légère en polystyrène par exemple recouverte de métal fin. Approchons ensuite une tige de **verre** ou d'**ambre** préalablement frottée avec un tissu



Rien ne se passe

Electrisation par contact



Répulsion **Attraction**

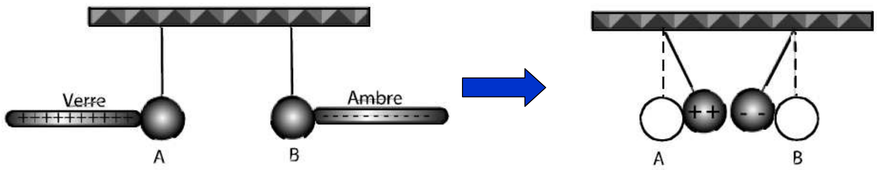
On fait donc apparaitre deux classes d'electricité :

- **Répulsion** si de même classe (cas 3)
- **Attraction** si de classe différente (cas 4)

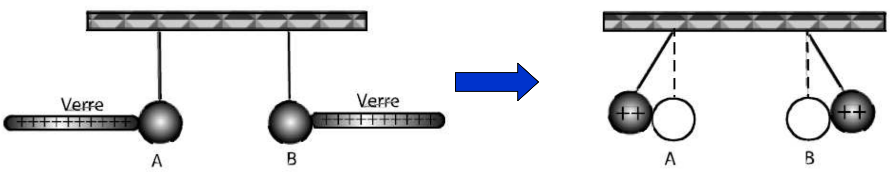
Vidéos

- Pas d'électrisation → neutre aucun effet

- Expérience 2



Qu'arrive-t-il si la force électrique permet au deux boules de se toucher?



La charge d'une particule élémentaire peut donc être :

< 0 : cas des électrons

> 0 : cas des protons

neutres : cas des neutrons (pas d'interaction électrique)

Remarque : le signe <0 pour les électrons est arbitraire.

Dimension des porteurs élémentaires de charge :

électrons : $\phi \leq$ qlq 10^{-15} m & $m_e = 9.109\ 10^{-31}$kg

protons : $\phi \leq$ qlq 10^{-15} m & $m_p = 1.672\ 10^{-27}$ kg

"Charge ponctuelle"

Charges : quantifiées → e= 1.6 10^{-19} Coulomb (C) Expérience de Millikan

électron : q_e =-e

proton : q_p = e

avec : $|q_e| = |q_p|$ à 10^{-20} près!

Densité de Charge

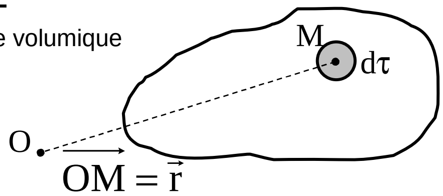
Conducteur métallique : **5.10^{22} atomes/cm^3**

Si un é de libre par atome : **5.10^{22} é/cm^3 !**

La charge électronique parait "continue"

Remarque : même chose que la masse volumique

Répartition macroscopique de la charge → Q



Dans le Volume élémentaire **dτ**, il y a une charge **dQ**

Densité de charge en volume : $\boxed{\rho(r,t) = \frac{dQ}{d\tau}}$ **ρ en C.m^{-3}**

éventuellement

Isolants : Charges localisées au point de frottement ou de contact.

Les porteurs de charges non compensé ne peuvent se déplacer

Conducteurs : Charges mobiles qui s'étendent à tout le corps (en surface à l'équilibre)

Les porteurs de charges non compensé peuvent se déplacer

II : INTERACTION ELEMENTAIRE
LOI DE COULOMB

II-1 Charges ponctuelles

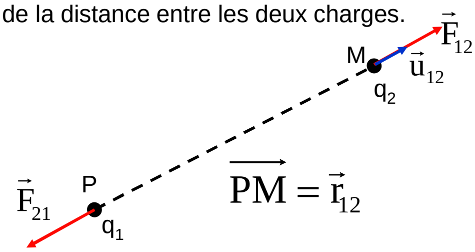
Dans ses expériences C. Coulomb a mise en évidence :

1 - La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges

2 - Elle est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon ;

3 - Enfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

Loi de Coulomb : $\boxed{\vec{F}_{12} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{12}}$



avec $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9.10^9$ (S.I.)

ou $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ (S.I.) **ε_0 : permittivité électrique du "vide"**

D'après le principe d'égalité de l'action et de la réaction : $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$

Unité de la charge → 1 Coulomb : **ENORME**

2 charges de même signe de 1C chacune, situées à 1km l'une de l'autre se repoussent avec une force équivalents de "**1 tonne**" (masse équivalente)

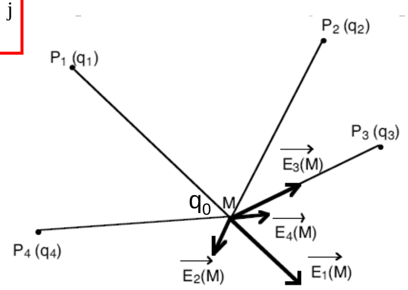
II-2 Distribution de charges : **Principe de superposition**

II-2-a Ensemble de charges ponctuelles :

Action d'un système $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ sur une charge q_0 en M

L'expérience montre que : $\boxed{\vec{F}_0 = \sum_j \vec{F}_j}$

$$\boxed{\vec{F}_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{j0}^2} \vec{u}_{j0}}$$

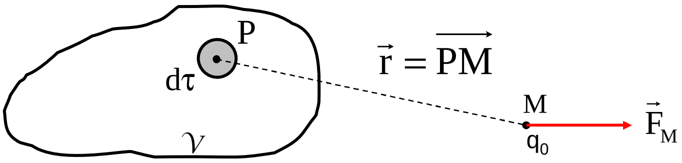


Somme vectorielle : $\vec{F}_0 = \begin{cases} F_{0x} \\ F_{0y} \\ F_{0z} \end{cases}$

$$F_{0x} = \sum_{j=1}^{n} F_{jx}$$

II-2-b Distribution "continue" de charges :

Action d'une répartition en volume **ρ(P)** sur une charge q_0 en M



$$\boxed{\vec{F}_M = \int_V \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \rho(P) d\tau \frac{\vec{r}}{r^3}} \quad \text{avec } \vec{u}_{PM} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Remarques : * Intégrale triple qui se ramène souvent à une intégrale simple
* Cette écriture peut se simplifier si une ou deux dimensions du volume V sont infinies :

1 dimension infinie par rapport aux autres : densité surfacique **σ(P)**
Intégrale double

2 dimensions infinies par rapport aux autres : densité linéïque **λ(P)**
Intégrale simple

III : CHAMP ELECTRIQUE

III-1 Définition

Une particule de charge q_1 située en P crée en tout point M de l'espace distinct de P un champ vectoriel : $\boxed{\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}}$

appelé <u>champ électrique</u>. L'unité, du S.I., est le Volt/mètre (symbole V/m)

La force exercée sur une charge q_2 se calcul facilement : $\boxed{\vec{F}_2 = q_2 \vec{E}_1(M)}$

Pour une distribution de charges le champ électrique :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_j^2} \vec{u}_j} \quad \text{avec } r_j = PM_j \text{ et } \vec{u}_j = \frac{\overrightarrow{PM_j}}{r_j}$$

Pour une distribution de charges "continue" le champ électrique :

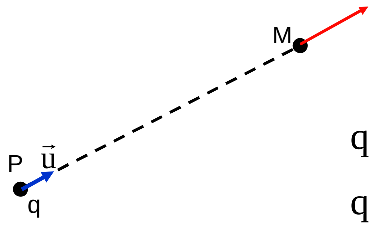
$$\boxed{\vec{E}(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho(P) d\tau_P \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

Le champ électrique est décrit comme une propriété locale de l'espace, liée à l'existence d'une répartition de charge (agissantes)

L'ensemble des charges ($\sum q_j$ ou $\int \rho d\tau$) crée en M un champ $\vec{E}_M$ tel que si on met une charge q_0 en M, elle est soumise à une force :

$$\boxed{\vec{F}_M = q_0 \vec{E}(M)}$$

Charge ponctuelle



$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

$$q > 0 : \vec{E} \text{ à le sens de } \vec{u} \Leftrightarrow (P \rightarrow M)$$

$$q < 0 : \vec{E} \text{ à le sens de } -\vec{u} \Leftrightarrow (M \rightarrow P)$$

Distribution de charges :

$$\vec{E}_M = \sum_j \vec{E}_{Mj}$$

Somme vectorielle

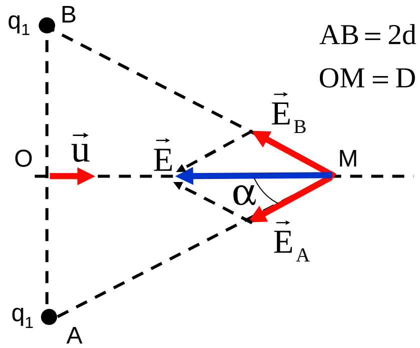
Principe de superposition

III-2 Exemples de calcul

Deux charges ponctuelles identiques q_1<0

Le champ électrique en M est donc la superposition ou la somme du champ crée par la charge q_1 en A et de celui crée par q_1 en B :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$



$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|} \qquad \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{BM}}{\left\|\overrightarrow{BM}\right\|}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{E}\right\| = 2\left\|\vec{E}_A\right\|\cos\alpha$$

$$\left\|\vec{E}_A\right\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{\left(D^2+d^2\right)} = \left\|\vec{E}_B\right\|$$

$$\cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{D^2+d^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{E}\right\| = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{\left(D^2+d^2\right)}\frac{D}{\sqrt{D^2+d^2}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|D}{\left(D^2+d^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 D}{\left(D^2+d^2\right)^{3/2}}\vec{u} \text{ avec } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}}$$

<u>Répartition uniforme sur une droite infinie</u>

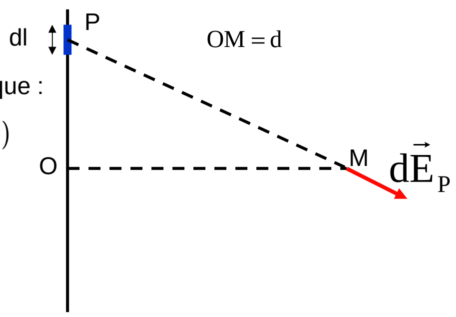
Charge "ponctuelle" $\lambda dl = dQ$

en P crée en M $\longrightarrow d\vec{E}_P$

$$\Rightarrow d\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

Densité linéïque :

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}\ (>0)$$

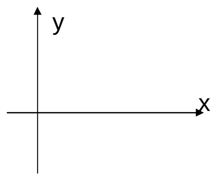


$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \int_{fil} d\vec{E}_P}$$

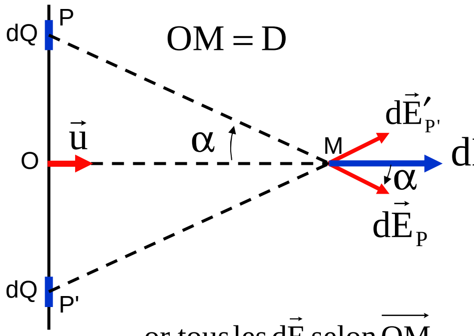
<u>Première méthode :</u>

$$E_x = \int_{fil} dE_x$$

$$E_y = \int_{fil} dE_y$$



Deuxième méthode : **Considération de symétrie**



en P : $dQ \rightarrow d\vec{E}_P$

en P' : $dQ \rightarrow d\vec{E}'_{P'}$

P' symétrique de P par rapport à OM

$\Rightarrow d\vec{E}'_{P'}$ symétrique $d\vec{E}_P$

$$d\vec{E}'_{p'} + d\vec{E}_p = \text{Vecteur selon } \overrightarrow{OM}$$

$$= d\vec{E}$$

$$\vec{E} = \int_{P,P'} d\vec{E}$$

or tous les $d\vec{E}$ selon $\overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow \vec{E}$ selon $\overrightarrow{OM}$

$$E = \int_{P,P'} dE = \int_{P,P'} 2.dE_P.\cos\alpha$$

$$E = \int_{P,P'} 2.\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dQ}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}.\cos\alpha = \int_{P\to 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda.dl}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}.\cos\alpha$$

(dans ce cas dl>0)

$\overline{OP} = l$ $\qquad \overline{OP} = -D.\mathrm{tg}\alpha$

$dl = d\overline{OP}$ $\qquad D = OM$

$$dl = -\frac{D}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 = \frac{D^2}{\cos^2\alpha}$$

$$E = \int_{P\to 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{-\lambda.D}{\cos^2\alpha}.d\alpha.\frac{\cos^2\alpha}{D^2}\cos\alpha$$

$$E = \int_{P\to 0}^{+\infty} -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{D}.\cos\alpha.d\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{D}\int_{P\to 0}^{+\infty} -\cos\alpha.d\alpha$$

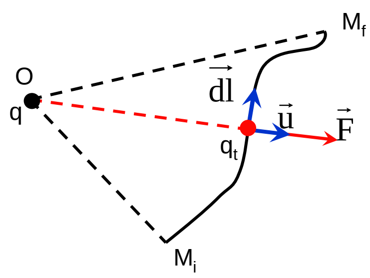
$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{D}.\int_{\alpha=0}^{\alpha=-\pi/2} -\cos\alpha.d\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{D}\left[-\sin\alpha\right]_0^{-\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}\vec{u}}$$

IV : POTENTIEL ELECTRIQUE

IV-1 Energie potentielle électrique

<u>Système à deux charges :</u> q et q_{test} de même signe; >0 par exemple



Travail de la force $\vec{F}$ au cours du déplacement $M_i \rightarrow M_f$ de la charge q_t

$$W_{if} = \int_{M_i}^{M_f} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{M_i}^{M_f} \frac{q.q_t}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}.\vec{dl}$$

$$\text{et } \vec{u}.\vec{dl} = 1.dl.\cos\left(\vec{u},\vec{dl}\right) = dr$$

$$\Rightarrow W_{if} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q.q_t.\int_{M_i}^{M_f}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{W_{if} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q.q_t.\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)}$$

Le travail de la force électrique $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi ⇨ **Force Conservatrice**

On écrit : $\boxed{W = -\Delta U}$ → **Variation de l'énergie potentielle électrique**

$$\boxed{\Delta U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q.q_t.\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)}$$

Energie potentielle électrique U est définie à une constante près :

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q.q_t.\frac{1}{r} + C^{te}$$

On prend comme valeur de référence : $U = 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty$

d'où : $\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.q_t}{r}}$

U représente le travail à fournir pour "Construire" le système : c'est-à-dire pour amener q et q_t depuis l'infini jusqu'à la distance r l'une de l'autre.

IV-2 Potentiel électrique

IV-2-a :

On pose : $\boxed{V = \frac{U}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$ V serait l'énergie potentielle électrique par unité de charge test

<u>V(M)</u> → caractéristique de q (et de M)

→ dépend (comme U) d'une référence arbitraire : ici V=0 à l'infini (si pas de charges agissantes à l'infini)

→ ce n'est pas une énergie (J/C)

→ Unité : Volt

IV-2-b : On calcule la circulation de $\vec{E}$ dû à une charge ponctuelle q :

$$C = \int_i^f \vec{E}.\vec{dl} = \int_i^f \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}\vec{u}.\vec{dl} \quad \text{or} \quad dr = \vec{u}.\vec{dl}$$

$$C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_i^f \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)}$$

Ne dépend pas du trajet

$$\Rightarrow \boxed{C = -\Delta V}$$

On dit que le champ électrique $\vec{E}$ dérive d'un potentiel V : $\boxed{\int_i^f \vec{E}.\vec{dl} = -\Delta V}$

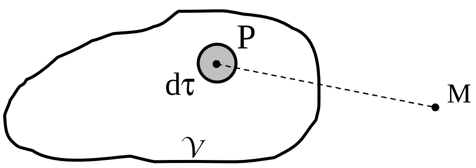
<u>La charge ponctuelle q :</u> $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

<u>Distribution de charges :</u> **Principe de superposition**

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{r_j}$$ (Somme scalaire)

ou

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(P)}{r_{PM}}d\tau_P$$



Charges de volume $\mathcal{V}$ fini pour que l'hypothèse V(∞)=0 reste valable

IV-3 Travail de la force électrique

On a vu que pour un système de deux charges ponctuelles q et q_t, le travail de $\vec{F}(q_t)$

$$\Rightarrow W_{if} = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

d'où; avec $V = \frac{U}{q_t}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{if} = q_t.(V_i - V_f)}$$

Cas général:
Distribution de charges crée un champ électrique $\vec{E}(M)$; c'est-à-dire un potentiel électrique V(M).
Quand on déplace un charge q dans ce champ, elle est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$ et le travail entre A et B s'écrit :

$$\boxed{W_{AB} = q.(V_A - V_B)}$$

IV-4 Relation générale Champ - Potentiel

On a vu que : $\int_i^f \vec{E}.\vec{dl} = -\Delta V$ $\Rightarrow$ $\vec{E}.\vec{dl} = -dV$

$$\vec{E}.\vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Dans un repère O,x,y,z:

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{dl} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$dV = \text{différentielle totale exacte}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

d'où par identification : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

c.à.d $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$

La composante du vecteur champ électrique suivant un direction l quelconque est donnée par: $\boxed{E_l = -\frac{\partial V}{\partial l}}$

Surface équipotentielle : toute surface telle que $V(M) = C^{te}$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$ est orthogonal à la surface équipotentielle passant par M.

Démonstration : soit un point M où $\begin{cases} \vec{E} \\ V \end{cases}$ $\qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$

On envisage une circulation élémentaire de $\vec{E}$, de M à M' sur la surface équipotentielle V(M) .

$$\Rightarrow V(M') = V(M) \qquad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$$

$$dC = \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV = 0$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V).\overrightarrow{dl} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \perp \overrightarrow{dl} \quad \left(\forall\ \overrightarrow{dl} \text{ sur la surface}\right)$$

$$\text{d'où} : \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \perp \text{Surface équipotentielle}$$

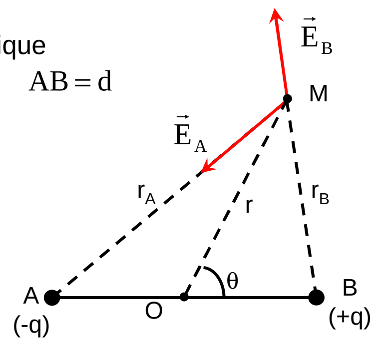
Le champ électrique $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à la surface équipotentielle passant par M.

Les lignes de force du champ $\vec{E}$ sont perpendiculaire aux surfaces équipotentielles

IV-5 Exemples

IV-5-a : champ et potentiel d'un dipôle électrique

$AB = d$



Potentiel en M : $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{r_B} - \dfrac{q}{r_A}\right)$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_A - r_B}{r_A r_B}\right)$$

Dans le cas où : OM >>AB

c'est-à-dire : r >> d

$$r_A \approx r + \frac{d}{2}\cos(\theta) \quad \text{et} \quad r_B \approx r - \frac{d}{2}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow r_A - r_B \approx d\cos(\theta) \quad \text{et} \quad r_A r_B \approx \left(r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2(\theta)\right) \approx r^2$$

$$\Rightarrow \quad V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos(\theta)}{r^2}$$

Champ en M :

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ toujours dans l'hypothèse r >> d

Coordonnées polaires : $\vec{E}(E_r, E_\theta)$ et $\overrightarrow{dM}(dr, rd\theta)$

Composante radiale (selon $\overrightarrow{OM}$)

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^3}}$$

Composante orthoradiale (selon $\perp \overrightarrow{OM}$)

$$\boxed{E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\sin\theta}{r^3}}$$

Remarque : Dans le cas r quelconque on calcule:

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q}{r_A^2}\vec{u}_A + \frac{q}{r_B^2}\vec{u}_B\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes

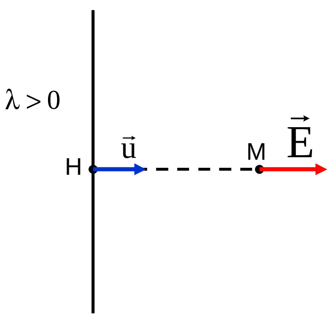
$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques

IV-5-b : potentiel d'un fil infini portant λ charge par unité de longueur



$$HM = x \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{u}$$

Potentiel ⇨ Problème des charges à l'infini

$$V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dM}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(x_B) - \ln(x_A)\right]$$

On peut prendre comme potentiel électrique dû au fil chargé :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(x) + C^{te}$$

On voit bien que pour x→∞ ⇒ V≠0

Le fil étant infini, on ne peut pas prendre le potentiel nul à l'infini ; la constante devra être déterminée en choisissant arbitrairement la position correspondant au potentiel nul.

V FLUX de $\vec{E}$ - THEOREME DE GAUSS

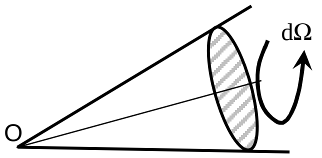
V-1-a Angle solide

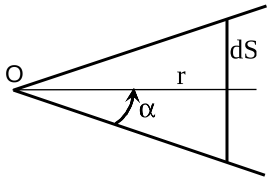
La notion d'angle solide est l'extension dans l'espace de l'angle défini dans un plan. Par exemple, le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche

Définition :

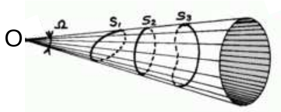
l'angle solide élémentaire dΩ, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}}$$





Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r. Son unité est le « stéradian » (symbole sr)



En coordonnées sphériques ⇒ $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\boxed{\Rightarrow \Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta = 2\pi(1-\cos\alpha)}$$

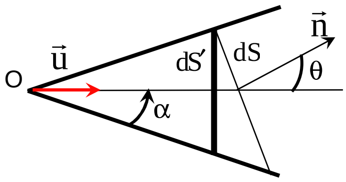
Quelques valeurs typiques

$$\text{Le demi-espace} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega = 2\pi(1-\cos\alpha) = 2\pi\,\text{sr}$$

$$\text{L'espace complet} \Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow \Omega = 2\pi(1-\cos\alpha) = 4\pi\,\text{sr}$$

D'une façon générale, le cône peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ. L'angle solide élémentaire est alors défini par :

$$\boxed{d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\vec{n}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}}$$



dS' est la surface effective ou "vue" par un observateur situé en O.

V-1-b <u>Flux d'un champ de vecteurs $\vec{B}$</u>

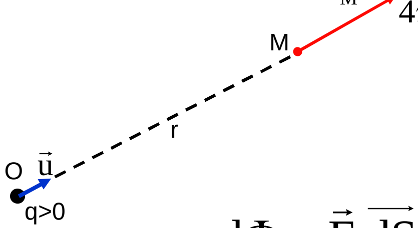
Chaque élément dS est caractérisé par un vecteur $\overrightarrow{dS} = dS.\vec{n}$

Le flux de $\vec{B}$ à travers dS est $\boxed{d\Phi = \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \vec{B}.\vec{n}.dS}$

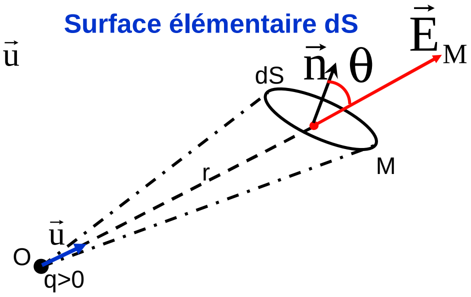
Le flux de B à travers toute la surface est : $\boxed{\Phi = \iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS}}$

V-2 <u>Flux du champ électrique $\vec{E}$</u>

V-2-a <u>Charge ponctuelle :</u> $\vec{E}_M = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{u}$



Surface élémentaire dS



$$d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}\cdot\vec{n}dS$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Rightarrow d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cdot\cos\theta}{r^2}\\ &\Rightarrow d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega\end{aligned}}$$

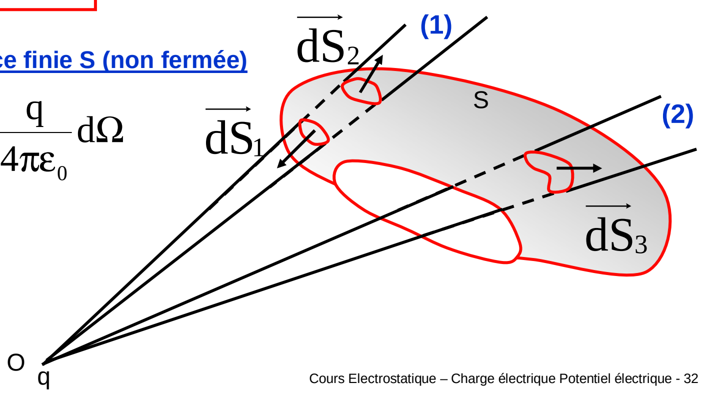
car $\vec{u}\cdot\vec{n} = \cos\theta$

Angle solide sous lequel on voit dS depuis O.
dΩ = surface algébrique découpée sur la sphère de centre O et de rayon unité, par le cône de sommet O s'appuyant sur dS.

<u>Flux à travers un surface finie S (non fermée)</u>

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S d\Omega$$



Cône (1) : Le flux algébrique est nul car :

$$d\Omega_1 = \frac{dS_1 \cos\theta_1}{r_1^2} = -d\Omega_2 = -\frac{dS_2 \cos\theta_2}{r_2^2}$$

Cône (2) : Le flux algébrique n'est pas nul

Flux à travers un surface S fermée

Si q est à l'extérieur de S :

tous les cônes de sommet O (q) sont du type (1)

$$\Rightarrow \oiint_S d\Omega = 0$$

$$\text{et donc } \Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Si q est à l'intérieur de S :

$$\Rightarrow \oiint_S d\Omega = 4\pi$$

$$\text{et donc } \Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Cours Electrostatique – Charge électrique Potentiel électrique - 33

V-2-b Distribution de Charges :

En utilisant le principe de superposition : $\vec{E} = \sum_j \vec{E}_j$

$$\Rightarrow d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$d\Phi = \left(\sum_j \vec{E}_j\right) \cdot \overrightarrow{dS} = \sum_j d\Phi_j$$

$$\text{d'où : } \Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \sum_j \left\{ \iint_S \vec{E}_j \cdot \overrightarrow{dS} \right\}$$

Cas d'une surface S fermée $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \sum_j \left\{ \oiint_S \vec{E}_j \cdot \overrightarrow{dS} \right\}$

Si q_j à l'extérieur de S $\Rightarrow \Phi_j = 0$

Si qj à l'intérieur de S $\Rightarrow \Phi_j = \frac{q_j}{\varepsilon_0}$

Si qj sur S $\Rightarrow \Phi_j = \frac{q_j}{2\varepsilon_0}$

Résultat vrai que la distribution de charge soit discrète ou continue.

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int.}}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_{surf.}}{2\varepsilon_0}}$$

V-2-c Généralisation : Théorème de Gauss

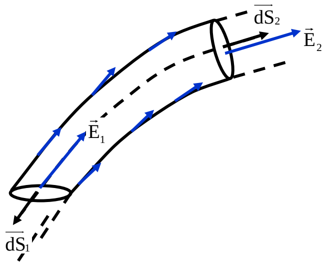
Le flux du champ électrique, crée par une distribution quelconque de charges, **à travers une surface fermée** est égal au quotient par ε_0 de la somme des charges intérieures et de la demi-somme des charges superficielles, quelles que soient les charges extérieures.

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int.}}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_{surf.}}{2\varepsilon_0}}$$

V-3 **Application du Théorème de Gauss**

V-3-a Forme des lignes (de force) du champ

Dans l'espace où il n'y a pas de charges $\Rightarrow$



Surface fermée formée par un tube de force limité par deux section dS_1 et dS_2

Le flux à travers cette surface est nul car $\Sigma q = 0$

A l'aide du théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$

$$\Rightarrow \oiint_{S_1} \vec{E}_1\cdot\overrightarrow{dS_1} + \oiint_{S_2} \vec{E}_2\cdot\overrightarrow{dS_2} + \underbrace{\oiint_{S_{lat}} \vec{E}_{lat}\cdot\overrightarrow{dS_{lat}}}_{=0}$$

car $\vec{E}$ est tangent

$$\Rightarrow \oiint_{S_1} \vec{E}_1\cdot\overrightarrow{dS_1} + \oiint_{S_2} \vec{E}_2\cdot\overrightarrow{dS_2} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1\cdot\overrightarrow{dS_1} + \vec{E}_2\cdot\overrightarrow{dS_2} = 0$$

car $\vec{E}$ est tangent

$$\Rightarrow E_1 dS_1 + E_2 dS_2 = 0$$

dS varie en sens inverse de E $\Rightarrow$ les lignes de champ convergent quand on va vers une zône de champ élevé.

En particulier, proche des sources (charges) le champ est plus fort $\Rightarrow$ les lignes de champ sont plus serrées.

V-3-a <u>Calcul d'un champ électrique</u>

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$.

En effet, on peut prendre une surface S quelconque qui nous permettra de calculer les Σq_{int} et Σq_{sup}. En revanche il est impossible d'aller plus loin si on ne connait pas certaines caractéristiques de $\vec{E}$

Donc, le calcul de $\vec{E}$ crée par une distribution de charges (en utilisant le Th. de Gauss) impose qu'on puisse dire "quelque chose" de l'allure de $\vec{E}$ et qu'on ne choisisse pas S fermée au hasard!

$\Rightarrow$ **<u>La distribution de charges doit avoir des éléments de symétrie</u>**
$\Rightarrow$ **<u>La surface S fermée doit avoir les mêmes symétries</u>**

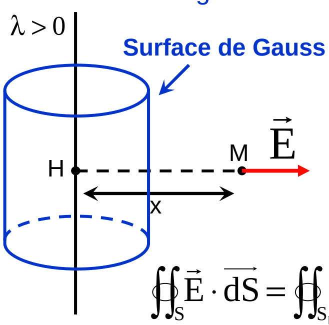
Il est alors possible de transformer $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS}$

pour la rendre exploitable

<u>Remarque</u> : <u>Le principe de symétrie de Pierre Curie</u> affirme que « *Lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets.* La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes»

<u>Exemples de calcul d'un champ électrique</u>

Fil chargé uniformément et infiniment long



Symétrie de révolution autour de l'axe du fil :

- $\vec{E}$ toujours $\perp$ au fil
- $\|\vec{E}\|$ est C^{te} si $x = C^{te}$

$\Rightarrow$ **Surface S fermée = cylindre d'axe le fil, de rayon x et de hauteur h**

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_{S_{bases}} \quad + \oiint_{S_{lat}}$$

- $\oiint_{S_{bases}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0 \quad$ car $\vec{E} \perp \vec{dS}$ en tout point
- $\oiint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_{S_{lat}} E\cdot dS \quad$ car $\vec{E} \,//\, \vec{dS}$ en tout point

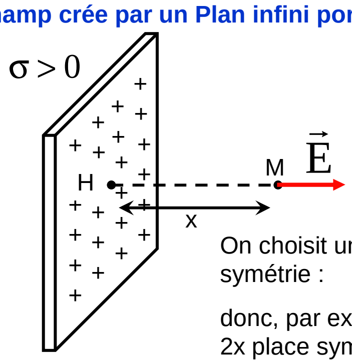
$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \underbrace{E \oiint_{S_{lat}}}_{\text{car } \|\vec{E}\| \text{ est } C^{te} \text{ si } x = C^{te}} dS = E.2.\pi.x.h$$

Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_{surf}}{2\varepsilon_0}$

- $q_{surf} = 0$
- $\sum q_{int} = \lambda h$

$$\Rightarrow E.2.\pi.x.h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2.\pi.x.\varepsilon_0}}$$

Champ crée par un Plan infini portant une densité de charge uniforme : $\sigma = \frac{dq}{dS}$

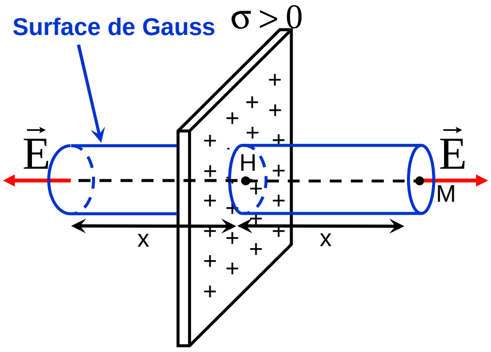


- $\vec{E}$ forcément $\perp$ au plan
- $\|\vec{E}\|$ est C^{te} $\forall$ M tel que $HM = x = C^{te}$

Le plan chargé est un plan symétrie pour $\vec{E}$

On choisit une surface fermée ayant le plan chargé comme plan de symétrie :

donc, par exemple, un cylindre d'axe $\perp$ au plan chargé, de longueur 2x place symétriquement de part etd'autre du plan chargé.



$$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{bases}} + \iint_{S_{lat}}$$

- $\iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$ car $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$
- $\iint_{S_{bases}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{bases}} E\cdot dS$ car $\vec{E} // \overrightarrow{dS}$

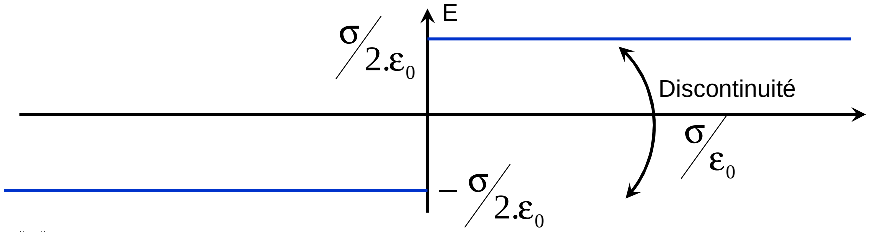
$$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \underbrace{E\iint_{S_{bases}} dS}_{\text{car } \|\vec{E}\| \text{ est } C^{te} \text{ si } x = C^{te}} = E.2.S$$

Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_{surf}}{2\varepsilon_0}$

- $q_{surf} = 0$
- $\sum q_{int} = \sigma S$

$$\text{"Th. Gauss"} \Rightarrow E.2.S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}}$$

Il s'agit ici de la norme de $\vec{E}$

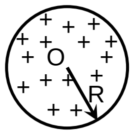


$\left\|\vec{E}\right\|$ ne dépend pas de la distance au plan

Il y a une discontinuité de $\vec{E}$ à la traversé du plan chargé : on passe de $\vec{E}$ à $-\vec{E}$

Champ crée dans tout l'espace par une sphère (Σ) de rayon R, remplie de charges avec une densité en volume uniforme : $\rho = \dfrac{dq}{d\tau} = C^{te}$

$\rho > 0$



Nous utiliserons ici les coordonnées sphériques

$$\forall \theta, \varphi : \rho = 0 \quad r > R$$

$$\rho = C^{te} \quad r < R$$

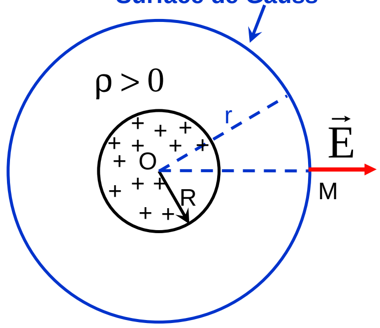
Les considération de symétrie donnent :

$$\Rightarrow \vec{E} \text{ est radial}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = C^{te} \text{ si } OM = r = C^{te}$$

On choisit une surface fermée pour appliquer le théorème de Gauss ayant donc une sphère de centre O et de rayon OM=r.

Surface de Gauss



Cas r > R

$$\bullet \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_S E \cdot dS \quad \text{car } \vec{E} // \vec{dS}$$

$$= E \oiint_S dS \quad \text{car } \left\|\vec{E}\right\| = C^{te} \text{ à } r = C^{te}$$

$$= E.4\pi r^2$$

$$\bullet \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = Q$$

$$\bullet \sum q_{sup} = 0$$

$$\text{"Th. Gauss"} \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Tout se passe (pour r>R) comme si la charge était en O

$$\boxed{\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}} \quad \text{(en norme)}$$

Potentiel V $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = -E\cdot dr$

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} E\cdot dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$\boxed{\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{avec } V(\infty) = 0}$$

Même résultat (pour r>R) que si on a une charge ponctuelle Q en 0

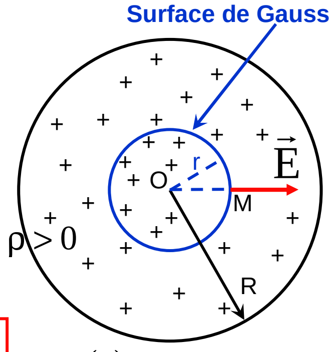
Cas r = R

Pas de charges superficielles sur la "surface de Gauss" car **ρ en volume**.

⇒ Le calcul précédent s'applique avec r=R

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}} \qquad \boxed{V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}}$$

Cas r < R



- De même que précédement

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = E.4\pi r^2$$

- $\sum q_{int} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$
- $\sum q_{sup} = 0$ car ρ est en volume seulement

$$\text{"Th. Gauss"} \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}} \quad \Rightarrow E(0) = 0$$

$$E(R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} \longrightarrow$$ Il y a continuité de E

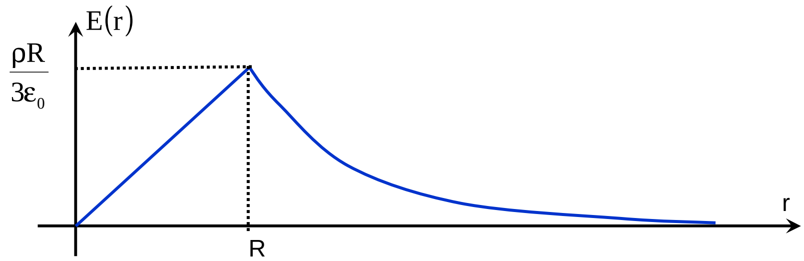
Potentiel V

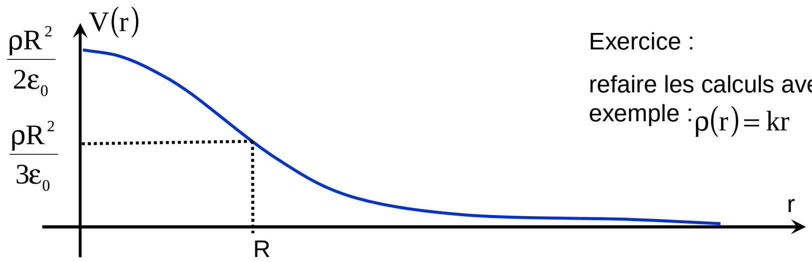
L'expression du champ électrique trouvé plus haut n'est valable que sur le domaine r ∈ [0,R[, d'où

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_R^r E dr$$

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

mais $V(R)$ est connu $\Rightarrow V(R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2$ $\boxed{\Rightarrow V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)}$





Exercice :

refaire les calculs avec par exemple : $\rho(r) = kr \quad k = C^{te}$

V-4 <u>Formes Locales du théorème de Gauss</u>

$$\boxed{\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int.}}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_{surf.}}{2\varepsilon_0}}$$

<u>Théorème de la divergence</u>

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_V \operatorname{div}\left(\vec{E}\right) d\tau$$

Théorème d'Ostrogradsky

<u>Où div($\vec{E}$) est un scalaire</u> qui, en coordonnées cartésiennes s'exprime :

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Supposons que les charges soient réparties de façon continue :

$\forall$ Le pt M, on aura dans l'élément de volume $d\tau$ centré e sur M une charge $\rho d\tau$

d'où $\sum q_{int} = \int_V \rho d\tau$ **(pas de q_{surf})** $\xrightarrow{\text{Th. de Gauss}}$ $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d\tau$

En combinant les deux écritures du flux, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Th. Gauss : } \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau \\ \text{Th. de la divergence : } \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \int_V \mathrm{div}(\vec{E}) d\tau \end{array}\right\} \Rightarrow \int_V \mathrm{div}(\vec{E}) d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau$$

Cette relation est vraie $\forall S \Rightarrow$

Forme locale du théorème de Gauss $\boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Equation de Poisson

Autre forme utilisant le potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(\vec{E}) = -\mathrm{div}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)\right] = -\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(\vec{E}) = -\Delta V \quad \Rightarrow \quad \text{Laplacien de V}$$

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

Equation de Poisson

Remarques :

1 - Dans un espace sans charges : $\rho = 0$

$\Delta V = 0 \rightarrow$ Equation de Laplace

En dehors des charges :

→ Le champ $\vec{E}$ est à divergence nul ⇔ c-à-d à flux conservatif

→ Le laplacien du potentiel est nul

2 – La relation $\Delta V=0$ est une équation différentielle. C'est le même type d'équation qui permet de décrire un écoulement de fluide sans tourbillons (c-à-d irrotationnel)