

Université des Sciences et de la Technologie  
Houari Boumediene

*Faculté de Physique*

# ELECTROMAGNETISME

**Cours & Exercices**

*Pr. DJELOUAH Hakim*

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène  
**Faculté de Physique**

**Licence de Physique - L2 - S4**

Module : Physique 4

# Electromagnétisme

Cours & Exercices

H. Djelouah

*Année Universitaire 2012-2013*

## Programme

### Module Phys 4 - **Electromagnétisme**

Domaine SM, Licence de Physique, Deuxième année, Semestre 4, UEF 41.

Volume horaire	Semestriel	Hebdomadaire
Cours	18 heures	1h30mn
Travaux dirigés	18 heures	1h30mn
Total	36 heures	3h

- Rappels d'analyse vectorielle (1 h 30) : Opérateurs différentiels et intégraux (divergence, rotationnel, gradient, flux, circulation).
- Électrostatique (3 heures) :
  - Rappels : Interaction électrique. Loi de Coulomb dans le vide. Champ électrique. Dipôle. Différence entre diélectriques et conducteurs.
  - Théorème de Gauss : Flux du champ électrique. Théorème de Gauss (démonstration). Applications du théorème de Gauss.
  - Potentiel électrique : Potentiel et champ électrique.
  - Équations de Laplace et de Poisson.
  - Énergie : énergie interne d'une distribution de charges. Énergie potentielle d'un dipôle dans un champ électrique uniforme.
  - Notions sur la polarisation de la matière.
- Électromagnétisme :(4 h 30) :
  - Rappels d'électrocinétique : Conduction électrique. Intensité du courant électrique. Vecteur densité de courant. Loi d'Ohm Microscopique.
  - Champ magnétique : Force de Lorentz. Théorème d'Ampère. Lignes de champ. Loi de Biot-Savart. Notions sur l'aimantation de la matière.
  - L'induction magnétique : Flux du champ magnétique. Loi d'induction électromagnétique. Loi de Lenz. Force électro-motrice induite.
- Équations de Maxwell (6 h)
  - Équations locales des états stationnaires : Le champ électrostatique. L'excitation électrostatique. Le champ magnétique, l'excitation magnétique, le potentiel vecteur. Conservation de la charge électrique. Les équations des états stationnaires.
  - Équations locales des états quasi stationnaires. L'approximation des états quasi stationnaires.
  - Équations locales des régimes variables. Caractéristiques des régimes variables. Équation de conservation de la charge électrique. Le courant de déplacement de Maxwell. L'équation de Maxwell-Ampère.
  - Les équations de Maxwell : Forme générale. Équations dans le vide (champs et potentiels). Équations dans le vide en l'absence de charges et de courants.
  - Les relations de passage à un interface entre deux milieux.
- Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide (3h)
  - Équation de propagation. Vitesse de propagation dans le vide. Impédance caractéristique.
  - Polarisation de l'onde électromagnétique.

# Avant-Propos

## Au sujet de ce manuel

Ce manuel a été écrit à l'intention des étudiants de deuxième année des filières scientifiques et techniques des universités et écoles d'ingénieurs d'Algérie. Il correspond au programme officiel du module *Electromagnétisme* enseigné en deuxième année (L2-S4) de la filière *SM-Sciences de la Matière* option *Physique*.

Les objectifs assignés par ce programme portent sur l'approfondissement et la consolidation des notions d'électromagnétisme acquises par les étudiants au cours de leur première année à l'université. Ce programme est destiné également à fournir aux étudiants les outils physiques et mathématiques pré requis par les modules de troisième année consacrés à l'électromagnétisme et l'optique ainsi qu'à la relativité restreinte. Ce manuel essaie de répondre au mieux aux recommandations du programme officiel.

Afin de combler les lacunes éventuelles des étudiants venant de première année, il nous a semblé nécessaire de consacrer le premier chapitre à l'analyse vectorielle pour introduire les opérateurs utilisés classiquement en électromagnétisme. Les exercices de ce chapitre ont pour but d'initier très rapidement les étudiants à l'utilisation de ces opérateurs dans différents systèmes de coordonnées.

L'électrostatique est étudiée dans le second chapitre. Les phénomènes électrostatiques sont introduits à partir de la loi de Coulomb et du principe de superposition. Le théorème de Gauss est démontré en calculant la divergence du champ électrique défini à partir de la loi de Coulomb ; nous avons préféré cette démarche à la méthode qui utilise la notion d'angle solide car elle permet aux étudiants de manipuler les opérateurs vectoriels et de saisir la notion de localité des expressions. Les exercices portent essentiellement sur la résolution de l'équation de Laplace et de l'équation de Poisson dans des configurations où la symétrie permet d'obtenir des équations aux dérivées partielles qui s'expriment en fonction d'une seule variable.

Le chapitre suivant consacré à la magnétostatique débute par une définition du vecteur densité de courant. La décomposition de la force de Lorentz en deux composantes permet de définir le champ magnétique. Nous avons préféré commencer ce chapitre par le théorème d'Ampère ; la loi de Biot-Savart est décrite comme une conséquence des propriétés du champ magnétique et du potentiel vecteur associé.

Le régime variable introduit les équations de Maxwell sous la forme d'une généralisation des équations locales obtenues en régime stationnaire. Après une présentation des phénomènes d'induction électromagnétique, la notion de courant de déplacement est introduite comme une nécessité permettant de respecter la relation de continuité. Les équations aux dérivées partielles pour le champ électrique et le champ magnétique sont obtenues à partir des équations de Maxwell. Les potentiels, scalaire et vecteur, ainsi que la condition de jauge sont également présentés dans ce chapitre qui se termine par l'approximation du régime quasi-stationnaire.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide est traitée dans le chapitre suivant. Pour respecter les recommandations du programme officiel, les notions de rayonnement et de potentiels retardés ne sont pas abordées.

Enfin, les propriétés électromagnétiques des matériaux sont présentées assez brièvement dans le dernier chapitre.

La première annexe présente, sans démonstration, les différents opérateurs dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques. Le principe de symétrie de Curie est

Semaine	Cours	Travaux Dirigés
1	Calcul vectoriel	Systèmes de coordonnées, Symétries
2	Electrostatique	Calcul vectoriel
3	Electrostatique	Electrostatique
4	Magnétostatique	Electrostatique
5	Magnétostatique	Magnétostatique
6	Régime variable	Magnétostatique
7	Régime variable	Régime variable
8	Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Régime variable
9	Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Régime variable
10	Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide
11	Milieux matériels	Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide
12	Milieux matériels	Milieux matériels

TABLE 1: Proposition de progression des enseignements

énoncé dans l'annexe suivante et les propriétés de symétrie du champ électromagnétique sont énoncées sans démonstration.

Enfin, une bibliographie sommaire présente les principaux ouvrages utilisés pour la confection de ce manuel.

### Gestion du temps pédagogique

Le contenu de ce programme est prévu pour être enseigné pendant un semestre de 14 semaines, à raison d'un cours hebdomadaire de 1h30mn et d'une séance de travaux dirigés de 1h30mn par semaine. Toutefois, pour diverses raisons, la durée réelle de l'enseignement par semestre est de 12-13 semaines. Afin de couvrir la plus grande partie du programme officiel pendant cette durée, une gestion rigoureuse du temps pédagogique ainsi qu'une coordination-synchronisation entre les cours et les travaux dirigés sont indispensables. Nous recommandons la progression ci-dessus (Tableau 1) pour une durée *réelle* du semestre (12-13 semaines).

Ce manuel est le fruit d'une pratique pédagogique dans cette matière de plusieurs années et résulte de longues discussions avec les collègues qui ont eu à assurer cet enseignement. Les exercices proposés dans ce manuel ont été confectionnés à partir d'une compilation des séries d'exercices et des sujets d'examens proposés par les collègues qui ont enseigné le module *Électromagnétisme* à la Faculté de Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

# Table des symboles

Symbole	Unités	Description
$c$	$\text{m s}^{-1}$	Vitesse de la lumière dans le vide
$\varepsilon_0$	$\text{F m}^{-1}$	Permittivité du vide
$\mu_0$	$\text{H m}^{-1}$	Perméabilité du vide
$\varepsilon_r$		Permittivité relative
$\varepsilon$	$\text{F m}^{-1}$	Permittivité absolue
$\mu_r$		Perméabilité relative
$\mu$	$\text{H m}^{-1}$	Perméabilité absolue
$\gamma$	$\text{S m}^{-1}$	Conductivité électrique
$\rho$	$\text{C m}^{-3}$	Densité volumique de charges électriques
$\sigma$	$\text{C m}^{-2}$	Densité surfacique de charges électriques
$\rho_P$	$\text{C m}^{-3}$	Densité volumique de charges de polarisation
$\vec{j}$	$\text{A m}^{-2}$	Vecteur densité volumique de courant
$\vec{j}_D$	$\text{A m}^{-2}$	Vecteur densité volumique de courant de déplacement
$\vec{j}_T$	$\text{A m}^{-2}$	Vecteur densité volumique de courant total
$\vec{j}_S$	$\text{A m}^{-1}$	Vecteur densité de courant surfacique
$\vec{E}$	$\text{V m}^{-1}$	Champ électrique
$\vec{B}$	T	Champ magnétique
$\vec{D}$	$\text{C m}^{-2}$	Vecteur excitation électrique
$\vec{H}$	$\text{A m}^{-1}$	Vecteur excitation magnétique
$\vec{A}$	$\text{Wb m}^{-1}$	Potentiel vecteur
$U$	V	Potentiel scalaire



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Éléments d'analyse vectorielle</b>	<b>1</b>
1.1	Champ scalaire - Champ vectoriel . . . . .	1
1.2	Gradient d'un champ scalaire . . . . .	1
1.3	Divergence d'un champ vectoriel . . . . .	1
1.4	Rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .	1
1.5	Laplacien scalaire . . . . .	2
1.6	Laplacien vectoriel . . . . .	2
1.7	Opérateur nabla . . . . .	2
1.8	Théorème de Stokes-Théorème de Gauss . . . . .	3
1.8.1	Circulation d'un champ vectoriel . . . . .	3
1.8.2	Flux d'un champ vectoriel . . . . .	3
1.8.3	Théorème de Stockes . . . . .	3
1.8.4	Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence) . .	4
1.9	Exercice corrigé . . . . .	4
1.10	Exercices . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Electrostatique</b>	<b>7</b>
2.1	La loi de Coulomb . . . . .	7
2.2	Le champ électrique . . . . .	7
2.3	Principe de superposition . . . . .	8
2.3.1	Champ électrique créé par une distribution linéique de charges élec- triques . . . . .	8
2.3.2	Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques . . . . .	8
2.3.3	Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques . . . . .	8
2.4	Propriétés du champ électrostatique . . . . .	9
2.4.1	Le potentiel électrostatique . . . . .	9
2.4.2	Le théorème de Gauss . . . . .	10
2.4.3	Le vecteur excitation électrique $\vec{D}$ . . . . .	12
2.4.4	Equation de Poisson - Equation de Laplace . . . . .	12
2.5	En résumé . . . . .	13
2.6	Exercices . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Electrocinétique et magnétostatique</b>	<b>17</b>
3.1	Electrocinétique - Vecteur densité de courant . . . . .	17
3.2	Magnétostatique . . . . .	18



3.2.1	Introduction . . . . .	18
3.2.2	Le champ magnétique . . . . .	18
3.2.3	Le vecteur excitation magnétique . . . . .	19
3.2.4	Potentiel vecteur $\vec{A}$ . . . . .	20
3.2.5	La loi de Biot-Savart . . . . .	21
3.3	En résumé . . . . .	25
3.4	Exercices . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Le régime variable</b>	<b>29</b>
4.1	Introduction . . . . .	29
4.2	L'induction électromagnétique . . . . .	30
4.2.1	La loi de Lenz . . . . .	30
4.2.2	Loi de Faraday . . . . .	30
4.2.3	Equation de Maxwell-Faraday . . . . .	30
4.3	Le théorème de Maxwell-Ampère . . . . .	31
4.3.1	Le phénomène de capacité . . . . .	31
4.3.2	Le vecteur densité de courant de déplacement . . . . .	32
4.3.3	Le théorème de Maxwell-Ampère . . . . .	33
4.3.4	Equation de continuité . . . . .	33
4.4	Les équations de Maxwell . . . . .	34
4.4.1	Les hypothèses de Maxwell . . . . .	34
4.4.2	En résumé . . . . .	35
4.5	Equations pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ . . . . .	35
4.6	Introduction des potentiels . . . . .	36
4.6.1	Potentiel scalaire. Potentiel vecteur . . . . .	36
4.6.2	Equations des potentiels. Jauge de Lorenz . . . . .	37
4.7	Le champ électromoteur . . . . .	39
4.7.1	f.é.m induite dans un circuit . . . . .	39
4.7.2	Induction de Lorentz, Induction de Neuman . . . . .	39
4.8	Approximation des états quasi-stationnaires . . . . .	40
4.8.1	Introduction . . . . .	40
4.8.2	Phénomène d'induction . . . . .	40
4.8.3	Phénomène de capacité . . . . .	40
4.8.4	Phénomène de propagation . . . . .	40
4.8.5	Equations des états quasi-stationnaires . . . . .	40
4.9	Exercices . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide</b>	<b>47</b>
5.1	Equations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ . . . . .	47
5.2	L'onde plane progressive sinusoïdale . . . . .	47
5.2.1	Relation de dispersion . . . . .	47
5.2.2	Structure de l'onde uniforme plane . . . . .	48
5.3	Polarisation . . . . .	49
5.3.1	Onde de polarisation rectiligne . . . . .	49
5.3.2	Onde de polarisation quelconque . . . . .	50
5.4	Energie électromagnétique : vecteur de Poynting . . . . .	51
5.4.1	Onde de forme spatiale et temporelle quelconques . . . . .	51
5.4.2	Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale . . . . .	52

---

5.5	Relations de passage . . . . .	53
5.6	Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait . . . . .	54
5.7	Exercices . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Les équations de Maxwell dans les milieux</b>	<b>63</b>
6.1	Propriétés électromagnétiques des milieux matériels . . . . .	63
6.1.1	Polarisation d'un milieu matériel . . . . .	63
6.1.2	Conducteurs . . . . .	66
6.1.3	Milieux aimantés . . . . .	67
6.1.4	Equations de Maxwell dans les milieux matériels, homogènes, linéaires et isotopes . . . . .	70
6.2	Relations de passage . . . . .	71
6.3	Propagation dans les milieux diélectriques . . . . .	71
6.4	Exercices . . . . .	72
<b>A</b>	<b>Opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Propriétés de symétrie</b>	<b>81</b>
B.1	Le principe de Curie . . . . .	81
B.2	Le champ électrostatique . . . . .	81
B.3	Le champ magnétostatique . . . . .	81
B.4	Le potentiel vecteur . . . . .	81
	<b>Bibliographie</b>	<b>83</b>



# Chapitre 1

## Eléments d'analyse vectorielle

### 1.1 Champ scalaire - Champ vectoriel

Soit un trièdre orthonormé  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et  $M$  un point de l'espace, de coordonnées  $(x, y, z)$  :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (1.1)$$

La fonction  $f(M)$  est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z) \quad (1.2)$$

Le vecteur  $\vec{v}(M)$  est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = v_x(x, y, z) \vec{e}_x + v_y(x, y, z) \vec{e}_y + v_z(x, y, z) \vec{e}_z \quad (1.3)$$

### 1.2 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient (noté  $\overrightarrow{grad}$ ) est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ , et  $\vec{e}_z$  les dérivées partielles de  $f(M)$  par rapport à  $x, y$  et  $z$  respectivement :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.4)$$

### 1.3 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence (notée  $div$ ) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle  $\vec{v}(M)$  de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.5)$$

### 1.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel noté ( $\overrightarrow{rot}$ ) d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle de point définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \quad (1.6)$$

## 1.5 Laplacien scalaire

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point (noté  $lap$  ou  $\Delta$ ) est par définition un champ scalaire défini par :

$$lap(f) = \Delta f = \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}}(f)] \quad (1.7)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit :

$$lap(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

## 1.6 Laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel (noté  $\overrightarrow{lap}$  ou  $\overrightarrow{\Delta}$ ) d'un champ vectoriel  $\vec{v}$  est un champ vectoriel défini par :

$$\overrightarrow{lap}(\vec{v}) = \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\vec{v})] - \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel a pour composantes :

$$\overrightarrow{lap}(\vec{v}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

## 1.7 Opérateur nabla

Pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels précédemment définis, on introduit un vecteur symbolique appelé opérateur nabla et défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.11)$$

Les opérateurs vectoriels s'écrivent parfois à l'aide de l'opérateur nabla sous les formes respectives suivantes :

- le gradient d'un champ scalaire  $f$  est noté

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.12)$$

- la divergence d'un champ vectoriel est notée

$$\text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

- le rotationnel d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \quad (1.14)$$

– le laplacien scalaire d'un champ scalaire est noté

$$\text{lap}(f) = \Delta f = \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2(f) \quad (1.15)$$

$\nabla^2$  se lit "del de".

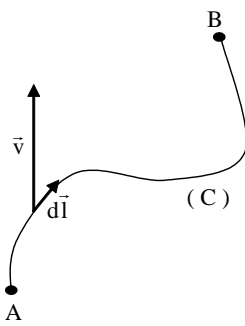
– le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel est noté

$$\nabla^2 \vec{v} = \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\vec{v})] - \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})] = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) - \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{v}] \quad (1.16)$$

## 1.8 Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

### 1.8.1 Circulation d'un champ vectoriel

On définit la circulation d'un vecteur  $\vec{v}$  le long d'un contour  $(C)$ , par l'intégrale curviligne :



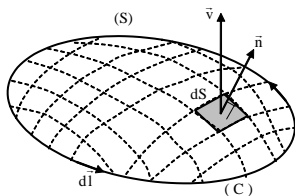
$$C_{\overrightarrow{AB}}(\vec{v}) = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (1.17)$$

La circulation de long d'un contour fermé est notée :

$$C(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (1.18)$$

### 1.8.2 Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur  $\vec{v}$  à travers une surface  $(S)$  par l'intégrale double :



$$\phi_{/(S)}(\vec{v}) = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1.19)$$

Lorsque la surface  $(S)$  est fermée, le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

### 1.8.3 Théorème de Stockes

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé  $(C)$  limitant une surface  $(S)$  est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$C(\vec{v}) = \phi_{/(S)}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) \quad (1.20)$$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (1.21)$$

Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.

### 1.8.4 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée ( $S$ ) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume ( $\tau$ ) limité par la surface fermée ( $S$ ) :

$$\oint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{(\tau)} \operatorname{div}(\vec{v}) \, d\tau \quad (1.22)$$

## 1.9 Exercice corrigé

Soit deux points  $M$  et  $P$  de coordonnées respectives  $M(x, y, z)$  et  $P(x_P, y_P, z_P)$ .

1. Calculer  $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$  et  $r = \|\overrightarrow{PM}\|$ .
2. Calculer  $\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right)$  au voisinage de  $M$ .
3. Calculer  $\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$  au voisinage de  $M$ .
4. Calculer  $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$  au voisinage de  $M$ .

*Réponses*

1.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x - x_P) \vec{e}_x + (y - y_P) \vec{e}_y + (z - z_P) \vec{e}_z \\ r &= \left[ (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

2.

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{(x - x_P) \vec{e}_x + (y - y_P) \vec{e}_y + (z - z_P) \vec{e}_z}{\left[ (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 \right]^{3/2}} = - \frac{\vec{r}}{r^3}$$

3. En tenant compte du résultat précédent et sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \vec{0}$$

4.

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

## 1.10 Exercices

**Exercice 1 :** On donne le champ  $\vec{F} = (y - 1) \vec{e}_x + 2x \vec{e}_y$ ; trouver le vecteur  $\vec{F}$  au point  $(2, 2, 1)$  et sa projection sur  $\vec{B}$ , si  $\vec{B} = 5 \vec{e}_x - \vec{e}_y + 2 \vec{e}_z$ .

**Exercice 2 :** Soient les vecteurs  $\vec{A} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$ ,  $\vec{B} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$  et  $\vec{C} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$  :

1. Calculer  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$  et comparer avec  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ .
2. Calculer  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  et comparer avec  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ .

**Exercice 3 :** Exprimer en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , le vecteur  $\vec{A}$  donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{A} = y \vec{e}_x + x \vec{e}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_z$$

**Exercice 4 :** Soit un vecteur de module 10 unités dirigé de l'origine vers le point  $(5, 5\pi/4, 0)$ , en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Exprimer ce vecteur en coordonnées cartésiennes.

**Exercice 5 :** Exprimer le vecteur  $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$  en coordonnées cylindriques  $(A_r, A_\theta, A_z)$ .

**Exercice 6 :** Exprimer le vecteur  $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$  en coordonnées cartésiennes.

**Exercice 7 :** Exprimer en coordonnées cartésiennes le vecteur  $\vec{F} = r^{-1} \vec{e}_r$  donné en coordonnées sphériques.

**Exercice 8 :** Etablir, à partir des relations de définition, les formules de composition :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(f + g) &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \overrightarrow{\text{grad}}(g) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f \cdot g) &= f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(f) \end{aligned}$$

**Exercice 9 :** Montrer que  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  est normal en chaque point à la surface  $f = \text{constante}$  passant par ce point.

**Exercice 10 :** Montrer que la circulation d'un vecteur gradient le long d'un contour fermé est nulle.

**Exercice 11 :** Etablir les formules de composition :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{u} + \vec{v}) &= \text{div}(\vec{u}) + \text{div}(\vec{v}) \\ \text{div}(m\vec{v}) &= m \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(m) \\ \text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) &= -\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

**Exercice 12 :** On donne  $\vec{A} = e^{-y}(\cos x \vec{e}_x - \sin x \vec{e}_y)$ ; chercher  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ .

**Exercice 13 :** On donne  $\vec{A} = x^2 \vec{e}_x + yz \vec{e}_y + xy \vec{e}_z$ ; chercher  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ .

**Exercice 14 :** On donne  $\vec{A} = 5x^2 \left(\sin \frac{\pi x}{2}\right) \vec{e}_x$ ; calculer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  pour  $x = 1$ .

**Exercice 15 :** On donne  $\vec{A} = (x^2 + y^2)^{-1/2} \vec{e}_x$ ; calculer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  au point de coordonnées  $(2, 2, 0)$ .

**Exercice 16 :** On donne  $\vec{A} = r \sin \theta \vec{e}_r + 2r \cos \theta \vec{e}_\theta + 2z^2 \vec{e}_z$ , chercher  $\text{div} \vec{A}$ .

**Exercice 17 :** Etablir la formule de composition :

$$\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

**Exercice 18 :** Démontrer les relations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) &= 0 \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$



**Exercice 19 :** Etablir les lois de composition :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}(\vec{u} + \vec{v}) &= \overrightarrow{rot}(\vec{u}) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \\ \overrightarrow{rot}(\lambda \vec{v}) &= \lambda \overrightarrow{rot}(\vec{v}) - \vec{v} \times \overrightarrow{grad}(\lambda)\end{aligned}$$

**Exercice 20 :** Démontrer la formule de Kelvin :

$$\oint_{(C)} f \, d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{\nabla} f \times d\vec{S}$$

où  $(S)$  est la surface orientée limitée par la courbe fermée  $(C)$

**Exercice 21 :** Soit un champ de vecteurs,  $\vec{A} = (y \cos ax) \vec{e}_x + (y + e^x) \vec{e}_z$ ; calculer  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  à l'origine.

**Exercice 22 :** Etant donné le champ de vecteurs  $\vec{A} = 5r \sin \theta \vec{e}_z$ , en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ ; trouver  $\overrightarrow{rot} \vec{A}$  au point  $(2, \pi, 0)$ .

**Exercice 23 :** Etant donné le champ de vecteurs  $\vec{A} = 5e^{-r} \cos \theta \vec{e}_r - 5 \cos \theta \vec{e}_z$ , en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , trouver  $\overrightarrow{rot} \vec{A}$  au point  $(2, 3\pi/2, 0)$ .

**Exercice 24 :** Etant donné le champ de vecteurs  $\vec{A} = 10 \sin \phi \vec{e}_\phi$ , en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , trouver  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  au point  $(2, \pi/2, 0)$ .

**Exercice 25 :** Soit un champ de vecteurs  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  où le vecteur d'onde  $\vec{k}$  a pour composantes  $k_x, k_y, k_z$ . Le vecteur  $\vec{A}_0$  (indépendant de  $\vec{r}$  et  $t$ ) a pour composantes  $A_{0x}, A_{0y}, A_{0z}$ . Démontrer les relations :

$$\begin{aligned}div(\vec{A}) &= -j\vec{k} \cdot \vec{A} \\ \overrightarrow{rot}(\vec{A}) &= -j\vec{k} \times \vec{A} \\ \nabla^2 \vec{A} &= -k^2 \vec{A}\end{aligned}$$

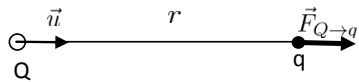
**Exercice 26 :** Soit le champ scalaire  $V(\vec{r}, t) = V_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  (avec les mêmes notations que pour l'exercice précédent). Montrer que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{grad}(V) &= -j\vec{k} V \\ \nabla^2 V &= -k^2 V\end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Electrostatique

### 2.1 La loi de Coulomb



Deux particules chargées,  $q$  et  $Q$  placées dans le vide exercent l'une sur l'autre une force appelée force d'interaction électrique. La force exercée par la charge  $Q$  sur la charge  $q$  est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{q Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (2.1)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire qui pointe de la position de  $Q$  vers la position de  $q$  ;  $r$  représente la distance séparant les deux charges et

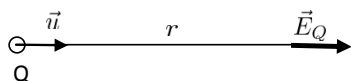
$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^{-9}} = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (2.2)$$

est la permittivité du vide.

### 2.2 Le champ électrique

La présence de la charge  $Q$  dans une région de l'espace crée dans cette région un champ électrique noté  $\vec{E}_Q$  qui est mis en évidence par la force agissant sur la charge  $q$  ; ce qui peut se traduire par la relation :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q \vec{E}_Q \quad (2.3)$$



Tenant compte de la loi de Coulomb, le champ électrique créé par la charge  $Q$ , dans une direction donnée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  et à une distance  $r$ , est alors défini par :

$$\vec{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (2.4)$$

Dans le cas des phénomènes indépendants du temps ou stationnaires, le champ électrique est appelé champ électrostatique.

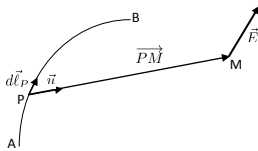
## 2.3 Principe de superposition

La présence de plusieurs charges  $Q_i$  crée un champ électrique résultant égal à la somme vectorielle des champs électriques créés individuellement par chacune de ces charges :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_{Q_i} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.5)$$

Le principe de superposition peut être généralisé au cas d'une distribution continue de charges. Dans ce cas on considère que la région occupée par les charges est constituée d'un ensemble de "petits" éléments chargés et la sommation peut alors s'écrire sous la forme d'une intégrale.

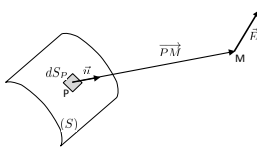
### 2.3.1 Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques



En utilisant le principe de superposition, on considère de petits éléments de la distribution de charges de longueur  $d\ell_P$ , situés aux points  $P$  portant chacun une charge  $dQ = \lambda(P) d\ell_P$  où  $\lambda$  est la densité linéique locale de charge électrique. Le champ électrique créé par une distribution linéique de charge de longueur  $\ell$  est donné par :

$$\vec{E}(M) = \int_{(\ell)} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\ell_P \quad (2.6)$$

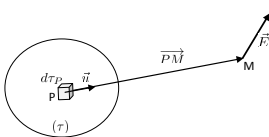
### 2.3.2 Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques



Dans ce cas on considère de petits éléments de la distribution surfacique de charges de surface  $dS_P$ , situés aux points  $P$  et portant chacun une charge  $dQ = \sigma(P) dS_P$  où  $\sigma(P)$  est la densité surfacique locale de charge électrique. Le champ électrique créé par une distribution surfacique de charge de surface  $S$  est donné par :

$$\vec{E}(M) = \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dS_P \quad (2.7)$$

### 2.3.3 Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques



Dans le cas d'une distribution continue de charges électriques dans un volume  $(\tau)$  avec une densité volumique de charge électrique  $\rho$ , on considère de petits éléments de la distribution volumique de charges de volume  $d\tau_P$ , situés aux points  $P$  et portant chacun une charge  $dQ = \rho(P) d\tau_P$ . Le champ électrique créé par cette distribution volumique de charge est donné par :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau_P \quad (2.8)$$

## 2.4 Propriétés du champ électrostatique

### 2.4.1 Le potentiel électrostatique

Calculons le rotationnel du champ électrique  $\vec{E}(M)$  donné par la précédente équation.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \vec{\nabla} \times \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau_P \quad (2.9)$$

Comme on calcule le rotationnel au voisinage du point  $M$ , les dérivées partielles se calculent par rapport aux coordonnées  $(x, y, z)$  du point  $M$ , tandis que l'intégration se fait pour des éléments de volume portant les charges et situés aux points  $P$ ; l'intégration de volume se fait donc par rapport aux coordonnées  $(x_P, y_P, z_P)$  du point  $P$ . De ce fait, l'opérateur  $\vec{\nabla} \times$  peut être introduit dans l'intégrale et on obtient alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau_P \right] \quad (2.10)$$

les éléments  $\rho(P)$  et  $d\tau_P$  sont indépendants de la position du point  $M$  et ne dépendent que de  $P$ , il s'en suit que l'équation précédente peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \right] d\tau_P \quad (2.11)$$

Or nous avons montré dans l'exercice résolu à la fin du premier chapitre que :

$$\vec{\nabla} \times \left[ \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \right] = \vec{0} \quad (2.12)$$

Il s'en suit le résultat fondamental :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (2.13)$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est nul (voir exercice du premier chapitre, on en déduit qu'il existe un champ scalaire appelé potentiel électrostatique  $U$  tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U \quad (2.14)$$

A partir du résultat précédent on peut aisément montrer que :

$$dU = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.15)$$

Par intégration, on peut montrer que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$U(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.16)$$

On dit que le champ électrostatique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel. On peut écrire de manière équivalente que le champ électrostatique est à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait la relation intégrale suivante (voir exercice du premier chapitre) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (2.17)$$

où  $(\Gamma)$  est un contour fermé quelconque orienté.

Le principe de superposition peut être généralisé au calcul du potentiel électrostatique.

– Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète de charges

$$U(M) = \sum_i U_{Q_i} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (2.18)$$

– Potentiel électrostatique créé par une distribution linéique de charges

$$U(M) = \int_{(\ell)} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} d\ell \quad (2.19)$$

– Potentiel électrostatique créé par une distribution surfacique de charges

$$U(M) = \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} dS \quad (2.20)$$

– Potentiel électrostatique créé par une distribution volumique de charges

$$U(M) = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} d\tau \quad (2.21)$$

## 2.4.2 Le théorème de Gauss

Le champ électrostatique possède des propriétés très intéressantes. En effet considérons une charge ponctuelle  $Q$  repérée par rapport à un référentiel par le vecteur  $\vec{r}_P$  qui crée en chaque point  $M(x, y, z)$  de l'espace qui l'entoure, un champ  $\vec{E}(M)$  donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (2.22)$$

Comme nous pouvons le constater, le champ  $\vec{E}(M)$  possède une singularité en  $P$ . Considérons une surface fermée  $(S)$  telle que la charge  $Q$  se trouve à l'extérieur de cette surface. À l'intérieur du volume  $(\tau)$  délimité par la surface  $(S)$  le champ  $\vec{E}(M)$  ne possède pas de singularité. Nous pouvons donc calculer la divergence de  $\vec{E}(M)$ . Or nous avons montré dans l'exercice résolu [ page 4 ] que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \right] = 0 \quad (2.23)$$

Il s'en suit le résultat :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.24)$$

Le flux à travers cette surface fermée est nul car :

$$\phi_E = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau = 0 \quad (2.25)$$

Par contre, lorsque la charge  $Q$  se trouve à l'intérieur de la surface  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  n'est plus définie en  $(x_P, y_P, z_P)$ . Pour contourner cette difficulté, on considère un volume limité par la surface extérieure  $(S)$  et par une petite sphère de rayon  $r_B$  entourant la charge  $Q$ . Le volume  $\tau - \tau_B$  ne contient pas de charge ; ce volume est limité par la surface fermée constituée par la surface extérieure  $(S)$  et par la surface  $(S_B)$  en remarquant que le vecteur unitaire  $\vec{n}$  doit être dirigé de l'intérieur vers l'extérieur du volume  $\tau - \tau_B$ . On exprime le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface  $(S)$  en l'écrivant sous la forme :

$$\phi_E = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.26)$$

$$= \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} - \oint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B + \oint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B \quad (2.27)$$

En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski, on obtient :

$$\phi_E = \iiint_{\tau - \tau_B} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau + \phi_B \quad (2.28)$$

où :

$$\phi_B = \oint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B \quad (2.29)$$

est le flux de  $\vec{E}$  à travers petite sphère  $(B)$  de volume  $\tau_B$  et de rayon  $r_B$ , entourant la charge ponctuelle  $Q$ .

Dans ce cas :

$$\iiint_{\tau - \tau_B} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau = 0 \quad (2.30)$$

car la divergence est définie partout sur  $\tau - \tau_B$ . Il nous reste donc :

$$\phi_E = \phi_B = \oint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B \quad (2.31)$$

Mais dans le cas d'une sphère, il est relativement facile de montrer que :

$$\oint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B = \oint_{(S_B)} E \, dS_B = E \oint_{(S_B)} dS_B = E S_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} 4\pi r_B^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.32)$$

Le flux du champ électrostatique à travers une surface  $(S)$  fermée entourant une charge ponctuelle  $Q$  est donc égal à  $Q/\epsilon_0$

Ce raisonnement peut être reconduit au cas où la surface fermée  $(S)$  entoure un ensemble de charges  $Q_i$ . D'où le théorème de Gauss pour le champ électrostatique :

Le flux du champ électrostatique à travers une surface  $S$  fermée entourant un ensemble de charges ponctuelles  $Q_i$  est égal à  $Q/\epsilon_0$ ,  $Q = \sum_i Q_i$  étant la charge électrique totale contenue dans le volume  $\tau$  limité par la surface fermée  $S$ .

Cette relation constitue le théorème de Gauss pour le champ électrostatique qui, sous cette forme dite intégrale, s'écrit :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.33)$$

Si la charge  $Q$  est répartie dans l'espace selon une densité volumique de charge  $\rho$ , nous avons :

$$Q = \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \quad (2.34)$$

Le théorème de Gauss peut alors s'écrire :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \quad (2.35)$$

où  $(S)$  est une surface fermée quelconque orientée vers l'extérieur et  $(\tau)$  est le volume intérieur à  $(S)$ . En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski, on peut écrire :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau \quad (2.36)$$

Le théorème de Gauss étant vrai quel que soit le volume  $\tau$ , on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante qui constitue la forme locale du théorème de Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.37)$$

Cette équation relie  $\vec{E}$  aux *charges* qui constituent les *sources* du champ électrostatique.

### 2.4.3 Le vecteur excitation électrique $\vec{D}$

Dans le vide le vecteur excitation électrique  $\vec{D}$  est défini par la relation :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad (2.38)$$

Le théorème de Gauss pour  $\vec{D}$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.39)$$

### 2.4.4 Equation de Poisson - Equation de Laplace

Sachant que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ , le théorème de Gauss  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$  devient :

$$\vec{\nabla} \cdot [-\vec{\nabla}U] = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (2.40)$$

Or le laplacien scalaire de  $U$  est défini par :

$$\nabla^2 U = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}U \quad (2.41)$$

D'où l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le potentiel électrostatique  $U$  :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.42)$$

Cette équation aux dérivées partielles porte le nom de équation de Poisson pour  $U$ .

En absence de charges électriques,  $\rho = 0$  et on obtient alors l'équation de Laplace pour  $U$  :

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2.43)$$

L'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique  $U$  :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.44)$$

admet comme solution :

$$U(M) = \iiint \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} d\tau \quad (2.45)$$

Cette expression permet de calculer le potentiel scalaire  $U$  au point  $M(x, y, z)$  créé par une distribution de charges électriques dans un volume ( $\tau$ ) qui est découpé en éléments de volumes  $d\tau$  localisés aux points  $P(x_P, y_P, z_P)$  où les charges sont définies localement par la densité volumique de charges  $\rho(x_P, y_P, z_P)$ .

## 2.5 En résumé

Les deux équations fondamentales de l'électrostatique dans le vide sont :

	Forme locale	Forme intégrale
$\vec{E}$ conservatif	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
Théorème de Gauss pour $\vec{E}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$

## 2.6 Exercices

**Exercice 1 :** On donne  $\vec{E} = 10 x \vec{e}_x$  ( $\text{mV m}^{-1}$ ); déterminer le flux de  $\vec{E}$  traversant une surface de  $1 \text{ m}^2$ , perpendiculaire à l'axe des  $x$  à l'abscisse  $x = 3 \text{ m}$ .

**Exercice 2 :** Déterminer le flux de  $\vec{E}$  traversant une portion de surface de  $1 \text{ mm}^2$ , prise à la surface d'une enveloppe cylindrique, autour du point de coordonnées  $r = 10 \text{ m}$ ,  $z = 2 \text{ m}$ ,  $\theta = 53.2^\circ$  quand

$$\vec{E} = 2 x \vec{e}_x + 2(1 - y) \vec{e}_y + 4 z \vec{e}_z \quad (\text{mV m}^{-1})$$

**Exercice 3 :** On donne en coordonnées cylindriques la répartition de charges suivantes  $\rho = 5r e^{-2r}$  ( $\text{C m}^{-3}$ ). Utiliser le théorème de Gauss pour trouver  $\vec{E}$ ; en déduire  $\vec{D}$ .



**Exercice 4 :** Dans un système de coordonnées cartésiennes, on donne  $\vec{E} = \alpha z \vec{e}_z$  dans la région  $-1 \leq z \leq 1$  et  $\vec{E} = (\alpha z/|z|) \vec{e}_z$  partout ailleurs;  $\alpha$  étant un paramètre dont on précisera les dimensions. Trouver la densité de charges  $\rho$ .

**Exercice 5 :** Etant donné le champ excitation électrique

$$\vec{D} = d (r^2 + z^2)^{-3/2} (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z)$$

en coordonnées cylindriques, trouver la densité de charges.

**Exercice 6 :** Soit

$$\vec{D} = \frac{Q}{\pi r^2} (1 - \cos 3r) \vec{e}_r$$

en coordonnées sphériques, chercher la densité de charge.

**Exercice 7 :** On donne le champ de vecteurs  $\vec{D} = (10x^3/3) \vec{e}_x$  ( $\text{C m}^{-2}$ ); évaluer les deux membres de l'égalité du théorème de la divergence pour le volume d'un cube de 2 m de côté, centré à l'origine et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

**Exercice 8 :** Soit le champ de vecteurs  $\vec{D} = 30 e^{-r} \vec{e}_r - 2z \vec{e}_z$  ( $\text{C m}^{-2}$ ) en coordonnées cylindriques, évaluer les deux membres de l'égalité du théorème de la divergence pour le volume limité par  $r = 2$  m,  $z = 0$  et  $z = 5$  m.

**Exercice 9 :** Soit le champ  $\vec{D} = (10r^3/4) \vec{e}_r$  ( $\text{C m}^{-2}$ ) en coordonnées cylindriques; évaluer les deux membres de l'égalité du théorème de la divergence pour le volume limité par  $r = 1$  m,  $r = 2$  m,  $z = 0$  et  $z = 10$  m.

**Exercice 10 :** Soit le champ  $\vec{D} = (5r^2/4) \vec{e}_r$  ( $\text{C m}^{-2}$ ) en coordonnées sphériques; évaluer les deux membres de l'égalité du théorème de la divergence pour le volume délimité par  $r = 4$  m, et  $\theta = \pi/4$ .

**Exercice 11 :** La région de l'espace entre les plans conducteurs situés en  $x = 0$  et  $x = d$ , contient une distribution uniforme de charges électriques de densité  $\rho$ . Les conditions aux frontières sont :  $U(x = 0) = 0$  et  $U(x = d) = U_0$ . On néglige les effets de bord.

Pour  $0 \leq x \leq d$ , calculer :

1. Le potentiel électrostatique  $U(x)$ ,
2. Le champ électrique  $\vec{E}$ .

**Exercice 12 :** Soit deux plans conducteurs parallèles  $y = 0$  et  $y = 0.02$  m; l'origine des potentiels est prise en  $y = 0.01$  m. Si  $\vec{D} = 253 \vec{e}_y$  ( $\text{nC m}^{-2}$ ) entre les conducteurs, déterminer les potentiels des conducteurs sachant que l'on néglige les effets de bord.

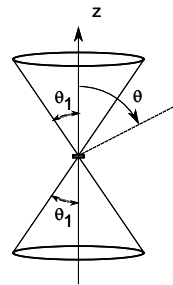
**Exercice 13 :**

1. Calculer le potentiel  $U(x)$  dans la région  $0 \leq x \leq 1$  contenant une densité de charge uniforme  $\rho = -4\varepsilon_0$ . Ce potentiel doit satisfaire les conditions aux frontières suivantes  $U(0) = 3\text{ V}$  et  $U(1) = 0\text{ V}$ .
2. En déduire le champ électrique  $E(x)$ .

**Exercice 14 :** Trouver la fonction potentiel et le champ électrique dans la région comprise entre deux cylindres circulaires droits concentriques. Le cylindre intérieur a pour rayon  $r = 1\text{ mm}$  et est au potentiel  $U = 0\text{ V}$ ; l'autre a pour rayon  $r = 20\text{ mm}$  et est au potentiel  $U = 150\text{ V}$ . On néglige les effets de bords.

**Exercice 15 :**

La figure ci-contre représente deux cônes conducteurs de même axe et opposés par le sommet. Le demi-angle au sommet est  $\theta_1$ . Les sommets des deux cônes sont séparés par un isolant en  $z = 0$ . Les potentiels des cônes sont respectivement  $U_1$  et  $U_2$ . Calculer le potentiel électrostatique  $U(\theta)$  en fonction de  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $\theta_1$  et  $\theta$ , pour  $\theta_1 < \theta < \pi - \theta_1$ .



**Exercice 16 :** La distribution spatiale du potentiel électrostatique est donnée par la fonction quadratique suivante :

$$U(x, y) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} (x^2 + y^2)$$

Vérifier que cette équation satisfait l'équation de Poisson.

**Exercice 17 :** La distribution de charges électriques dans une région de l'espace est caractérisée par sa densité volumique qui dépend du potentiel électrostatique :

$$\rho = -\frac{\varepsilon_0 U}{\lambda_0^2}$$

$\lambda_0$  étant une constante appelée longueur de Debye. Cette distribution présente une symétrie sphérique.

1. Ecrire l'équation de Poisson en coordonnées sphériques.
2. Faire le changement de variable  $W = rU$  et montrer que :

$$\frac{d^2 W}{dr^2} = CW$$

Donner l'expression de  $C$  en fonction de  $\lambda_0$

3. En déduire l'expression de  $U$  en fonction de  $r$ .

**Exercice 18 :** Soit deux sphères concentriques dont les potentiels et les rayons sont respectivement  $U = 0\text{ V}$ ,  $r = 0.10\text{ m}$  pour la première sphère et  $U = 100\text{ V}$ ,  $r = 2.0\text{ m}$  pour la seconde sphère. En supposant qu'il y ait le vide entre les deux sphères concentriques, trouver  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$ .



# Chapitre 3

## Electrocinétique et magnétostatique

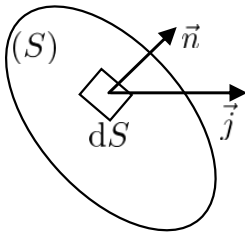
### 3.1 Electrocinétique - Vecteur densité de courant

Un courant électrique correspond à des charges électriques mobiles. On appelle vecteur densité de courant  $\vec{j}$ , le vecteur tangent à la ligne de courant, et défini par

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}_m \quad (3.1)$$

où  $\rho_m$  est la densité volumique de charges mobiles et  $\vec{v}_m$  la vitesse d'entraînement de ces charges mobiles. Le module de ce vecteur représente la charge qui traverse par unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire à la direction de déplacement des charges mobiles ; il s'exprime en  $\text{A m}^{-2}$ .

Le courant  $I$  traversant une surface ( $S$ ) quelconque est le flux de  $\vec{j}$  à travers cette surface :



$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\vec{S} \quad (3.2)$$

En régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est indépendant du temps, le flux de  $\vec{j}$  est conservatif ce qui se traduit par les relations intégrale et locale :

$$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\vec{S} = 0 \quad (3.3)$$

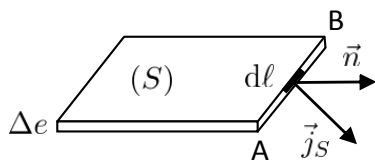
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.4)$$

*Densité de courant surfacique* : Lorsqu'un courant se trouve, à l'échelle macroscopique, étendu sur une surface, on parle de densité de courant surfacique. On dit qu'un courant admet une densité surfacique  $\vec{j}_S$  de courant sur une surface  $S$  si l'épaisseur  $\Delta e$  de la couche où circulent les charges mobiles de densité volumique  $\rho_m$  est très inférieure aux dimensions latérales de la surface  $S$ . La densité de courant surfacique est donnée par :

$$\vec{j}_S = \int_0^{\Delta e} \vec{j} \, de \quad (3.5)$$

où l'intégrale est faite sur l'épaisseur  $\Delta e$ , c'est-à-dire dans une direction orthogonale à la surface considérée.

L'unité de  $\vec{j}_S$  est le  $\text{A m}^{-1}$  car son unité est celle de  $\vec{j}$  multipliée par une longueur.



Ainsi le courant électrique qui parcourt une surface  $S$  est égal au flux du vecteur densité surfacique de courant à travers une ligne. L'intensité passant à travers une ligne  $[AB]$  contenue dans la surface  $S$  s'écrit :

$$I_S = \int_A^B \vec{j}_S \cdot \vec{n} \, d\ell \quad (3.6)$$

où  $d\ell$  est l'élément de longueur de la ligne  $[AB]$  et  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire tangent à la surface  $S$  et normal à la ligne  $[AB]$  en tout point.

## 3.2 Magnétostatique

### 3.2.1 Introduction

La force agissant sur une charge ponctuelle  $q$  dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse  $\vec{v}$ . Cette force  $\vec{F}$  est décomposée en deux composantes, la composante électrique  $\vec{F}_e$  (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique  $\vec{F}_m$  (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique noté usuellement  $\vec{B}$  qui s'exprime en tesla (T). La force magnétique  $\vec{F}_m$  est décrite par :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.7)$$

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée force de Lorentz ; elle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (3.8)$$

Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse  $\vec{v}$ . Dans l'approximation non relativiste la force de Lorentz comme toute autre force, ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi. Par contre sa décomposition en composante électrique et composante magnétique n'a de signification que si le référentiel d'inertie utilisé est explicitement défini.

L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ . Le champ magnétique  $\vec{B}$ , contrairement au champ électrique  $\vec{E}$ , n'exerce aucune force sur une charge immobile.

### 3.2.2 Le champ magnétique

Les expériences montrent que le champ magnétique est créé par des particules chargées en mouvement (courants électriques).

Le champ magnétostatique  $\vec{B}$  obéit à deux lois :

1. Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un courant  $I$  est donné par le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad (3.9)$$

où  $\Gamma$  est une courbe fermée quelconque traversée par le courant électrique  $I$ .

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

est la perméabilité magnétique du vide. Si le courant  $I$  correspond à une distribution de charges électriques mobiles définissant un vecteur densité de courant  $\vec{j}$ , alors le courant  $I$  encerclé par la boucle fermée  $\Gamma$  est le flux de  $\vec{j}$  à travers une surface quelconque délimitée par  $\Gamma$  :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.10)$$

Le théorème d'Ampère s'écrit alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.11)$$

En tenant compte du théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.12)$$

on obtient

$$\iint \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.13)$$

Cette égalité étant vraie quelle que soit la surface  $S$ , on obtient la forme locale du théorème d'Ampère qui s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.14)$$

2. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée  $S$  quelconque est nul. On dit que le champ magnétostatique est à flux conservatif. Cette propriété est traduite par l'intégrale suivante :

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.15)$$

En tenant compte du théorème de Gauss-Ostrogradski, on obtient l'équation du flux magnétique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.16)$$

### 3.2.3 Le vecteur excitation magnétique

En introduisant le vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  ( $A \cdot m^{-1}$ ) défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (3.17)$$

le théorème d'Ampère devient

$$\iint \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.18)$$

ou encore sous la forme locale

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (3.19)$$

### 3.2.4 Potentiel vecteur $\vec{A}$

#### Jauge de Coulomb

Sachant que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est nulle, on en déduit qu'il existe un champ vectoriel  $\vec{A}$  appelé potentiel vecteur tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.20)$$

Ce potentiel vecteur n'est pas défini de manière unique. En effet considérons un autre champ vectoriel  $\vec{A}'$  tel que :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \quad (3.21)$$

Calculons le champ magnétostatique  $\vec{B}'$  associé à  $\vec{A}'$  :

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times (\vec{A}') \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

car le rotationnel du gradient d'un champ vectoriel est égal à zéro. Nous voyons donc que les deux potentiels vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$  qui ne diffèrent que par  $\vec{\nabla}\phi$  conduisent au même champ magnétostatique  $\vec{B}$ . On dit que le potentiel vecteur est défini à un gradient près. Pour définir  $\vec{A}$  de manière unique, il faut imposer une condition supplémentaire à  $\vec{A}$ . Cette condition est appelée *condition de jauge*. La plus utilisée en magnétostatique est *la condition de jauge de Coulomb* qui s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.22)$$

#### Equation de Poisson pour $\vec{A}$

En remplaçant  $\vec{B}$  par  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  dans le théorème d'Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.23)$$

et en tenant compte de la jauge de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , on obtient

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad (3.24)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.25)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.26)$$

Ce résultat constitue l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3.27)$$

En absence de courants, on obtient l'équation de Laplace pour  $\vec{A}$  :

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{0} \quad (3.28)$$

### 3.2.5 La loi de Biot-Savart

#### La loi de Biot-Savart pour $\vec{A}$

Pour trouver une solution à l'équation de Poisson pour  $\vec{A}$ , nous procéderons par analogie avec la solution obtenue dans le cas de l'électrostatique pour le potentiel électrostatique. L'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique  $U$  :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.29)$$

admet comme solution :

$$U(M) = \iiint \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{PM}\|} d\tau \quad (3.30)$$

De même, l'équation vectorielle pour  $\vec{A}$ , peut s'écrire comme un ensemble de trois équations aux dérivées partielles pour chacune des composantes  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  de  $\vec{A}$  :

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu j_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu j_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu j_z \end{cases} \quad (3.31)$$

Chacune de ces équations scalaires admet, par analogie avec la solution pour le potentiel scalaire, une solution sous la forme :

$$\begin{cases} A_x(M) = \iiint \frac{\mu_0 j_x(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \\ A_y(M) = \iiint \frac{\mu_0 j_y(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \\ A_z(M) = \iiint \frac{\mu_0 j_z(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \end{cases} \quad (3.32)$$

Ce qui peut être écrit sous une forme vectorielle qui constitue la loi de Biot-Savart pour le potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M) = \iiint \frac{\mu_0 \vec{j}(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \quad (3.33)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, la loi de Biot-Savart s'écrit :

$$\vec{A}(x, y, z) = \iiint \frac{\mu_0 \vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{4\pi \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} d\tau \quad (3.34)$$

Cette expression permet de calculer le potentiel vecteur  $\vec{A}$  au point  $M(x, y, z)$  créé par une distribution de courants électriques dans un volume ( $\tau$ ) qui est découpé en éléments de volumes  $d\tau$  localisés aux points  $P(x_P, y_P, z_P)$  où les courants sont définis localement par le vecteur densité de courant  $\vec{j}(x_P, y_P, z_P)$ .



### Loi de Biot-Savart pour le champ magnétique $\vec{B}$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  peut être obtenu à partir du potentiel vecteur  $\vec{A}$  à partir de :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.35)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \iiint \frac{\mu_0 \vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{4\pi \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} d\tau \quad (3.36)$$

Le rotationnel étant calculé autour du point  $M$ , les opérations de dérivation se font par rapport aux coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Comme l'intégration se fait par rapport aux coordonnées  $x_P$ ,  $y_P$  et  $z_P$ , nous pouvons écrire :

$$\vec{B} = \iiint \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0 \vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{4\pi \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} d\tau \quad (3.37)$$

Rappelons que :

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{u}) = \vec{\nabla} f \times \vec{u} + f \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (3.38)$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} \right) = \\ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} \right) \times \vec{j}(P) \\ + \frac{1}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} \vec{\nabla} \times \vec{j}(P) \end{aligned} \quad (3.39)$$

or

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} \right) = - \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (3.40)$$

et comme on calcule le rotationnel en dérivant par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$  et que  $\vec{j}(P)$  ne dépend que de  $x_P$ ,  $y_P$  et  $z_P$  :

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}(P) = \vec{0} \quad (3.41)$$

on obtient la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique  $\vec{B}$

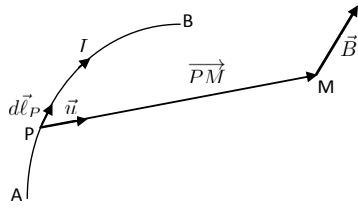
$$\vec{B} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\overrightarrow{PM} \times \vec{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau \quad (3.42)$$

Si on appelle  $\vec{u}$  le vecteur unitaire du vecteur  $\overrightarrow{PM}$ , l'équation ci-dessus devient :

$$\vec{B} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{u} \times \vec{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} d\tau \quad (3.43)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \times \vec{u}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} d\tau \quad (3.44)$$

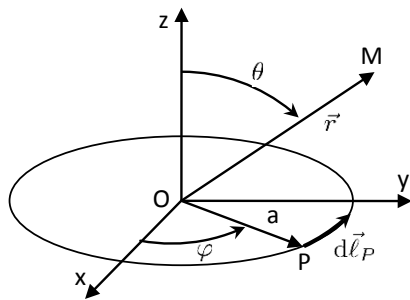
Cette dernière expression constitue la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique  $\vec{B}$  ; elle exprime le champ magnétique créé au point  $M$  par les vecteurs densité de courants  $\vec{j}(P)$  localisés aux point  $P$  à l'intérieur du volume  $\tau$ .



Une expression pratique plus intéressante peut être obtenue pour calculer  $\vec{B}$  en fonction du courant  $I$ . En effet, on peut simplifier cette intégrale dans le cas de courants filiformes (le conducteur filiforme est orienté dans le sens du courant) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma_{AB}} \frac{d\vec{\ell}_P \times \vec{u}}{\|\vec{P}\vec{M}\|^2} \quad (3.45)$$

**Exercice résolu : Champ créé à grande distance par un dipôle magnétique**



On dispose d'une spire circulaire de centre  $O$ , de rayon  $a$ , d'axe  $(Oz)$ , parcourue par un courant  $I$ . On veut calculer le champ magnétique créé en un point  $M$  à grande distance de la spire :  $OM \gg a$ . Le point  $M$  est repéré par le vecteur  $\vec{O}\vec{M}$ .

Soit  $P$  un point courant de la spire, repéré par l'angle  $\varphi$  entre  $\vec{u}_x$  et  $\vec{O}\vec{P}$ . Le potentiel vecteur créé en  $M$  par un élément  $d\vec{\ell}_P$  de la spire situé en  $P$  vaut :

$$d\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}_P}{PM} \quad (3.46)$$

On a :

$$\vec{O}\vec{P} = \begin{cases} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$d\vec{\ell}_P = d\vec{O}\vec{P} = d\varphi \begin{cases} -a \sin \varphi \\ -a \cos \varphi \\ 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

De plus

$$\vec{O}\vec{M} = \begin{cases} 0 \\ r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\vec{P}\vec{M} = \vec{O}\vec{M} - \vec{O}\vec{P} = \begin{cases} -a \cos \varphi \\ r \sin \theta - a \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{cases} \quad (3.50)$$

donc

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r \left( 1 - 2\frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.51)$$

En faisant un développement limité de  $\frac{1}{PM}$  au premier ordre en  $\frac{a}{r}$ , on obtient :

$$\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \sin \varphi \right) \quad (3.52)$$

On reprend l'expression de  $d\vec{A}$  et on obtient :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \begin{cases} -a \sin \varphi d\varphi \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \sin \varphi\right) \\ a \cos \varphi d\varphi \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \sin \varphi\right) \\ 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

Sachant que :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi = 0 \quad (3.54)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = 0 \quad (3.55)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \pi \quad (3.56)$$

on obtient le potentiel vecteur  $\vec{A}$  :

$$\vec{A}(M) = \int_0^{2\pi} d\vec{A} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I a^2}{4r^2} \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

En tenant compte de la définition du moment magnétique de la spire :

$$\vec{\mathfrak{M}} = \pi a^2 I \vec{e}_z \quad (3.58)$$

on obtient :

$$\vec{A}(M) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi r^2} \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

Finalement on peut écrire le potentiel vecteur créé à grande distance par une spire de moment magnétique  $\vec{\mathfrak{M}}$  sous la forme :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathfrak{M}} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.60)$$

Sachant que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , on peut montrer que le champ magnétique  $\vec{B}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \quad (3.61)$$

*Remarque :* On remarquera la ressemblance importante avec le champ électrostatique créé à grande distance par un dipôle électrostatique  $p$  :

	Magnetostatique	Electrostatique
Champ	$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$	$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$

### 3.3 En résumé

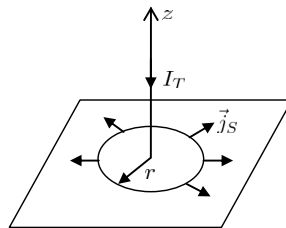
L'ensemble des propriétés du champ magnétique est donc contenu dans les deux seules équations locales de Maxwell dans lesquelles il est présent. Dans le vide, les deux équations fondamentales de la magnétostatique sont :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème d'Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$
Equation du flux magnétique	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{S_{fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

### 3.4 Exercices

#### Intensité de courant, Densité de courant

**Exercice 1 :**



Un courant d'intensité  $I_T$ , parcourt un filament le long de l'axe des  $z$  et pénètre une fine nappe conductrice en  $z = 0$ . Exprimer le vecteur densité de courant surfacique  $\vec{j}_S$  pour cette nappe.

**Exercice 2 :** Étant donné la densité de courant  $\vec{j} = 10^3 \sin(\theta) \vec{e}_r$  ( $\text{A m}^{-2}$ ), trouver l'intensité du courant qui traverse la surface d'une sphère de 0.02 m de rayon .

**Exercice 3 :** Une nappe de courant de largeur 4 m est située dans le plan  $z = 0$  et est parcourue par un courant d'intensité 10 A qui se propage du point origine vers le point (1, 3, 0) m. Trouver l'expression du vecteur densité de courant surfacique.

**Exercice 4 :** Dans un conducteur cylindrique de 2 mm de rayon, la densité de courant varie avec la distance à l'axe d'après la relation  $j = 10^3 e^{-400r}$  ( $\text{A m}^{-2}$ ). Trouver l'intensité totale du courant.

#### Théorème d'Ampère et champ magnétique

**Exercice 5 :** Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  dans la région entourant un courant filiforme rectiligne infiniment long, d'intensité  $I$ . En déduire le potentiel vecteur  $\vec{A}$ .

**Exercice 6 :** Trouver une expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par une nappe plane infinie de courant, de densité surfacique uniforme  $\vec{j}_S$ , contenue dans le plan  $xOy$ . En déduire le potentiel vecteur  $\vec{A}$  correspondant. Calculer le flux magnétique à travers la surface rectangulaire limitée par les points  $M(0, 0, 1)$ ,  $N(0, 2, 1)$ ,  $P(0, 2, 2)$  et  $Q(0, 0, 2)$ .

**Exercice 7 :** Un conducteur cylindrique creux de faible épaisseur, de rayon  $a$  et de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Trouver  $\vec{H}$  en tout point, à l'aide du théorème d'Ampère.

**Exercice 8 :** A l'aide du théorème d'Ampère, calculer  $\vec{H}$  créé par un conducteur cylindrique plein, de rayon  $a$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ , uniformément réparti à travers la section droite. Déduire le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à partir de  $\vec{H}$ .

**Exercice 9 :** Dans un système de coordonnées cylindriques, la densité de courant est

$$\vec{j} = \begin{cases} 4.5 e^{-2r} \vec{e}_z & \text{A m}^{-2} & 0 < r < 0.5\text{m} \\ \vec{0} & & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Trouver  $\vec{H}$  par le théorème d'Ampère.

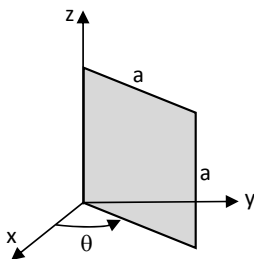
**Exercice 10 :** L'excitation magnétique  $\vec{H}$  en tout point intérieur à un conducteur cylindrique de rayon  $r_0 = 1$  cm est donnée par :

$$\vec{H} = \frac{10^4}{r} \left( \frac{1}{a^2} \sin(ar) - \frac{r}{a} \cos(ar) \right) \vec{e}_\theta \quad (\text{A m}^{-1})$$

avec  $a = \pi/2r_0$ . Trouver, en utilisant deux méthodes différentes, l'intensité totale du courant dans le conducteur.

**Exercice 11 :**

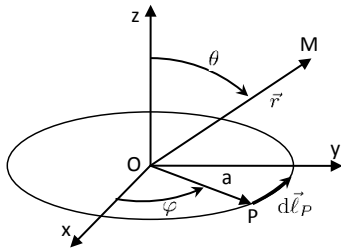
Soient  $A_0$  une constante et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  la base de vecteurs unitaires du repère local en coordonnées cylindriques.



1. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  associé au potentiel vecteur

$$\vec{A} = A_0 r \sin \theta \vec{e}_z.$$

2. Calculer le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface de la spire carrée de côté  $a$  contenant l'axe  $Oz$  et faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ .

**Exercice 12 :**

Une spire circulaire de rayon  $a$  et d'axe  $0z$ , est parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Elle crée un champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point  $M$  défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

On se propose dans cet exercice de calculer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en appliquant la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique.

1. Rappeler la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique  $\vec{B}$ .
2. En utilisant la même démarche que l'exercice corrigé [ page 23 ], calculer le champ magnétique  $d\vec{B}$  créé au point  $M$  par un élément de la spire  $d\vec{\ell}_P$  situé en un point courant  $P$  de la spire.
3. En déduire les composantes du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par cette spire.



# Chapitre 4

## Le régime variable

### 4.1 Introduction

Le régime variable est caractérisé par des propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps. Ces particularités sont :

**Le phénomène d'induction :** Un circuit filiforme au repos et parcouru par un courant invariable n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuits en présence se déplacent l'un par rapport à l'autre : la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dus au phénomène d'induction. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit) ; ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique .

**Le phénomène de capacité :** Un circuit comprenant un condensateur alimenté par une source de tension variable en fonction du temps, est parcouru par un courant variable bien que la continuité électrique soit interrompue par l'espace entre les armatures du condensateur. Dans ce cas l'intensité du courant n'est plus conservée tout au long du circuit puisqu'elle est nulle dans l'espace entre les armatures. Il n'est donc plus possible d'appliquer le théorème d'Ampère. Pour conserver la validité de ce dernier, nous serons amenés à introduire le courant de déplacement.

**Le phénomène de propagation :** Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps ; cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions règnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant  $t$  donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à un instant antérieur qui est fonction de la distance séparant le point d'observation des sources. Nous exprimons ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

Toutefois dans le cas de régimes variant assez lentement en fonction du temps, on fait des approximations qui permettent de négliger certains termes dans les équations de Maxwell. Cet ensemble d'approximations est appelé l'approximation du régime quasi-stationnaire (A.R.Q.S).



## 4.2 L'induction électromagnétique

### 4.2.1 La loi de Lenz

On peut induire une f.é.m dans un circuit filiforme ( $\mathcal{C}$ ) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique. Les cas de variations du flux du champ magnétique à travers un circuit sont :

- Le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent,
- Le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable,
- le cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable.

Pour trouver de manière qualitative le sens du courant induit, on utilise la *loi de Lenz* qui stipule que :

*Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il crée s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance.*

Puisque une f.é.m apparaît dans le circuit ( $\mathcal{C}$ ) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit ( $\mathcal{C}$ ). Ce champ est appelé champ électrique induit.

### 4.2.2 Loi de Faraday

Pendant un temps  $dt$ , la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit ( $\mathcal{C}$ ) est  $d\phi$  ; la f.é.m induite  $e$  s'exprime à l'aide de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (4.1)$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique.

### 4.2.3 Equation de Maxwell-Faraday

Considérons un circuit ( $\mathcal{C}$ ) au repos soumis à un champ variable. Un champ électrique va prendre naissance dans tout l'espace où existe un champ magnétique variable. Le champ électrique induit joue un rôle de champ électromoteur et la f.é.m apparaissant dans tout le circuit ( $\mathcal{C}$ ) peut s'écrire :

$$e = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.2)$$

où ( $S$ ) est une surface orientée s'appuyant sur le contour orienté ( $\mathcal{C}$ ).

En permutant les opérateurs d'intégration et de dérivation on a :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_{(S)} \frac{\partial (\vec{B} \cdot d\vec{S})}{\partial t} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.3)$$

car le circuit ( $\mathcal{C}$ ) étant immobile, la surface ( $S$ ) l'est aussi et  $d\vec{S}$  est indépendant du temps. En appliquant le théorème de Stokes nous pouvons écrire :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{\nabla} \times \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.4)$$

Cette égalité étant satisfaite quelle que soit ( $S$ ) s'appuyant sur ( $\mathcal{C}$ ), il en résulte :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.5)$$

Remarquons que s'il existe en plus du champ électrique induit un champ électrostatique  $\vec{E}_S$ , le champ total  $\vec{E}$  est la somme du champ électrostatique  $\vec{E}_S$  et du champ électrique induit  $\vec{E}_i$  :

$$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_i \quad (4.6)$$

On peut aisément vérifier que  $\vec{E}$  satisfait la relation la relation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times [\vec{E}_S + \vec{E}_i] = \vec{\nabla} \times \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.7)$$

car

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_S = \vec{0} \quad (4.8)$$

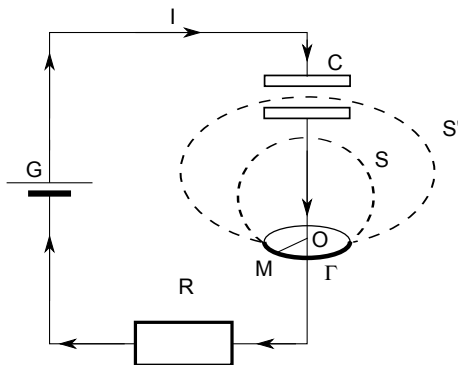
En définitive, nous devons retenir de l'étude du phénomène d'induction électromagnétique le résultat fondamental suivant :

*En chaque point de l'espace où existe un champ magnétique variable nous devons associer un champ électrique induit variable à circulation non conservative c'est-à-dire ne dérivant pas d'un potentiel.*

L'ensemble de ces deux champs ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) constitue le champ électromagnétique.

## 4.3 Le théorème de Maxwell-Ampère

### 4.3.1 Le phénomène de capacité



Considérons l'exemple simple schématisé par la figure. Lorsqu'on relie le condensateur  $C$  au générateur  $G$ , il circule pendant un temps très court un courant variable  $I(t)$ . Ce courant crée un champ magnétique  $\vec{B}$  que l'on pourrait calculer à l'aide du théorème d'Ampère.

Pour calculer le champ magnétique en  $M$ , on considère le cercle  $\Gamma$  de rayon  $OM = r$ , et l'on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (4.9)$$

Cette équation exprime le fait que l'intégrale curviligne de  $\vec{B}$  sur une boucle fermée est égale à  $\mu_0$  fois le courant total qui traverse une surface quelconque limitée par la boucle fermée  $\Gamma$ . On peut calculer le champ magnétique en  $M$  en utilisant successivement deux surfaces différentes  $S$  et  $S'$  s'appuyant sur le contour  $\Gamma$  et en appliquant pour chacune d'entre elles le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale.

- Cas de la surface  $S$  : Le courant total traversant  $S$  est bien égal au courant  $I$  et on obtient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.10)$$

- Cas de la surface  $S'$  : Cette surface passant entre les plaques du condensateur n'est traversée par aucun courant puisque les charges électriques ne se déplacent pas entre les plaques du condensateur. Si on utilise le théorème d'Ampère, on obtient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (4.11)$$

Le résultat de ce calcul serait alors  $\vec{B} = \vec{0}$ . Ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu avec la surface  $S$ . Pour lever cette ambiguïté, il faut modifier le théorème d'Ampère.

Dans le condensateur, il n'y a pas de charges mobiles, donc pas de courant de conduction. Par contre il y a un champ électrique variable durant la charge du condensateur et qui est égal à :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (4.12)$$

$\sigma$  étant la densité superficielle de charges électriques sur les plaques du condensateur. La charge totale portée par une armature du condensateur de surface  $\Sigma$  est :  $q = \sigma \Sigma$ . Le courant de conduction  $I$  à l'extérieur du condensateur est lié à la charge du condensateur par  $I = \frac{dq}{dt}$ , d'où :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\sigma \Sigma)}{dt} = \frac{d(\varepsilon_0 E)}{dt} \Sigma = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \Sigma = \frac{dD}{dt} \Sigma \quad (4.13)$$

où  $D = \varepsilon_0 E$  est le vecteur excitation électrique entre les armatures du condensateur. Entre les armatures du condensateur, le *courant* ne correspond pas à un mouvement de charges électriques mais il est lié au champ électrique variable entre les armatures du condensateur. Il est appelé *courant de déplacement* et nous le noterons  $I_D$ . Ainsi si on suppose que le courant entre les plaques du condensateurs est  $I_D$ . Le courant total traversant la surface  $S'$  est  $I_D$  et si on utilise le théorème d'Ampère en prenant en compte le courant de déplacement, on obtient le même résultat que celui qui a été obtenu en utilisant la surface  $S$ .

L'introduction du courant de déplacement va permettre de généraliser aux régimes variables le théorème d'Ampère dans lequel on devra considérer le courant total, somme du courant de conduction correspondant à des charges électriques mobiles, et du courant de déplacement correspondant à un champ électrique variable dans le temps.

### 4.3.2 Le vecteur densité de courant de déplacement

Le courant lié au mouvement des charges électriques sera noté dans la suite  $I$  et le courant de déplacement qui correspond à un champ électrique variable sera noté  $I_D$ . On

appelle le courant total  $I_T = I + I_D$ . A ces courants on associe respectivement :

- le vecteur densité de courant lié au mouvement des charges électriques  $\vec{j}$ ,
- le vecteur densité de courant de déplacement  $\vec{j}_D$  défini par

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.14)$$

- le vecteur densité de courant total

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D \quad (4.15)$$

### 4.3.3 Le théorème de Maxwell-Ampère

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total. La relation de Maxwell-Ampère qui en est la traduction s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.16)$$

La relation intégrale du théorème d'Ampère généralisé est :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \mu_0 \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (4.17)$$

On obtient le résultat fondamental :

*Un champ électrique variable crée un champ magnétique.*

### 4.3.4 Equation de continuité

Considérons une surface fermée ( $S$ ) entourant un volume ( $\tau$ ) ; si  $\rho$  est la densité volumique de charge électrique et  $q$  la charge électrique totale du volume ( $\tau$ ) à l'instant  $t$ , on a

$$q = \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \quad (4.18)$$

Pendant l'intervalle de temps  $dt$  la variation de la charge totale est  $dq$ , et le taux de variation de charge s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \right) \quad (4.19)$$

mais  $\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$  représente la charge totale sortant de la surface ( $S$ ) par unité de temps,

donc par suite de la conservation de la charge :

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.20)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \right) = - \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.21)$$

En changeant l'ordre des opérations par rapport à l'espace et par rapport au temps, on a :

$$\iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \oint_{(S \text{ fermée})} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.22)$$

or, d'après le théorème d'Ostrogradsky :

$$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau \quad (4.23)$$

donc

$$\iiint_{(\tau)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] d\tau = 0 \quad (4.24)$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume  $(\tau)$ , il faut donc que l'on ait :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.25)$$

Cette équation dite de continuité traduit la conservation de la charge électrique et montre que le flux du vecteur densité de courant n'est plus conservatif comme dans le cas des états stationnaires.

On peut vérifier que le théorème d'Ampère qui est valable uniquement dans le cas des régimes stationnaires ne peut plus être utilisé dans le cas des régimes variables car il serait en contradiction avec la relation de continuité qui exprime un principe fondamental de la physique (Principe de conservation de la charge électrique). Par contre le théorème d'Ampère-Maxwell qui prend en compte le courant de déplacement satisfait pleinement la relation de continuité.

## 4.4 Les équations de Maxwell

### 4.4.1 Les hypothèses de Maxwell

Nous avons pu remarquer que l'étude du régime variable nous a amenés à modifier deux équations fondamentales des régimes statiques :

Régime Statique		Régime variable
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\longrightarrow$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\longrightarrow$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Selon les hypothèses de Maxwell les deux autres équations caractéristiques des régimes statiques sont encore valables pour les régimes variables :

- théorème de Gauss pour  $\vec{E}$  :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- théorème de Gauss pour  $\vec{B}$  :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Ces quatre équations aux dérivées partielles sont appelées *les équations de Maxwell*. Elles constituent les équations fondamentales de l'électromagnétisme.

## 4.4.2 En résumé

Dans le vide, les équations de Maxwell s'écrivent :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour $\vec{E}$ ou équation de Maxwell-Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau$
Equation du flux magnétique ou équation de Maxwell-Thomson	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Equation de Maxwell-Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Equation de Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \mu_0 \left[ \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}$

4.5 Equations pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ 

Pour établir l'équation relative au champ électrique  $\vec{E}$ , il faut éliminer le champ magnétique  $\vec{B}$ . Pour cela, calculons le rotationnel de chacun des membres de la loi de Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (4.26)$$

en permutant l'ordre des dérivations, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \quad (4.27)$$

Sachant que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \quad (4.28)$$

où  $\nabla^2$  est le laplacien vectoriel, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\nabla^2 \vec{E} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \quad (4.29)$$

Comme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.30)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \quad (4.31)$$

on obtient finalement :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \quad (4.32)$$

Pour établir l'équation aux dérivées partielles pour le champ magnétique  $\vec{B}$ , calculons le rotationnel de chacun des membres du théorème d'Ampère-Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left\{ \mu_0 \left[ \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \right\} \quad (4.33)$$

mais

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.34)$$

et en inversant l'ordre des dérivations :

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{E}] \quad (4.35)$$

or

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.36)$$

Donc

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (4.37)$$

ou encore

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j} \quad (4.38)$$

En absence de charges électriques ( $\rho = 0$ ) et de courants électriques ( $\vec{j} = \vec{0}$ ), on obtient la même équation aux dérivées partielles pour le champ électrique et pour le champ magnétique.

L'équation

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (4.39)$$

constitue l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide, où on a posé  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ .

## 4.6 Introduction des potentiels

### 4.6.1 Potentiel scalaire. Potentiel vecteur

Le champ magnétique  $\vec{B}$  satisfait à l'équation  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}) = 0$ . On peut donc définir un potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique par :  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A})$ .

D'après la loi de l'induction  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , d'où :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = -\vec{\nabla} \times \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \quad (4.40)$$

soit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{\nabla} \times \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{0} \quad (4.41)$$

Sachant que le rotationnel du gradient d'un champ scalaire est nul, on peut déduire du résultat de l'équation précédente qu'il existe un champ scalaire  $U$  appelé potentiel scalaire tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}U \quad (4.42)$$

et l'on a :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.43)$$

Si l'on remplace le potentiel scalaire  $U$  et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  respectivement par les potentiels  $U'$  et  $\vec{A}'$  définis par :

$$\begin{aligned} U &\mapsto U' = U - \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \vec{A} &\mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \end{aligned}$$

on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla}U' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\left(U - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) \\ \vec{E}' &= -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= -\vec{\nabla} \times \vec{A}' = -\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) \\ \vec{B}' &= -\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \end{aligned}$$

Le remplacement de  $\vec{A}$  et  $U$  respectivement par  $\vec{A}'$  et  $U'$  s'appelle une transformation de jauge. L'invariance de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans cette transformation s'appelle l'invariance de jauge. L'invariance de jauge nous laisse libre du choix de la relation liant le potentiel scalaire et le potentiel vecteur. Cette relation est appelée la condition de jauge .

#### 4.6.2 Equations des potentiels. Jauge de Lorenz

Sachant que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , le théorème de Gauss  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  s'écrit,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.44)$$

ce qui donne une première équation entre  $U$  et  $\vec{A}$



$$\nabla^2 U + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.45)$$

Une deuxième équation est obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.46)$$

où  $\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  et  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

En utilisant l'identité :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] - \nabla^2 \vec{A} \quad (4.47)$$

il vient

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] - \frac{1}{c^2} \left[ -\vec{\nabla} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] + \mu_0 \vec{j} = 0 \quad (4.48)$$

soit

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \mu_0 \vec{j} = 0 \quad (4.49)$$

Nous obtenons ainsi, pour les potentiels  $\vec{A}$  et  $U$ , deux équations que l'on peut écrire sous la forme symétrique

$$\begin{aligned} \nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Si l'on choisit la jauge de Lorenz définie par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4.51)$$

les équations des potentiels deviennent alors indépendantes et se réduisent à

$$\begin{aligned} \nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Notons que la condition de jauge de Lorenz est compatible avec l'invariance de jauge. En effet, si nous remplaçons  $\vec{A}$  par  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$  et  $U$  par  $U' = U + \frac{\partial \phi}{\partial t}$  la condition de Lorenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U'}{\partial t} = 0 \quad (4.53)$$

s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.54)$$

Il suffit pour qu'elle soit vérifiée que  $\phi$  satisfasse l'équation aux dérivées partielles :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.55)$$

## 4.7 Le champ électromoteur

### Définition

Soit un conducteur électrique se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}$  dans une région de l'espace où règne un champ magnétique  $\vec{B}$ , on définit le champ électromoteur par la relation :

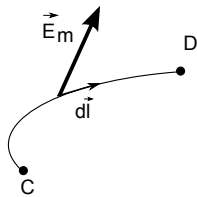
$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.56)$$

Le champ électromoteur rend compte de l'apparition d'un courant induit dans les cas :

- d'un circuit fixe placé dans un champ magnétique variable,
- d'un circuit mobile dans un champ magnétique.

### 4.7.1 f.é.m induite dans un circuit

La f.é.m induite  $e_{CD}$  apparaissant dans une portion de circuit filiforme  $CD$  est par définition égale à la circulation du champ électromoteur sur  $CD$  :



$$e_{CD} = \int_{CD} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad (4.57)$$

Dans le cas d'un circuit filiforme fermé conducteur  $C$ , mobile dans un champ magnétique variable dans le temps. La f.é.m induite est donnée par :

$$e_C = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{\ell} \quad (4.58)$$

### 4.7.2 Induction de Lorentz, Induction de Neuman

On a deux cas particuliers :

- Induction de Neuman : Circuit fixe dans un champ magnétique variable ( $\vec{v} = \vec{0}$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ )

$$e_C = \oint_C -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.59)$$

- Induction de Lorentz : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ )

$$e_C = \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.60)$$

## 4.8 Approximation des états quasi-stationnaires

### 4.8.1 Introduction

Les propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps sont :

- le phénomène d'induction,
- le phénomène de capacité,
- le phénomènes de propagation.

Pourtant dans le cas de régimes variant assez lentement en fonction du temps, on fait des approximations qui permettent de négliger certains termes dans les équations de Maxwell. Cet ensemble d'approximations est appelé l'approximation du régime quasi-stationnaire (A.R.Q.S).

### 4.8.2 Phénomène d'induction

On tient toujours compte des effets d'induction quelle que soit la vitesse de variation du champ.

### 4.8.3 Phénomène de capacité

Cet effet est lié aux circuits ouverts alimentés par une source de tension variable et parcourus par un courant variable bien que ces circuits électriques ne soient pas fermés. C'est le cas particulier des condensateurs où pour assurer la continuité du courant électrique, nous avons introduit la notion de courant de déplacement. Dans l'approximation du régime quasi-stationnaire, on suppose que les effets des champs magnétiques sont négligeables entre les armatures de ces condensateurs.

### 4.8.4 Phénomène de propagation

Si les dimensions des circuits électriques étudiés sont suffisamment petites on pourra considérer que dans un circuit fermé le courant électrique est le même en chaque point d'un circuit fermé. Dans ce cas le vecteur densité de courant  $\vec{j}_T$  est sensiblement le même en tout point du circuit :

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D \simeq \vec{j} \quad (4.61)$$

il s'en suit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T \simeq 0 \quad (4.62)$$

### 4.8.5 Equations des états quasi-stationnaires

Dans l'approximation du régime quasi-stationnaire, les équations de Maxwell s'écrivent :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour $\vec{E}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau$
Equation du flux magnétique	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Loi de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Théorème d'Ampère-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$

avec :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

## 4.9 Exercices

### Courant de conduction, courant de déplacement

**Exercice 1 :** Le vecteur densité de courant est  $\vec{j} = e^{-x^2} \vec{e}_x$ . Calculer la vitesse de variation de la densité volumique de charges électriques en  $x=1$ .

**Exercice 2 :** Dans une région donnée le vecteur densité de courant est donné en coordonnées sphériques, par :

$$\vec{j} = J_0 \frac{e^{-t/\tau}}{r} \vec{e}_r$$

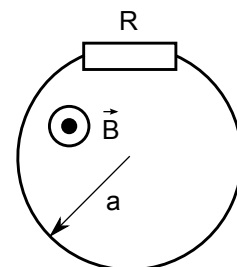
1. Calculer le courant total qui traverse une surface sphérique de rayon  $r = a$ , à l'instant  $t = \tau$ .
2. Calculer la densité volumique de charges électriques  $\rho$ .

### Induction électromagnétique

**Exercice 3 :** On considère une boucle conductrice circulaire de rayon  $a = 0.10$  m, située dans le plan  $z = 0$  et fermée sur une résistance  $R = 5.0 \Omega$ . Elle est placée dans un champ magnétique  $\vec{B} = 0.20 \sin(10^3 t) \vec{e}_z$  T. Déterminer le courant qui traverse le circuit.

**Exercice 4 :**

Une boucle conductrice, circulaire de rayon  $a$ , relie les deux bornes d'une résistance  $R = 100 \Omega$ . Ce circuit fermé est placé dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme  $B = B_0 e^{-t/\tau}$ . En négligeant le champ magnétique créé par le courant induit, calculer le potentiel électrique  $\tau(t)$  qui apparaît aux bornes de la résistance  $R$ . Représenter graphiquement les variations de  $\tau(t)$  en fonction du temps.



**Exercice 5 :** Une spire conductrice circulaire, plane, de section  $S$ , tourne autour d'un axe de symétrie  $\Delta$ , contenu dans le plan de la spire, à une vitesse angulaire  $\omega$  constante, dans une région où règne un champ magnétique  $B$  constant perpendiculaire à  $\Delta$ .

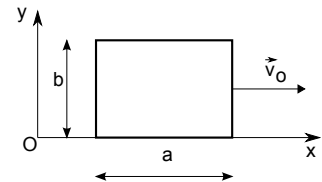
1. Etablir l'expression de la f.é.m induite dans la spire.
2. La spire possède une résistance  $R$ . Quelle la puissance instantanée dissipée ? Montrer que cette puissance est égale à la puissance fournie pour maintenir la rotation de la spire.

**Exercice 6 :**

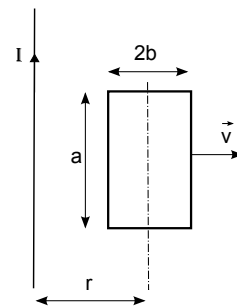
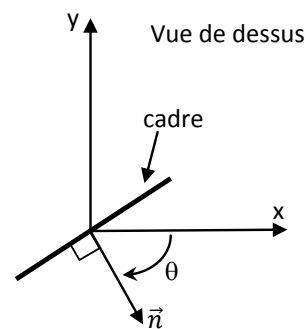
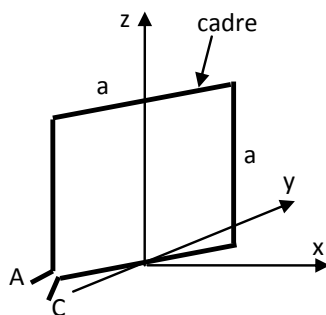
Une boucle fermée conductrice, de forme rectangulaire de largeur  $b$  et de longueur  $a$  ( $a = 30 \text{ cm} \times b = 20 \text{ cm}$ ), est déplacée à travers un champ magnétique non uniforme indépendant du temps  $\vec{B} = \beta x \vec{e}_z$  (T) avec une vitesse constante

$$\vec{v}_0 = 5 \vec{e}_x \text{ (m s}^{-1}\text{)}$$

où  $\beta = 1 \text{ T m}^{-1}$ . A  $t = 0$ , le coin inférieur gauche de la boucle coïncide avec l'origine 0. Calculer la f.é.m induite  $e$ . On négligera le champ magnétique créé par le courant induit dans la boucle.

**Exercice 7 :**

Un cadre de forme rectangulaire, constitué d'un fil conducteur ( $a \times 2b$ ) est au voisinage d'un fil conducteur de longueur infinie, parcouru par un courant  $I$  constant. Le fil et le cadre sont dans le même plan vertical. Le cadre est déplacé avec une vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ . La distance entre l'axe du cadre et le fil vaut  $r$  et à l'instant initial  $r = 2b$ . Calculer la force électromotrice induite  $e(t)$  dans le circuit constitué par le cadre.

**Exercice 8 :**

On dispose un cadre carré fixe de côté  $a$  comportant  $N$  spires d'un fil conducteur d'extrémités  $A$  et  $C$  dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ . La normale  $\vec{n}$  au cadre fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{e}_x$ .

1. Calculer la force électromotrice induite  $e(t)$  qui apparaît entre les bornes de sortie  $A$  et  $C$  du cadre.
2. Donner l'expression de l'amplitude  $e_0$  de  $e(t)$  en fonction de la pulsation  $\omega$  du champ magnétique et de l'angle  $\theta$ . Tracer le graphe de l'amplitude de  $e(t)$  en fonction de  $\theta$ .

3. Calculer le vecteur  $\vec{A} = \frac{\vec{B} \times \overrightarrow{OM}}{2}$ ; vérifier que  $\vec{A}$  représente le potentiel vecteur au point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ .
4. Calculer par une autre méthode la force électromotrice  $e(t)$ .

### Théorème d'Ampère-Maxwell

**Exercice 9 :** Dans le vide, le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = B_0 \cos(2x) \cos(\omega t - \beta y) \vec{e}_x$$

Calculer :

1. Le vecteur densité de courant de déplacement.
2. le vecteur excitation électrique  $\vec{D}$ .
3. La densité volumique de charges électriques.

**Exercice 10 :** Soit, dans le vide, un champ électrique de composantes :

$$E_x = 0 \quad E_y = 0 \quad E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

1. Calculer sa divergence et son rotationnel.
2. En déduire les composantes du champ magnétique  $\vec{B}$  qui l'accompagne ;
3. Calculer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ .
4. Quelle relation doit lier  $\alpha$  et  $\beta$  pour que soient satisfaites les équations de Maxwell ?

**Exercice 11 :** Un matériau radioactif en forme de feuille plane d'épaisseur  $e$ , se désintègre en émettant des particules chargées. Au voisinage de la surface, l'émission des particules est homogène et perpendiculaire à la surface du matériau. Soit  $Q(t)$  la charge contenue, à l'instant  $t$ , dans le volume d'un tronçon cylindrique de section  $S$  de la feuille et soit  $\vec{j}$  le vecteur densité volumique de courant électrique.

1. Rappeler la définition du courant électrique  $I$  en fonction de la densité volumique de courant  $\vec{j}$ . A l'aide du principe de la conservation de la charge électrique, exprimer  $I$  en fonction de  $Q$ . En déduire l'expression de  $\vec{j}$  en fonction de  $Q$  et  $S$ .
2. En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrique au voisinage de la feuille en fonction de  $Q$  et  $S$ .
3. En déduire la densité de courant de déplacement  $\vec{j}_D$ .
4. Montrer, à l'aide du théorème d'Ampère-Maxwell et des résultats des questions précédentes, que le champ magnétique est nul au voisinage de la feuille. Conclusion ?

**Exercice 12 :** Un petit conducteur solide de rayon  $a$ , supporté par des disques isolants et non magnétiques, est placé sur l'axe d'un tube de faible épaisseur et de rayon interne  $b$ . Le conducteur intérieur et le conducteur extérieur sont parcourus par le même courant  $i$  dirigé dans des sens opposés selon leur génératrice.

1. Utiliser le théorème d'Ampère-Maxwell pour calculer les champs magnétiques  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  en un point quelconque de l'espace séparant les conducteurs.

2. Ecrire l'expression du flux  $d\Phi_B$  du champ magnétique à travers une bande étroite de longueur  $\ell$  parallèle à l'axe, de largeur  $dr$  située à une distance  $r$  de l'axe et se trouvant dans un plan contenant l'axe.
3. Intégrer l'expression de la question précédente sur la distance séparant les deux conducteurs et en déduire le flux total produit par le courant  $i$  dans le circuit.
4. Montrer que le coefficient d'auto-inductance  $L$  est :  $L = \ell \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

5. Utiliser l'équation

$$W_M = L \int_0^I i \, di = \frac{1}{2} LI^2$$

pour calculer l'énergie emmagasinée par le champ magnétique dans une longueur  $l$  de câble.

6. Sachant que l'expression de la densité d'énergie magnétique est

$$w_M = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

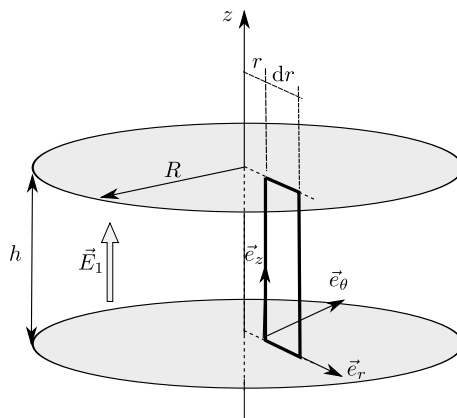
calculer l'énergie magnétique totale et comparer avec le résultat de la question précédente.

**Exercice 13 :** Un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  et un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  occupent la même région dans l'espace vide.

1. Si  $E = 650 \text{ V m}^{-1}$ , quelles sont les valeurs de  $B$  et  $H$  si les densités d'énergie du champ électrique et du champ magnétiques sont égales ?
2. Calculer le rapport  $\frac{E}{H}$  ? En quelle unité s'exprime ce rapport ?

## Approximation du Régime Quasi-Stationnaire

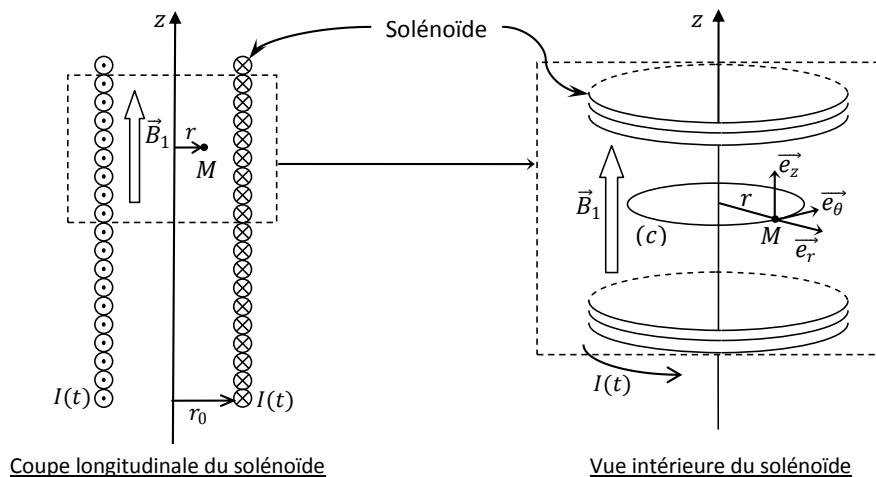
**Exercice 14 :** Un condensateur plan est formé d'un ensemble de deux disques conducteurs, de même rayon  $R$ , parallèles, de même axe  $Oz$ , distants de  $h \ll R$  et séparés par du vide. On applique, dans l'espace situé entre les deux disques, un champ électrique uniforme qui, dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , s'exprime par  $\vec{E}_1 = E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_z$ . On suppose qu'aucun des champs étudiés dans la suite ne dépend ni de  $z$  ni de  $\theta$ .



1. Calculer le vecteur densité de courant de déplacement dans le condensateur. Montrer qu'il existe dans cet espace un champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par  $\vec{E}_1$ .

2. A l'intérieur du condensateur le champ magnétique créé par le champ électrique, s'écrit  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_\theta$ . En utilisant le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale, et en utilisant l'écriture complexe, exprimer  $B_1$  en fonction de  $E_1, r, \omega, t$ , et  $c$ .
3. Le champ magnétique  $\vec{B}_1$ , crée lui-même un champ électrique noté  $\vec{E}_2$ . On suppose que le champ électrique  $\vec{E}_2$  est dirigé selon  $\vec{e}_z$ . On considère un rectangle parallèle à l'axe des  $z$  et dont les côtés parallèles à  $z$  sont respectivement aux positions  $r$  et  $r + dr$  tel que  $dr \ll r$ .
  - (a) Calculer le flux de  $\vec{B}_1$  à travers la surface de ce rectangle.
  - (b) Montrer que la circulation de  $\vec{E}_2$  sur ce rectangle s'écrit :  $\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = \alpha \frac{\partial E_2}{\partial r} dr$  ; donner l'expression de  $\alpha$  en fonction de  $h$
  - (c) En utilisant la forme intégrale de la loi de Faraday, établir la relation entre  $\frac{\partial E_2}{\partial r}$  et  $E_1$ . En déduire  $E_2$ , en fonction de  $E_1, \omega, r$  et  $c$ .
4. Écrire le champ électrique total sous la forme  $E_1 + E_2 = E_1 [1 - k^2(r)]$  et exprimer  $k(r)$ .
5. AN : On prend  $\omega = 6 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$  et  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ; calculer  $k(R)$  et commenter ce résultat.
6. On considère maintenant que  $\vec{E}_2$ , crée un champ magnétique  $\vec{B}_2$ , qui crée  $\vec{E}_3$ , qui crée  $\vec{B}_3$ , et ainsi de suite. On suppose que les champs électriques  $\vec{E}_i$ , sont dirigés selon  $Oz$ . En utilisant les résultats des questions précédentes, exprimer  $\frac{\partial E_3}{\partial r}$  en fonction de  $E_2$  puis en fonction de  $E_1$ . En déduire  $E_3$ , en fonction de  $E_1$  et de  $k(r)$ .
7. Quelle est l'expression du champ électrique total à la distance  $R = 10 \text{ cm}$  de l'axe si on néglige les champs dont l'amplitude ne dépasse pas 0,01% de l'amplitude de  $\vec{E}_1$  ? On prend  $\omega = 6 \times 10^7 \text{ rad s}^{-1}$  et  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

**Exercice 15 :** On considère un solénoïde (une bobine) d'axe  $Oz$ , de dimension infinie de section circulaire de rayon  $r_0$  et parcouru par un courant  $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ . On admet que le champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde, supposé vide, est uniforme et s'exprime par  $\vec{B}_1 = B_0 e^{i\omega t} \vec{e}_z$  dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ ,  $B_0$  étant une constante positive. On suppose dans la suite qu'aucun des champs étudiés ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $z$ .





1. En utilisant l'équation de Faraday-Maxwell sous forme intégrale et le contour (c), déterminer l'expression de  $E_1$  en fonction de  $B_1$ ,  $r$  et  $\omega$ . Les symétries du problème imposent pour ce champ électrique :  $\vec{E}_1 = E_1(r, t)\vec{e}_\theta$ .
2. Calculer le vecteur densité de courant de déplacement  $\vec{j}_{D1}$  dans le solénoïde. En déduire le champ magnétique  $\vec{B}_2$  créé par le champ électrique  $\vec{E}_1$  en supposant que le champ magnétique  $\vec{B}_2$  est dirigé selon  $Oz$ .
3. Montrer que le champ magnétique total dans le solénoïde peut s'écrire sous la forme

$$B_1 + B_2 = B_1 [1 - f^2(r)]$$

Expliciter  $f(r)$ .

A.N. : On prend  $\omega = 3 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $R = 2 \text{ cm}$  et  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ; calculer  $f(r)$  et commenter ce résultat.

4. Le champ magnétique  $\vec{B}_2$  crée à son tour un champ électrique  $\vec{E}_2$  orienté selon  $\theta$ . Généraliser le résultat obtenu dans la question 1 pour déterminer le champ électrique  $\vec{E}_2$ .
5. De même, le champ électrique  $\vec{E}_2$  crée un champ magnétique  $\vec{B}_3$  et ainsi de suite. Déterminer le champ magnétique  $B_3$  en fonction de  $B_1$  et de  $f(r)$ .
6. Quelle est l'expression du champ magnétique total  $B_T$ . Faire l'application numérique avec les mêmes données que celles proposées ci-dessus (question 3).
  - (a) Par quel champ peut-on approximer  $B_T$ ?
  - (b) Que peut-on dire sur le comportement des champs dans le solénoïde pour la fréquence utilisée?
  - (c) Comment peut-on écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de cette approximation?
  - (d) Comparer avec les résultats de l'exercice précédent et commenter.

# Chapitre 5

## Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

### 5.1 Equations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Dans le vide, au voisinage de tout point où les charges et les courants sont nuls, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.4)$$

Les équations pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  s'écrivent alors :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.5)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.6)$$

Dans le vide les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.7)$$

### 5.2 L'onde plane progressive sinusoïdale

#### 5.2.1 Relation de dispersion

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie, en notation complexe, par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5.8)$$

où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde donnant la direction de propagation de l'onde plane.

En utilisant la définition du laplacien vectoriel dans un système de coordonnées cartésiennes, on peut montrer que :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad (5.9)$$

L'équation de propagation s'écrit alors sous la forme

$$\left[ -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{E} = \vec{0} \quad (5.10)$$

L'onde plane progressive sinusoïdale constitue une solution particulière de l'équation d'onde seulement si la relation suivante, dite relation de dispersion, est satisfaite :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (5.11)$$

### 5.2.2 Structure de l'onde uniforme plane

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Gauss. En absence de charges électriques  $\rho = 0$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.12)$$

On montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.13)$$

Soit encore  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  ; ce qui revient à dire que le champ électrique  $\vec{E}$  est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Le champ électrique est dit transversal.

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.14)$$

On montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -i \vec{k} \times \vec{E} \quad (5.15)$$

D'où

$$-i \vec{k} \times \vec{E} = -i \omega \vec{B} \quad (5.16)$$

On en déduit le champ magnétique  $\vec{B}$

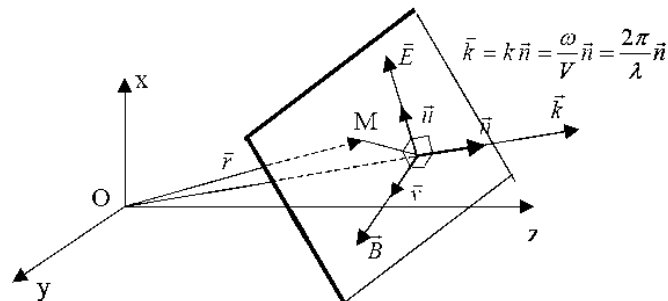
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (5.17)$$

En tenant compte des propriétés du produit vectoriel, on constate que :

- Le champ magnétique est perpendiculaire au plan  $(\vec{k}, \vec{E})$ . Le champ magnétique d'un onde plane progressive est donc transversal.
- La direction du champ magnétique est telle que le trièdre  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  est un trièdre direct.

- En tenant compte de la relation de dispersion,  $\omega = kc$ , le module du champ magnétique est :  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

Cet ensemble de propriétés permet de définir la structure de l'onde plane progressive harmonique (Figure ci-dessous).



## 5.3 Polarisation

### 5.3.1 Onde de polarisation rectiligne

Une onde électromagnétique plane est dite de polarisation rectiligne si le champ  $\vec{E}$  garde une direction constante (polarisation rectiligne). Dans le cas d'une variation sinusoïdale en fonction du temps il s'écrit en notation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.18)$$

où

$\vec{E}_0$  = vecteur constant

$\omega$  = pulsation de la fonction sinusoïdale

$\vec{k}$  : vecteur d'onde perpendiculaire au plan d'onde avec  $k = \omega/c$

$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$  : phase instantanée ou plus simplement phase de la grandeur variable.

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  vitesse de propagation dans le vide .

Les vecteurs forment toujours un trièdre direct et

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (5.19)$$

Pour préciser cette onde, supposons qu'elle se propage suivant  $z'z$  d'où

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.20)$$

On constate une double périodicité :

- Une périodicité temporelle : pour  $z$  donné le champ varie sinusoïdalement en fonction du temps avec une période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.21)$$

ou une fréquence

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.22)$$

( $f$  est en hertz).

- Une périodicité spatiale : à un instant  $t$  donné le champ varie sinusoidalement en fonction de  $z$  avec une période

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.23)$$

( $\lambda$  est appelée la longueur d'onde dans le vide). On peut remarquer que la longueur d'onde  $\lambda$  est égale à la distance parcourue par l'onde pendant une période.

### 5.3.2 Onde de polarisation quelconque

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé que le champ  $\vec{E}$  (donc  $\vec{B}$  également) gardait une direction constante. Dans le cas général, il n'en est pas toujours ainsi et les composantes du champ peuvent se mettre sous la forme :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz - \phi_1) \quad (5.24)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \phi_2) \quad (5.25)$$

$\phi_1, \phi_2$  pouvant être différentes.

Etudions le comportement du champ  $\vec{E}$  dans le plan  $z = 0$ . Les résultats obtenus se retrouvent avec un décalage temporel dans tout plan  $z = cte$ . Les composantes du champ s'écrivent :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \phi_1) \quad (5.26)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \phi_2) \quad (5.27)$$

$$E_z = 0 \quad (5.28)$$

et si l'on prend pour origine des temps un instant où  $E_x$  passe par sa valeur maximale on a :

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t) \quad (5.29)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - \phi) \quad (5.30)$$

avec  $\phi = \phi_2 - \phi_1$ .

On peut déjà dire que l'extrémité du vecteur décrit une courbe inscrite dans un rectangle de côtés  $2E_{0x}$  et  $2E_{0y}$ . D'autre part en développant l'expression de  $\frac{E_y}{E_{0y}}$  et en éliminant le temps il vient :

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi) \quad (5.31)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi) + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \sin(\phi) \quad (5.32)$$

$$\left[ \frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi) \right]^2 = \left[ 1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 \right] \sin^2(\phi) \quad (5.33)$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\phi) = \sin^2(\phi) \quad (5.34)$$

Pour  $\phi$  quelconque, cette équation est celle d'une ellipse : on dit que l'onde a une polarisation elliptique ; pour  $\phi = m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) l'ellipse dégénère en une droite et l'onde est dite à polarisation rectiligne. Enfin si  $E_{0x} = E_{0y}$  et si  $\phi = (2m + 1)\pi/2$  l'onde est dite à polarisation circulaire.

## 5.4 Energie électromagnétique : vecteur de Poynting

La propagation de l'énergie se manifeste expérimentalement dans de nombreux cas :

- On peut ressentir son effet si l'on s'expose aux rayons solaires ou au rayonnement d'une source chaude ;
- De même tout émetteur radio expédie de l'énergie à travers l'espace, une infime partie de cette dernière étant captée par votre récepteur radio.

Nous allons essayer de relier localement cette énergie qui se propage, au champ électromagnétique qui la transporte. Nous supposons le milieu de propagation parfait, c'est à dire homogène, isotrope et linéaire.

### 5.4.1 Onde de forme spatiale et temporelle quelconques

Nous admettrons que les densités d'énergie électrique et magnétique calculées en régime stationnaire sont toujours valables en régime variable ; la densité d'énergie électromagnétique  $w$  en un point quelconque du milieu parcouru par une onde électromagnétique est donc à chaque instant :

$w =$  densité d'énergie électrique + densité d'énergie magnétique

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (5.35)$$

Considérons dans le milieu, un volume  $\tau$  limité par une surface ( $S$ ). L'énergie électromagnétique qu'il contient est à chaque instant :

$$W = \iiint_{(\tau)} w \, d\tau \quad (5.36)$$

Pendant un temps  $dt$  l'accroissement d'énergie dans ( $\tau$ ) sera  $dW$  et la puissance instantanée  $p'$  acquise par ce volume sera

$$p' = \frac{dW}{dt} = \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w}{\partial t} \, d\tau \quad (5.37)$$

On a :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.38)$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \left[ \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5.39)$$

D'après une relation de transformation, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (5.40)$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (5.41)$$

et

$$p' = -\iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau \quad (5.42)$$

La puissance électromagnétique instantanée perdue par le volume  $(\tau)$  est :

$$-p' = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau \quad (5.43)$$

Elle représente la puissance électromagnétique qui sort du volume  $(\tau)$ , c'est à dire la puissance moyenne  $p$  rayonnée par ce volume.

$$p = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau \quad (5.44)$$

D'après la formule d'Ostrogradsky, on peut écrire :

$$p = \iint_{(S)} \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} \quad (5.45)$$

Le vecteur

$$\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (5.46)$$

est appelé le vecteur de Poynting. Sa direction donne en chaque point, la direction d'écoulement de l'énergie et son flux à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique instantanée rayonnée par cette surface. Les courbes tangentes en chaque point au vecteur de Poynting peuvent être considérées comme des trajectoires de l'énergie ; on les appelle les *rayons électromagnétiques*.

### 5.4.2 Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale

Puisque  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$  forment un trièdre trirectangle direct le vecteur  $\vec{R}$  a même direction et sens que  $\vec{k}$  c'est à dire que l'énergie s'écoule dans le sens de propagation (ce résultat n'est pas général ; en effet dans un milieu anisotrope par exemple  $\vec{R}$  et  $\vec{k}$  ne sont pas colinéaires).

La puissance instantanée  $p_u$  traversant une surface unitaire  $(S)$  perpendiculaire à la direction de propagation est

$$p_u = \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \|\vec{R}\| dS = \|\vec{R}\| \iint_{(S)} dS = \|\vec{R}\| S \quad (5.47)$$

La puissance moyenne traversant ( $S$ ) est alors

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_u dt = \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{R}\| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right\| dt \quad (5.48)$$

or  $\vec{B} \perp \vec{E}$ , et  $\|\vec{B}\| = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \|\vec{E}\|$ , d'où

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} dt \quad (5.49)$$

Si l'onde est polarisée rectilignement alors

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.50)$$

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt \quad (5.51)$$

$$\langle P_u \rangle = \frac{E_0^2}{T} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos[2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]] dt \quad (5.52)$$

$$\langle P_u \rangle = E_{eff}^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{E_{eff}^2}{Z_0} \quad (5.53)$$

où  $E_{eff}$  est la valeur efficace de  $E$ .

Le flux d'énergie traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation est une constante dépendant du milieu et proportionnelle au carré de la valeur efficace du champ électrique.

## 5.5 Relations de passage

### Composante tangentielle et composante normale de $\vec{E}$

A la traversée d'une surface ( $\Sigma$ ) portant des charges avec une densité superficielle  $\sigma$ , les relations locales s'écrivent :

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \quad (5.54)$$

$$E_{N2} - E_{N1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (5.55)$$

où  $\vec{E}_T$  est la composante de  $\vec{E}$  dans le plan tangent à ( $\Sigma$ ) en  $M$ , tandis que  $E_N$  mesure de la composante de  $\vec{E}$  suivant la normale  $\vec{n}$  en  $M$  et orientée de la face (1) vers la face (2) de ( $\Sigma$ ).



### Composante tangentielle et composante normale de $\vec{B}$

A la traversée d'une surface ( $\Sigma$ ) séparant parcourue par des courants de densité superficielle  $\vec{j}_S$ , les relations locales  $\vec{B}$  deviennent :

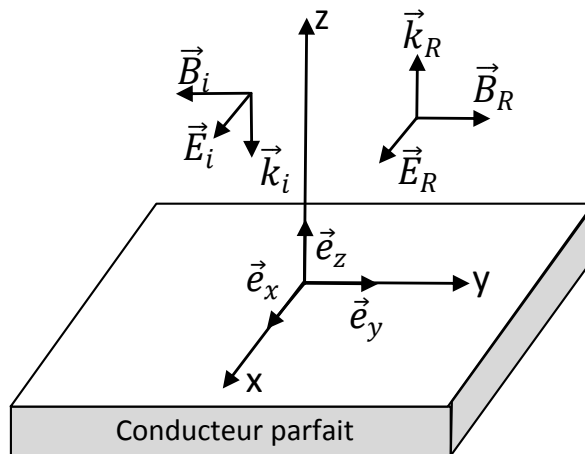
$$B_{N2} = B_{N1} \quad (5.56)$$

$$\vec{B}_{T2} - \vec{B}_{T1} = \mu_0 \vec{j}_S \times \vec{n} \quad (5.57)$$

où  $B_N$  est la composante de  $\vec{B}$  suivant la normale au point  $M$  considéré orientée de la face (1) vers la face (2) de ( $\Sigma$ ), tandis que  $\vec{B}_T$  est la composante de  $\vec{B}$  dans le plan tangent à ( $\Sigma$ ) en  $M$ .

## 5.6 Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

Considérons une onde plane incidente uniforme sinusoïdale polarisée rectilignement ( $\vec{E}_i \parallel Ox$ ) se propageant dans le vide (ou l'air) suivant  $zO$  et arrivant sous incidence normale, à la surface plane d'un conducteur de conductivité infinie (conducteur parfait). Des considérations énergétiques montrent qu'il n'y pas d'onde transmise ( $\vec{E}_T = \vec{0}$  et  $\vec{B}_T = \vec{0}$ ) et que les seuls courants vrais pouvant être induits par cette onde le sont sur la surface du métal. Les raisons de symétrie impliquent que les directions de polarisation des vecteurs incident et réfléchi sont identiques.



Les champs électrique et magnétique des ondes incidente et réfléchie sont

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad (5.58)$$

$$\vec{E}_{0R} = E_{0R} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_R = \frac{E_{0R}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (5.59)$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique permet d'écrire à la traversée de la surface de séparation ( $z = 0$ )

$$E_{0i} + E_{0R} = 0 \quad \text{d'où} \quad E_{0R} = -E_{0i} \quad (5.60)$$

Le champ électrique réfléchi a même amplitude que le champ électrique incident et il est déphasé de  $\pi$  par rapport à ce dernier. Pour que le trièdre  $(\vec{k}_R, \vec{E}_R, \vec{B}_R)$  soit direct, il faut que le champ magnétique réfléchi  $\vec{B}_R$  soit dans le même sens que le champ magnétique incident  $\vec{B}_i$  c'est à dire que sa réflexion s'effectue sans changement de phase. En définitive les ondes incidente et réfléchie s'écrivent

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad (5.61)$$

$$\vec{E}_R = -E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_R = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (5.62)$$

Dans le vide, l'onde résultante est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et ses vecteurs champs ont pour valeur

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_R = E_{0i} (e^{+ikz} - e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_x \quad (5.63)$$

$$\vec{E} = 2E_{0i} \sin(kz) e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \vec{e}_x \quad (5.64)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_R = -\frac{E_{0i}}{c} (e^{+ikz} + e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad (5.65)$$

$$\vec{B} = 2\frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) e^{i(\omega t + \pi)} \vec{e}_y \quad (5.66)$$

En revenant à la notation réelle

$$\vec{E} = 2E_{0i} \sin(kz) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x \quad (5.67)$$

$$\vec{B} = 2\frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \pi) \vec{e}_y \quad (5.68)$$

Ces relations montrent que les champs ne se propagent plus mais qu'ils oscillent sinusoidalement en fonction du temps avec une amplitude qui est fonction de la distance  $z$ , leur déphasage étant de  $\frac{\pi}{2}$  on dit que l'onde est stationnaire.

L'amplitude du champ électrique est nulle pour  $k_1 z = \frac{2\pi}{\lambda} z = l\pi$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ), c'est à dire pour  $z = l\frac{\lambda}{2}$ .

L'amplitude du champ magnétique est nulle pour  $k_1 z = \frac{2\pi}{\lambda} z = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ), c'est à dire pour  $z = \left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ .

Les points où l'amplitude est nulle sont appelés les nœuds et les points où l'amplitude est maximale sont appelés les ventres.

## 5.7 Exercices

### Généralités sur les ondes

**Exercice 1 :** Vérifier que les fonctions suivantes :

1.  $E(x, t) = E_0 \sin\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right]$
2.  $E(x, t) = E_0 \exp\left[j\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right]$

$$3. E(x, t) = E_0 \cos[k(x \pm ct)]$$

sont solutions de l'équation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

où  $x$ ,  $t$  et  $c$  représentent respectivement la position, le temps et la vitesse de propagation. Déterminer les dimensions des constantes  $E_0$ ,  $\omega$ ,  $k$ .

**Exercice 2 :** Le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide est donnée par :

$$\vec{E} = E_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_y$$

1. Quelle est la direction de polarisation ? Quelle est la direction de propagation ? Quelle est la nature de l'onde (longitudinale ou transversale) ? Expliquer pourquoi on peut dire que cette onde est plane. Quelle est l'amplitude de cette onde ? Quel terme correspond à la pulsation ? Quel terme correspond à la vitesse de propagation ?
2. Donner l'expression de la longueur d'onde  $\lambda$ . Quels sont les abscisses des points où l'onde est déphasée de  $\pi/3$  par rapport à l'origine ( $x = 0$ ) ? Exprimer la distance de ces points par rapport à l'origine en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ .
3. Quelle différence de phase existe-t-il entre deux points distants de  $3\lambda/4$  ?
4. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$ . Exprimer le déphasage de  $\vec{B}$  par rapport à  $\vec{E}$ .
5. On superpose à cette onde, une deuxième onde progressive de même amplitude, de même pulsation et se propageant dans le même sens mais déphasée de  $\phi$  par rapport à la première.  
Donner l'expression de l'onde résultante (amplitude et phase en fonction de  $E_0$  et  $\phi$ ). Que devient l'onde résultante lorsque  $\phi = 0$  ?
6. On superpose à l'onde initiale définie au début de l'exercice, une deuxième onde progressive de même amplitude, de même pulsation mais se propageant dans le sens opposé.

Donner l'expression de l'onde résultante (amplitude et phase en fonction de  $E_0$  et  $x$ ). Quelle est la nature de l'onde obtenue ? Donner la position des maxima et des minima pour le champ électrique. Discuter le résultat obtenu.

## Propagation des ondes électromagnétiques

**Exercice 3 :** Equations de Maxwell, équation d'ondes

1. Rappeler les équations de Maxwell reliant les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .
2. Etablir les équations de propagation du champ  $\vec{E}$  et du champ  $\vec{B}$  dans le vide.
3. Les équations de propagation de  $\vec{E}$  et de  $\vec{B}$  dans le vide admettent comme solutions dans le cas de la propagation d'une onde plane monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

où  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$  sont deux vecteurs constants.

- (a) Calculer

- $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ,
- $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ ,
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ,
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ .

(b) Montrer que

- $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont transversaux
- $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires.

4. On considère une onde plane électromagnétique

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

- Préciser
  - le sens et la vitesse de propagation,
  - la direction de vibration de  $\vec{E}$ .
- Déterminer  $\vec{B}$ .

5. On considère une onde plane électromagnétique suivante :

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + E_2 \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y$$

- Préciser
  - le sens et la vitesse de propagation,
  - la nature de la polarisation de  $\vec{E}$ .
- Déterminer  $\vec{B}$ .

**Exercice 4 :** Soit une onde électromagnétique plane et progressive, de pulsation  $\omega$  se propageant dans le vide. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est défini par ses composantes, par rapport à un repère orthonormé  $Oxyz$  :

$$B_x = 0, \quad B_y(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx), \quad B_z = 0$$

1. A l'aide des équations de Maxwell, calculer les composantes du champ électrique  $\vec{E}$  en fonction de  $B_0$ .
2. Calculer les composantes du vecteur de Poynting  $\vec{R}$ .
3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée à travers une surface  $S$  perpendiculaire à la direction de propagation.

**Exercice 5 :** Soit une onde électromagnétique harmonique progressive plane, de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $E_0$  se propageant dans le vide. Le champ électrique de cette onde est parallèle à l'axe des  $z$  et la direction de propagation est contenue dans le plan  $xOy$  et fait un angle  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  avec l'axe des  $x$ .

1. Ecrire les expressions des champs  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  qui décrivent cette onde.
2. Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\mathcal{R}}$ .
3. En déduire la valeur instantanée et la valeur moyenne du flux de puissance (puissance par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation).

**Exercice 6 :** Un laser produit un faisceau de longueur d'onde  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ . La puissance moyenne de l'onde est 1 mW. Le diamètre du faisceau est  $D = 2 \text{ mm}$ .

1. Calculer la fréquence et l'intensité du rayonnement.
2. Calculer les amplitudes des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  du faisceau.
3. Calculer l'énergie électromagnétique contenue dans 0.7 m de faisceau.

**Exercice 7 :** Un laser en continu émet en permanence 100 W dans un faisceau de  $0.25 \text{ cm}^2$  de section. Quelle est l'amplitude du champ électrique associé aux ondes planes que transporte le faisceau ?

**Exercice 8 :** On considère une onde électromagnétique, progressive, polarisée rectilignement et sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , se propageant dans le vide (caractérisé par  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (MKSA)). L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct  $Oxyz$ . L'onde se propage dans la direction  $\vec{O}u$  du plan  $Oxy$ , faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ . Le champ électrique de l'onde étant parallèle à  $Oz$  et  $E(O, t) = E_0 \cos(\omega t)$ ,  $O$  étant l'origine de l'espace.

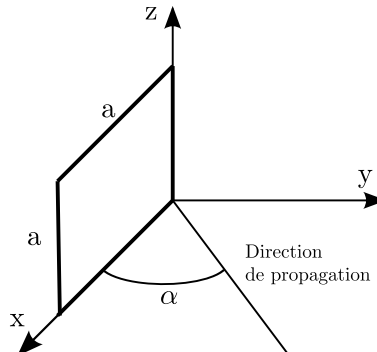
1. Ecrire les composantes du vecteur  $\vec{k}$  puis celles du champ  $\vec{E}(M, t)$  au point  $M$  de coordonnées  $x, y$  et à l'instant  $t$ .
2. En déduire les composantes du champ magnétique de l'onde  $\vec{B}(M, t)$ .
3. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique  $\mathcal{E}(M, t)$  puis sa valeur moyenne.
4. Exprimer les composantes du vecteur de Poynting  $\vec{\mathcal{P}}(M, t)$  puis son module et enfin sa valeur moyenne. Quelle relation a-t-on entre les valeurs moyennes de  $\mathcal{E}$  et de  $\|\vec{\mathcal{P}}\|$  ?
5. Cette onde transporte une intensité moyenne de  $0.2 \text{ W/m}^2$ , évaluée à travers une surface normale à la direction de propagation. Quelles sont les valeurs de  $E_0$  et de l'amplitude  $B_0$  du champ magnétique ?

**Exercice 9 :** Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale se propage dans le vide. Son champ électrique est porté par l'axe  $Oy$  d'un repère  $Oxyz$ , tel que :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

1. Quelle est la direction de propagation de cette onde ?
2. Un cadre rectangulaire  $CDC'D'$  de côtés  $a$  et  $b$  de milieu  $O$  est placé dans le plan  $Oxy$ , avec  $a$  parallèle à  $Oy$  et  $b$  parallèle à  $Ox$ . Le cadre porte  $N$  tours d'un fil conducteur formant un circuit fermé. Calculer la circulation de  $\vec{E}$  le long du circuit. Dans le cas où  $\lambda \gg b$ , donner une expression simplifiée de la f.é.m. dans le circuit.
3. A partir des équations de Maxwell déterminer les composantes du champ magnétique  $\vec{B}$  de l'onde.
4. Si  $b \gg \lambda$ , on pourra considérer que  $\vec{B}$  est uniforme sur la surface du cadre et égal à sa valeur en  $O$  centre du cadre. Calculer, dans cette approximation, le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit et en déduire la f.e.m. induite. Comparer avec le résultat de la question 2°).
5. A.N. Calculer l'amplitude de la f.e.m. induite pour  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 1837 \text{ m}$ ,  $N = 10$  et  $E_0 = 1 \text{ V m}^{-1}$ .

**Exercice 10 :** Une onde électromagnétique plane sinusoïdale, linéairement polarisée de longueur d'onde  $\lambda = 10^{-2}$  m se propage dans le vide. Son intensité moyenne est  $I = 0.1 \text{ W m}^{-2}$ . Sa direction de propagation se trouve dans le plan  $xy$  et fait avec l'axe des  $x$  un angle  $\alpha = 45^\circ$ . Le champ électrique oscille parallèlement à l'axe des  $z$ .



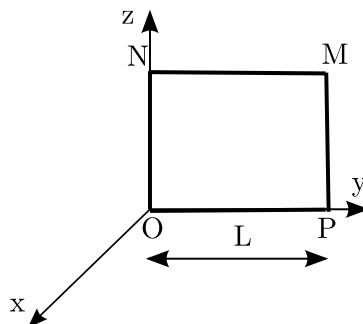
1. Sachant que le trièdre  $Oxyz$  est orthonormé, établir les expressions décrivant les variations, en fonction du temps et de la position, des champs électrique et magnétique et du vecteur de Poynting.
2. Dans le plan  $xOz$ , on dispose un cadre carré de côté  $a = 1$  cm. calculer la puissance électromagnétique moyenne qui passe à travers ce cadre.

## Détection d'ondes électromagnétiques

**Exercice 11 :** On considère une onde électromagnétique plane à polarisation rectiligne se propageant dans l'espace vide rapporté au repère orthonormé  $Oxyz$ . Le champ électrique  $\vec{E}$  a pour composantes

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \exp[j(\omega t - kx)], \quad E_z = 0$$

On place dans le plan  $xOy$ , une spire conductrice carrée  $OPMN$  de côté  $L$ , telle que  $P = (L, 0, 0)$ ,  $M = (L, L, 0)$  et  $N = (0, L, 0)$ .



1. Calculer les composantes de l'induction  $\vec{B}$ . En déduire celles du vecteur de Poynting  $\vec{R}$  ainsi que sa valeur moyenne  $\langle R \rangle$ .
2. Calculer le flux de  $\vec{B}$  à travers la spire. En déduire la f.é.m induite aux bornes de cette spire.
3. Retrouver ce résultat en calculant la circulation du champ électrique le long du périmètre  $OPMN$  de la spire.

4. Expliquer pourquoi les deux méthodes donnent le même résultat.

**Exercice 12 :** Une onde électromagnétique sinusoïdale, plane, de fréquence  $f = 2$  MHz, se propage horizontalement dans le vide. Son vecteur champ électrique est vertical avec une amplitude  $E_M = 1 \text{ mV m}^{-1}$ , à l'endroit où se trouve un cadre rectangulaire, de longueur 25 cm, de largeur 15 cm, et sur lequel sont bobinées 12 spires de fil conducteur. Les grands côtés du cadre sont verticaux, et celui-ci est placé de façon à recevoir le maximum du flux de  $\vec{B}$ .

1. Calculer la longueur d'onde  $\lambda$ , et l'amplitude du champ magnétique  $B_M$  associé à cette onde.
2. Calculer la f.é.m  $e$  induite dans le cadre, et son amplitude  $e_M$ . Quelle erreur commet-on, lorsqu'on suppose que le champ magnétique est uniforme sur la surface du cadre.
3. Les deux extrémités du fil du cadre sont reliées aux deux armatures d'un condensateur de capacité variable  $C$ . On agit sur la capacité jusqu'à ce que la d.d.p aux bornes du condensateur soit maximale  $U_M = 100 \mu\text{V}$ ; la capacité est alors  $C = 800 \text{ pF}$ . En déduire la self  $L$  du cadre et la résistance totale du circuit.

### Superposition d'ondes électromagnétiques

**Exercice 13 :** Soit deux ondes électromagnétiques, de même pulsation  $\omega$ , dont les champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ , de même amplitude  $E_0$ , sont portés par le même axe  $x'Ox$ . La première onde se propage dans la direction  $\vec{Oy}$ , l'autre dans la direction opposée.

1. Donner l'expression de  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ .
2. Donner l'expression du champ  $\vec{E}$  résultant.
3. En déduire l'expression du champ magnétique résultant  $\vec{B}$ .
4. Calculer la valeur moyenne du module du vecteur de Poynting.

**Exercice 14 :** L'espace étant rapporté au repère orthonormé  $Oxyz$ , on désigne par  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ , les vecteurs unitaires respectifs des axes  $Ox$  et  $Oy$ . Soient deux ondes électromagnétiques planes se propageant dans le vide et dont les vecteurs champs électriques associées aux ondes 1 et 2 sont respectivement :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 \exp[j(\omega t - kx)] \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 &= E_0 \exp[j(\omega t - ky)] \vec{e}_z\end{aligned}$$

1. On demande :
  - (a) Les vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  de l'onde 1 et  $\vec{k}_2$  de l'onde 2.
  - (b) La direction de propagation de chacune d'elles.
  - (c) la polarisation (longitudinale ou transversale) de chacune d'elles.
  - (d) Les champs  $\vec{H}_1$  et  $\vec{H}_2$  associés à  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  respectivement.
2. Calculer le champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  de l'onde résultante et l'écrire en notation réelle sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cos[\omega t - \phi(x, y)]$$

- Donner les expressions de  $\vec{\mathcal{E}}(x, y)$  et de  $\phi(x, y)$ .
- Quel est le vecteur d'onde  $\vec{k}$  de cette onde et sa direction de propagation ?
- Dans quelles régions de l'espace observe-t-on des ondes stationnaires pour  $\vec{E}$ ? Donner le lieu géométrique des nœuds et celui des ventres.

**Exercice 15 :** L'espace étant rapporté au repère orthonormé  $Oxyz$ , on désigne par  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ , les vecteurs unitaires respectifs des axes  $Ox$  et  $Oy$ . Soient deux ondes électromagnétiques planes se propageant dans le vide et dont le vecteur excitation du champ magnétique résultant est donné par :

$$\vec{H} = H_m \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x - H_m \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

- Calculer, en fonction de  $H_m$ , les composantes du champ électrique  $\vec{E}$ .
- Donner les caractéristiques du champ électrique  $\vec{E}$  (polarisation, direction de propagation).

**Exercice 16 :** Deux ondes électromagnétiques harmoniques planes et progressives, toutes deux de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $E_0$  se propagent dans le vide suivant respectivement l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$ . Les champs électriques des deux ondes sont parallèles à l'axe des  $z$ .

- Calculer les composantes du champ électrique résultant  $\vec{\mathcal{E}}$ .
- Déterminer la direction de propagation et la vitesse de phase  $V_\phi$  de l'onde résultante.
- Déterminer les plans dans lesquels  $|\vec{\mathcal{E}}|$  est maximum, minimum.
- Calculer les composantes du champ magnétique résultant  $\vec{\mathcal{B}}$ .
- Déterminer les plans dans lesquels le vecteur  $\vec{\mathcal{B}}$  effectue des oscillations circulaires.
- Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\mathcal{R}}$ .
- En déduire la valeur instantanée et la valeur moyenne du flux de puissance (puissance par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation).

## Onde sphérique

**Exercice 17 :**

Dans le vide et en absence de courant, le champ électrique en un point  $M$  de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta$$

avec  $k = \omega/c$  où  $c$  est la vitesse de la lumière.

- Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  associé.
- Calculer la densité volumique d'énergie de ce champ électromagnétique. Comment varie cette grandeur en fonction de  $r$ .
- (a) Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.



- (b) Quelle est l'orientation de ce vecteur ? Commenter. Faire un dessin montrant l'orientation des différentes grandeurs vectorielles en  $M$ .
4. Calculer la puissance électromagnétique traversant une sphère d'origine  $O$  et de rayon  $r$  ainsi que sa valeur moyenne. Conclure.  
A.N : Calculer la puissance moyenne pour :  
 $E_0 = 3 \text{ mV m}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .
5. Quel est le type d'onde qui pourrait être décrit par ce champ électromagnétique ?

# Chapitre 6

## Les équations de Maxwell dans les milieux

Nous allons dans ce chapitre utiliser les équations de Maxwell dans les milieux matériels pour étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isolant.

### 6.1 Propriétés électromagnétiques des milieux matériels

#### 6.1.1 Polarisation d'un milieu matériel

##### Dipôles induits

Un atome est un objet électriquement neutre. Il est classiquement représenté par un noyau composé de  $Z$  protons et donc porteur d'une charge  $+Zq_e$  et d'un nuage de  $Z$  électrons porteur d'une charge  $-Zq_e$ . En l'absence de champ extérieur, les centres de masse  $\vec{r}_p$  du noyau et  $\vec{r}_e$  du nuage électronique sont confondus :  $\vec{r}_p = \vec{r}_e$  (figure ci-dessous). En l'absence de champ extérieur, les centres de masse des charges positives (le noyau atomique) et des charges négatives (le nuage électronique) sont confondus (a). En présence d'un champ électrique externe  $\vec{E}$ , la force électrique déplace les centres de masse dans des directions opposées. Le champ crée un dipôle électrostatique interne à l'atome (b).

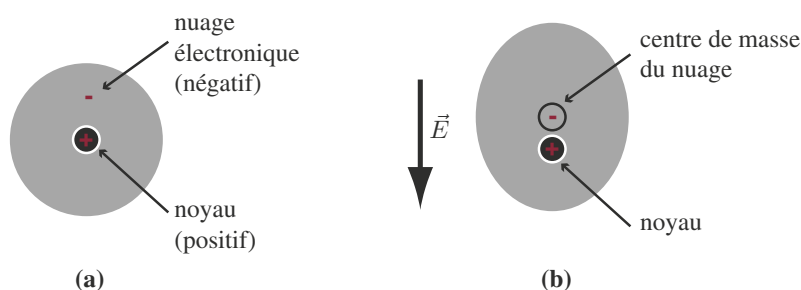


FIGURE 6.1: Polarisation microscopique induite par un champ électrique

En présence d'un champ électrique  $\vec{E}$  que l'on suppose constant, le noyau et le nuage électronique subissent des forces électriques opposées. Il en résulte un écart entre les

centres de masse et donc la création d'un dipôle : les charges  $+Nq_e$  et  $-Nq_e$  sont séparées d'une petite distance  $\vec{\delta}$ . Il en résulte une polarisation atomique, également appelée polarisation microscopique. Chaque atome placé dans le champ  $\vec{E}$  porte un moment dipolaire

$$\vec{p} = Zq_e \vec{\delta} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E} \quad (6.1)$$

où  $\alpha = 4\pi r_0^3$  est la polarisabilité électronique de l'atome. Cette quantité ne dépend pas du nombre d'électrons mais de la taille  $r_0$  de l'atome .

### Dipôles permanents

Certaines molécules ont une distribution de charges asymétrique, même dans leur état fondamental (HCl, H<sub>2</sub>O, ...). Elles ont un moment dipolaire permanent même en l'absence de champ électrique extérieur. Mais elles se déplacent et tournent librement sous l'effet de l'agitation thermique, de sorte qu'elles ne privilégient aucune direction et, qu'en moyenne, le moment dipolaire de l'échantillon est nul. Si l'on applique un champ électrique, les dipôles locaux ont tendance à s'orienter dans la direction du champ. Sous l'effet combiné des forces électriques et de l'agitation thermique, l'orientation des dipôles reste cependant partielle ( elle augmente lorsque le champ augmente ou lorsque la température diminue) ; il apparaît un moment dipolaire macroscopique, donc une polarisation, fonction croissante du champ. En première approximation, la relation entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  est linéaire.

### Autres types de matériaux

Dans les matériaux ferro-électriques, les interactions entre les dipôles moléculaires permanents peuvent être si importantes qu'elles provoquent (à basse température) une orientation spontanée de ces dipôles, même en l'absence de champ.

Il existe également des matériaux où les mécanismes de polarisation sont encore plus compliqués. Par exemple, dans les piézo-électriques, la polarisation dépend explicitement des tensions mécaniques à l'intérieur du matériau et peut être induite par une déformation mécanique, même en l'absence de champ.

### Diélectriques

Un diélectrique est un milieu matériel

- qui ne conduit pas le courant électrique, c'est-à-dire dans lequel il n'y a pas intrinsèquement de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique,
- qui est capable de se polariser sous l'application d'un champ électrique.

### Polarisation macroscopique

Dans un milieu matériel composé d'un grand nombre d'atomes (ou de molécules) et soumis à un champ électrique externe, on observe d'une part l'apparition d'un grand nombre de dipôles électriquement induits et d'autre part l'orientation des dipôles permanents dans la direction du champ électrique. Chacun de ces dipôles contribue à la création d'un champ électrique de polarisation. Le nombre de dipôles par unité de volume définit le vecteur polarisation  $\vec{P}$ . En régime linéaire on admet que le vecteur polarisation  $\vec{P}$  est proportionnel au champ électrique inducteur  $\vec{E}$  ; ce qui s'exprime par la relation suivante :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (6.2)$$

Le paramètre  $\chi_e$  est la susceptibilité diélectrique du matériau. C'est un nombre positif sans dimension qui décrit la réaction macroscopique du milieu matériel. On considère que la charge électrique totale  $\rho_T$  est la somme des charges ne dépendant pas de l'état de polarisation de la matière appelées charges libres et des charges résultant de la polarisation appelées charges induites. Ces deux types de charges s'expriment respectivement par les densités volumiques de charge  $\rho$  et  $\rho_P$ . On montre que les effets de la polarisation d'un diélectrique sont équivalents à la superposition de :

- une densité volumique de charge  $\rho_P$ , répartie en volume, vérifiant l'équation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_P \quad (6.3)$$

- une densité surfacique de charge  $\sigma_P$ , répartie en surface, vérifiant l'équation

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma_P \quad (6.4)$$

Ces charges sont appelées charges de polarisation.

Sachant que :

$$\rho_T = \rho + \rho_P. \quad (6.5)$$

le théorème de Gauss s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_0} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} = \frac{\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (6.6)$$

On définit le champ électrique induit  $\vec{E}_{pol}$  lié à la polarisation macroscopique  $\vec{P}$  et au champ externe  $\vec{E}$  par :

$$\vec{E}_{pol} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad (6.7)$$

D'où

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{pol}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.8)$$

Le théorème de Gauss dans une surface contenant le milieu matériel polarisé s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{pol}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.9)$$

qui peut également se mettre sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot [(1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E}] = \rho \quad (6.10)$$

La densité de charge à prendre en compte dans cette équation est la densité de charges libres  $\rho$ .

La permittivité relative  $\varepsilon_r$  est définie par  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ . Le produit  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  est appelée permittivité absolue du milieu.

On obtient finalement le théorème de Gauss pour le champ électrique  $\vec{E}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \quad (6.11)$$

Cette relation constitue le théorème de Gauss pour un champ électrique en présence d'un milieu matériel de permittivité relative  $\varepsilon_r$ , en présence de charges libres  $\rho$ . La permittivité relative  $\varepsilon_r$  est un nombre sans dimension qui vaut 1 dans le vide, et est

supérieure à 1 dans un milieu matériel. La permittivité relative des matériaux dépend principalement du nombre de dipôles induits par unité de volume (la densité numérique mesurée en  $\text{m}^{-3}$ ), mais également des interactions entre ces dipôles. De plus, la présence d'un dipôle permanent porté par un atome ou une molécule influence la permittivité relative. Ainsi la permittivité des gaz est très proche de l'unité, tandis que la permittivité des liquides peut atteindre plusieurs dizaines. Quelques valeurs sont proposées dans le tableau ci-dessous.

phase	fluide	$\varepsilon_r$
gaz	air	1.00054
	O <sub>2</sub>	1.00049
	CO <sub>2</sub>	1.00092
	CH <sub>4</sub>	1.00081
	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	1.00258
liquide	eau	78
	trichloroéthylène	3.42
	éthanol	24.3
	glycérol	42.5

TABLE 6.1: Quelques valeurs de permittivités relatives  $\varepsilon_r$  pour des gaz et des liquides.

En régime sinusoïdal, la susceptibilité électrique et la permittivité relative sont des fonctions complexes de la pulsation de l'onde électrique appliquée au milieu. Dans les domaines d'application des diélectriques, il est courant d'écrire la permittivité relative sous la forme :

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r = \varepsilon'_r + i\varepsilon'_r \tan \theta_P \quad (6.12)$$

La quantité  $\varepsilon'_r \tan \theta_P$  est appelée le facteur de perte car il caractérise l'aptitude du milieu matériel à absorber l'énergie électromagnétique, en général convertie en énergie thermique. L'angle  $\theta_P$  est, lui, appelé l'angle de perte.

On utilise parfois le vecteur excitation électrique  $\vec{D}$  défini par

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}. \quad (6.13)$$

On obtient finalement le théorème de Gauss pour le vecteur excitation électrique  $\vec{D}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (6.14)$$

### 6.1.2 Conducteurs

En tout point d'un conducteur, il existe une relation entre le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  et le champ électrique total  $\vec{E}$  ( somme du champ électrostatique  $\vec{E}_S$  et du champ électromoteur  $\vec{E}_i$  ) dite relation d'Ohm-Kirchhoff :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (6.15)$$

où  $\gamma$  est la conductivité du milieu conducteur ; elle s'exprime en siemens par mètre ( $\text{S m}^{-1}$ ).

Cas particuliers :

– Isolants :  $\gamma = 0$

– Conducteurs parfaits :  $\gamma \rightarrow \infty$

### 6.1.3 Milieux aimantés

Lorsque une substance quelconque est introduite dans le champ magnétique créé par des courants électriques le champ magnétique change. Ceci peut être expliqué par le fait que chaque substance est magnétique, c'est-à-dire qu'elle est magnétisée (acquiert un moment magnétique) sous l'action d'un champ magnétique. Une substance magnétisée crée son propre champ magnétique  $\vec{B}'$  qui forme avec le champ magnétique primaire  $\vec{B}_0$  créé par les courants, le champ résultant :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (6.16)$$

Dans cette expression  $\vec{B}$  et  $\vec{B}'$  représentent en fait les valeurs moyennes des champs magnétiques sur un élément de volume infiniment petit. Le champ  $\vec{B}'$ , comme le champ  $\vec{B}_0$  créé par les courants de conduction n'a pas de sources (les charges magnétiques n'existent pas). Ainsi, pour le champ magnétique résultant en présence d'une magnétisation, le théorème de Gauss s'applique :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.17)$$

Ce qui signifie que les lignes de champ de  $\vec{B}$  sont continues partout en présence d'une substance.

*Mécanisme d'aimantation* : A l'heure actuelle il est établi que les molécules de plusieurs substances ont des moments magnétiques intrinsèques dus au mouvement de leurs charges intrinsèques. Chaque moment magnétique correspond à un courant circulaire créant un champ magnétique dans l'espace environnant. En absence de champ magnétique extérieur, les moments magnétiques des molécules sont orientés aléatoirement, et ainsi le champ magnétique résultant est nul, ainsi que le moment magnétique total de la substance. Ceci s'applique également aux substances qui n'ont pas de moment magnétique en absence de champ extérieur. Si une substance est placée dans un champ magnétique externe, sous l'action de ce champ magnétique les moments magnétiques des molécules acquièrent une direction prédominante et la substance est aimantée, c'est-à-dire que le moment magnétique résultant devient différent de zéro. Dans ce cas, les moments magnétiques des molécules individuelle ne se compensent plus et il en résulte l'apparition du champ magnétique  $\vec{B}'$ . Le processus d'aimantation des substances dont les molécules n'ont pas de moment magnétique en absence d'un champ extérieur est différent. Quand de tels matériaux sont introduits dans un champ magnétique extérieur, des courants circulaires élémentaires sont induits dans les molécules et la substance toute entière acquiert un moment magnétique, ce qui contribue également à la génération du champ  $\vec{B}'$ . La plupart des matériaux sont faiblement magnétisés lorsqu'ils sont introduits dans un champ magnétique. Seuls les matériaux ferromagnétiques comme l'acier, le nickel, le cobalt et leurs nombreux alliages ont des propriétés magnétiques prononcées.

Les matériaux ont des propriétés magnétiques très variables. Ils se classent dans les catégories suivantes :

- Un matériau est amagnétique lorsqu'il ne possède pas de propriétés magnétiques.
- Un matériau est ferromagnétique quand il porte une aimantation permanente ou de longue durée plus importante que le champ inducteur.
- Un matériau est paramagnétique quand il présente une aimantation en présence d'un champ extérieur seulement. L'aimantation est alignée avec le champ extérieur.

- Un matériau est diamagnétique quand il présente une aimantation opposée au champ inducteur (exemples : bismuth, graphite, antimoine). L'aimantation est en général faible.

*Magnétisation* : Le degré d'aimantation d'un matériau magnétisé est caractérisé par le moment magnétique par unité de volume. Cette quantité, appelée *aimantation* est représentée symbolique par  $\vec{M}$  ; par définition :

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_i \vec{m}_i \quad (6.18)$$

où  $\Delta\tau$  est un volume infiniment petit entourant un point donné et  $\vec{m}_i$  est le moment magnétique d'une molécule individuelle. La sommation est réalisée sur toutes les molécules contenues dans le volume  $\Delta\tau$ .

*Courant de magnétisation  $I_M$*  : La magnétisation d'une substance est causée par l'orientation préférentielle des moments magnétiques individuels de chaque molécule. On peut faire la même remarque au sujet des courants circulaires élémentaires associés avec chaque molécule et appelés courants moléculaires. On peut montrer qu'un tel comportement des courants moléculaires conduit à l'apparition d'un courant macroscopique appelé courant de magnétisation (ou courant ampérien). Rappelons que les courants ordinaires circulant dans les conducteurs et associés au mouvement des porteurs de charge sont appelés courants de conduction.

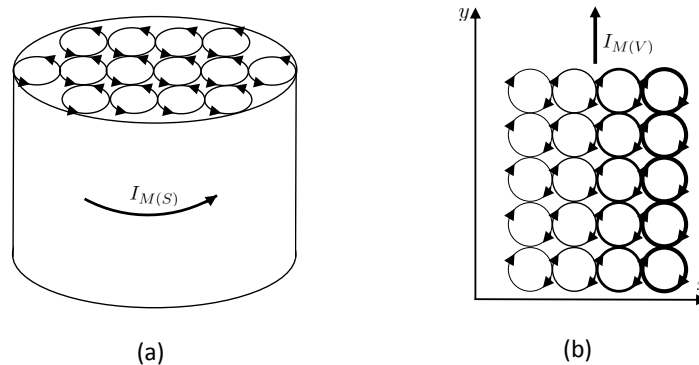


FIGURE 6.2: Courants de magnétisation (ampériens).  
(a) de surface ; (b) de volume

Afin de comprendre ce phénomène, considérons à titre d'exemple un cylindre constitué d'un corps aimanté homogène dont l'aimantation  $\vec{M}$  est uniforme et dirigée selon l'axe du cylindre (figure (a) ci-dessus). Les courants moléculaires des molécules adjacentes ont des sens opposés et se compensent mutuellement. Les seuls courants moléculaires qui ne sont pas annulés sont ceux qui émergent sur la surface latérale du cylindre. Ces courants forment les courants magnétisant macroscopiques de surface  $I_{M(S)}$  circulant sur la surface latérale du cylindre. Le courant magnétisant de surface  $I_{M(S)}$  induit le même champ magnétique macroscopique que toutes les molécules prises ensemble.

Considérons un autre cas, celui d'un corps aimanté inhomogène représenté par la figure (b) ci-dessus où l'épaisseur des lignes correspond à l'intensité des courants moléculaires. Le vecteur aimantation  $\vec{M}$  est dirigé vers l'arrière de la figure et augmente en amplitude avec la coordonnée  $x$ . On peut voir que les courants moléculaires ne se compensent plus dans le volume de la substance, et il en résulte un courant de magnétisation volumique

$I_{M(V)}$  dont le sens est selon l'axe des  $y$ . Nous pouvons dans chacun de ces cas parler de vecteur densité de courant surfacique  $\vec{j}_{M(S)}$  et de densité de courant volumique  $\vec{j}_{M(V)}$  qui se mesurent respectivement en  $A\ m^{-1}$  et  $A\ m^{-2}$ . On peut montrer que le vecteur densité de courant magnétisant  $\vec{j}_{M(V)}$  et l'aimantation  $\vec{M}$  sont liés par la relation :

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{M(V)} \quad (6.19)$$

Dans les milieux aimantés placés dans un champ magnétique externe, des courants de magnétisation sont induits. Ainsi la circulation du vecteur  $\vec{B}$  doit prendre en compte non seulement les courants de conduction mais également les courants magnétisants :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_{M(V)}) \quad (6.20)$$

où  $I$  et  $I_{M(V)}$  sont respectivement les courants de conduction et de magnétisation, encadrés par le contour d'intégration  $\Gamma$ . Cette dernière équation peut être réécrite en utilisant les vecteurs densité de courant de conduction et de magnétisation :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \vec{j}_{M(V)}) \cdot d\vec{S} \quad (6.21)$$

Mais cette relation ne peut pas être exploitée dans le cas général car la détermination des densités de courants magnétisants  $\vec{j}_{M(V)}$  est un problème difficile. Nous utiliserons donc la relation équivalente à 6.19 :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{j}_{M(V)} \cdot d\vec{S} \quad (6.22)$$

d'où :

$$\oint_{(\Gamma)} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (6.23)$$

En utilisant le théorème de Stokes, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} \quad (6.24)$$

On introduit le vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (6.25)$$

qui s'exprime en  $A\ m^{-1}$  et dont le rotationnel est :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (6.26)$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme intégrale équivalente :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (6.27)$$

L'approximation usuellement utilisée consiste à considérer que l'aimantation  $\vec{M}$  est reliée au vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  par :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6.28)$$



où  $\chi_m$  est la susceptibilité magnétique du matériau. Elle est nulle pour les matériaux amagnétiques, négative pour les matériaux diamagnétiques, positive pour les matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques. Le champ magnétique total  $\vec{B}$  s'écrit alors :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.29)$$

La constante  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. Le nombre sans dimension  $\mu_r = 1 + \chi_m$  est la perméabilité relative dont la valeur est très importante dans les matériaux ferromagnétiques ( $\mu_r \approx 104$  pour le fer par exemple) et proche de l'unité pour les matériaux paramagnétiques.

Quand le champ magnétique est variable, on décrit formellement les effets de ce champ sur la matière par une perméabilité relative sous forme complexe :

$$\mu_r = \mu'_r + i\mu''_r \quad (6.30)$$

avec des parties réelle et imaginaire fonctions de la pulsation  $\omega$  du champ magnétique.

### 6.1.4 Equations de Maxwell dans les milieux matériels, homogènes, linéaires et isotopes

Dans le cas des milieux homogènes, linéaires et isotopes, les équations de Maxwell s'écrivent :

- Théorème de Gauss pour  $\vec{E}$

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$	$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon} d\tau$

- Equation du flux magnétique

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}) = 0$	$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

- Loi de Faraday

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

- Théorème d'Ampère-Maxwell

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \times (\vec{B}) = \mu \vec{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \left( \mu \vec{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$

où

- $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  est la permittivité absolue du milieu diélectrique
- $\varepsilon_r$  est la permittivité relative du milieu diélectrique.
- $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} = 8.854 187 817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  est la permittivité du vide
- $\mu = \mu_0 \mu_r$  est la perméabilité absolue du milieu
- $\mu_r$  est la perméabilité relative du milieu.

- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.256\,637\,061\,4 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$  est la perméabilité magnétique du vide,
- Dans le cas d'un conducteur ohmique on a  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  où  $\gamma$  est la conductivité électrique du milieu.

## 6.2 Relations de passage

### Composante tangentielle et composante normale de $\vec{E}$

A la traversée d'une surface ( $\Sigma$ ) séparant deux milieux et portant des charges vraies avec une densité superficielle  $\sigma$ , les relations locales s'écrivent :

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \quad (6.31)$$

$$\varepsilon_2 E_{N2} - \varepsilon_1 E_{N1} = \sigma \quad (6.32)$$

où  $\vec{E}_T$  est la composante de  $\vec{E}$  dans le plan tangent à ( $\Sigma$ ) en  $M$ , tandis que  $E_N$  mesure de la composante de  $\vec{E}$  suivant la normale  $\vec{n}$  en  $M$  et orientée du milieu (1) vers le milieu (2).

### Composante tangentielle et composante normale de $\vec{B}$

A la traversée d'une surface ( $\Sigma$ ) séparant deux milieux et parcourue par des courants vrais de densité superficielle  $\vec{j}_S$ , les relations locales  $\vec{B}$  deviennent :

$$B_{N2} = B_{N1} \quad (6.33)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{T2} - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{T1} = \vec{j}_S \times \vec{n} \quad (6.34)$$

où  $B_N$  est la composante de  $\vec{B}$  suivant la normale au point  $M$  considéré orientée du milieu (1) vers le milieu (2); tandis que  $\vec{B}_T$  est la composante de  $\vec{B}$  dans le plan tangent à ( $\Sigma$ ) en  $M$ .

## 6.3 Propagation dans les milieux diélectriques

Les milieux diélectriques sont des milieux isolants. Leur conductivité est extrêmement faible, de l'ordre de  $10^{-20}$  à  $10^{-12} \text{ S m}^{-1}$ , celle d'un conducteur métallique étant de l'ordre de  $10^7 \text{ S m}^{-1}$ , à température ambiante. Il est donc tout à fait raisonnable de prendre pour  $\gamma$  la valeur  $\gamma = 0$ . Par ailleurs dans de tels milieux,  $\rho_{libre} = 0$ .

Les équations de Maxwell se simplifient alors en :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = 0 \quad (6.35)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}) = 0 \quad (6.36)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.37)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}) = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.38)$$

En utilisant la même démarche que dans le chapitre précédent, on peut montrer que le champ électrique et le champ magnétique satisfont les équations de propagation suivantes :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (6.39)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (6.40)$$

où la vitesse de propagation de l'onde est :

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (6.41)$$

$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$  est l'indice de réfraction (ou indice optique) du milieu. Dans les milieux réels  $n$  est constant pour les grandes longueurs d'onde, tandis que pour les hautes fréquences il faut faire intervenir le phénomène de dispersion qui entraîne une dépendance de  $n$  avec la fréquence.

Dans la plupart des diélectriques  $\mu_r = 1$ , d'où  $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ .

On peut également montrer que l'impédance caractéristique d'un tel milieu peut s'écrire :

$$Z = \frac{Z_0}{n} \quad (6.42)$$

où  $Z_0$  est l'impédance caractéristique du vide.

## 6.4 Exercices

### Diélectriques

#### Exercice 1 : Modèle de Thomson et polarisation induite

Dans le modèle de l'atome de J.J Thomson, un atome d'hydrogène est représenté par un noyau de charge  $e$  occupant une sphère de rayon  $R$  avec une densité de charge constante. L'électron de charge  $-e$  se déplace à l'intérieur de cette sphère.

1. Quelle est la force subie par l'électron ? Quelle est sa position d'équilibre ?
2. On applique un champ  $\vec{E}_0$  uniforme et on suppose que le noyau reste immobile. Quelle force supplémentaire entraîne ce champ ? En admettant que ce champ est seul responsable de la polarisation de l'atome, montrer que le moment dipolaire peut se mettre sous la forme  $\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_0$ .  $\alpha$  est la polarisation de l'atome. Quelle est sa dimension, quelle est son ordre de grandeur ?
3. Pour quelle valeur de  $E_0$ , l'atome est-il ionisé ?

**Exercice 2 :** Trouver la polarisation  $\vec{P}$  dans un milieu diélectrique, homogène et isotrope avec  $\varepsilon_r = 2.8$  et  $\vec{D} = 3.0 \times 10^{-7} \vec{u}$  (C m<sup>-2</sup>).

**Exercice 3 :** Déterminer la valeur de  $\vec{E}$  dans un milieu dont la susceptibilité électrique est 3.5, avec  $\vec{P} = 2.3 \times 10^{-7} \vec{u}$  (C m<sup>-2</sup>).

**Exercice 4 :** Trouver les valeurs de  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  et  $\chi_e$  dans un diélectrique avec  $\varepsilon_r = 3.6$  et  $D = 285 \text{ nC m}^{-2}$ .

**Exercice 5 :** Etant donné  $\vec{E} = -3 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y - 2 \vec{e}_z$  ( $\text{V m}^{-1}$ ) dans la région  $z < 0$ , avec  $\varepsilon_r = 2.0$ , trouver  $\vec{E}$  dans la région  $z > 0$  avec  $\varepsilon_r = 6.5$ .

**Exercice 6 :** Soit deux sphères concentriques dont les potentiels et les rayons sont respectivement  $V = -25 \text{ V}$ ,  $r = 2 \text{ cm}$  pour la première sphère et  $V = 150 \text{ V}$ ,  $r = 35 \text{ cm}$  pour la seconde sphère. L'espace entre les deux conducteurs est occupé par un diélectrique pour lequel  $\varepsilon_r = 3.12$ . Trouver la densité de charges à la surface des conducteurs.

## Conducteurs

**Exercice 7 :** Un conducteur en cuivre de conductivité  $5.8 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}$ , a un diamètre de  $2.05 \text{ mm}$ . Une longueur de  $15 \text{ m}$  est parcourue par un courant d'intensité  $20 \text{ A}$ . Trouver l'intensité du champ électrique  $\vec{E}$ , la vitesse d'entraînement  $U$  des charges et la chute de tension entre les extrémités de ce fil.

**Exercice 8 :** Quelle est la densité d'électrons libres dans un métal pour une mobilité de  $0.0046 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}$  et une conductivité de  $29.1 \text{ mS m}^{-1}$  ?

**Exercice 9 :** Dans une substance de conductivité  $\gamma = 5.0 \text{ S m}^{-1}$  et de permittivité relative  $\varepsilon_r = 1$ , le champ électrique a pour intensité  $E = 250 \sin(10^{10}t) \text{ V m}^{-1}$ . Trouver les densités de courant de conduction et de déplacement ; pour quelle fréquence ces deux densités auraient-elles la même amplitude ?

**Exercice 10 :** Un condensateur coaxial a un rayon intérieur de  $a = 5 \text{ mm}$ , un rayon extérieur de  $b = 6 \text{ mm}$  et une longueur de  $L = 500 \text{ mm}$ . Il contient un diélectrique de permittivité relative  $\varepsilon_r = 6.7$  et est soumis à une différence de potentiel de  $v = 250 \sin(377t) \text{ V}$ . Déterminer le courant de déplacement  $i_D$  et le comparer au courant de conduction  $i_C$ . On donne la capacité de ce condensateur :  $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$ .

**Exercice 11 :** Un conducteur contient  $\rho_m$  charges mobiles par unité de volume.

1.  $\vec{j}$  étant le vecteur densité de courant dans le conducteur, quel est le courant  $I$  qui traverse une surface fermée ( $S$ ) délimitant un volume ( $\tau$ ) du conducteur ?
2. En écrivant la conservation de la charge électrique, déduire la relation locale entre  $\vec{j}$  et  $\rho$ .

**Exercice 12 :** Un long fil conducteur en cuivre de section circulaire  $s = 2.1 \text{ mm}^2$  est parcouru par un courant  $i = 16 \text{ A}$ . La résistivité du fil est  $2.0 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ .

1. Quelle est la valeur du champ électrique, supposé uniforme dans le conducteur ?
2. Si le taux de variation du courant est de  $4000 \text{ A s}^{-1}$ , quel est le taux de variation du champ électrique dans le conducteur ?
3. Quel est le taux de variation du vecteur densité de courant de déplacement dans le conducteur . On suppose que pour le cuivre  $\varepsilon_r \simeq 1$ .
4. Si le courant varie comme dans la question (2), quelle est l'amplitude du champ magnétique à une distance  $d = 6.0 \text{ cm}$  de l'axe du conducteur. Quelle la contribution du courant de déplacement ?

## Aimantation

### Exercice 13 :

1. Calculer le champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde rempli d'air, ayant 150 tours par mètre et parcouru par un courant continu de 2 A.
2. Que se passe-t-il si le solénoïde est rempli avec un matériau de susceptibilité magnétique  $\chi_m = 60 \times 10^{-5}$  ?

**Exercice 14 :** Un long solénoïde ayant 1800 tours par mètre est parcouru par un courant de 2 A. Il est rempli avec un matériau paramagnétique avec  $\chi_m = 66 \times 10^{-5}$ .

1. Calculer l'excitation magnétique  $\vec{H}$  dans le matériau.
2. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le matériau.
3. Calculer l'aimantation  $\vec{M}$  dans le matériau.
4. Calculer le courant par unité de longueur circulant à la surface du matériau.

**Exercice 15 :** Soit un long solénoïde rempli d'air ayant 150 tours/mètre. A l'intérieur du solénoïde le champ magnétique est de 0.05 T .

1. Quelle est l'intensité du courant électrique qui parcourt le solénoïde ?
2. Le solénoïde est rempli d'un matériau ferromagnétique de perméabilité relative  $\chi_m = 1.5 \times 10^4$ , quelle doit être la valeur du courant pour obtenir le même champ magnétique ?

## Propagation-Réflexion-Transmission

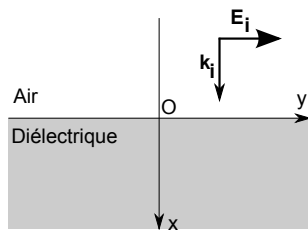
**Exercice 16 :** Une onde électromagnétique plane a un champ électrique donné par

$$\vec{E} = (300 \text{ volt/m}) \cos\left(\frac{2\pi}{3}x - 2\pi \times 10^6 t\right) \vec{e}_z$$

Cette onde se propage dans une ferrite (i.e un isolant magnétique), qui a une perméabilité magnétique  $\chi_m = 1000$  et une perméabilité diélectrique  $\chi_e = 10$ .

1. Dans quelle direction se propage cette onde ?
2. Quelle la longueur d'onde (en mètres) de cette onde ?
3. Quelle est la fréquence (en Hz) de cette onde ?
4. Quelle est la vitesse de propagation ( $\text{m s}^{-1}$ ) de cette onde ?
5. Calculer le champ magnétique associé à cette onde.
6. Cette onde émerge du milieu dans lequel elle se propageait, pour continuer sa propagation dans le vide. Quelle est la nouvelle longueur d'onde (en mètres) ?

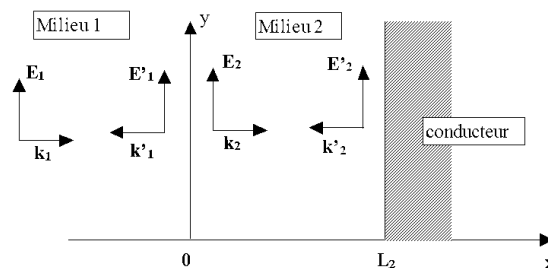
## Exercice 17 :



Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale, polarisée rectilignement suivant  $Oy$  se propage dans l'air, d'indice optique égal à 1, suivant la direction  $Ox$  (voir figure). Elle arrive sous incidence normale sur la surface d'un diélectrique semi-infini, non magnétique ( $\mu = \mu_0$ ) et d'indice optique  $n$  ( $n > 1$ ). L'intensité de l'onde incidente est  $I = 1 \text{ W m}^{-2}$ .

1. Représenter, sur la figure, le vecteur  $\vec{H}_i$  de l'onde incidente.
2. Calculer les amplitudes des champs  $\vec{E}_i$  et  $\vec{H}_i$  de l'onde incidente.
3. Représenter, sur la figure, les vecteurs  $\vec{k}_r$ ,  $\vec{E}_r$  et  $\vec{H}_r$  caractérisant l'onde réfléchie ainsi que les vecteurs  $\vec{k}_t$ ,  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  caractérisant l'onde transmise.
4. Écrire les conditions de continuité à la surface de séparation des deux milieux. En déduire, en fonction de l'indice  $n$ , l'expression du coefficient de réflexion  $r$  du champ électrique en  $x = 0$ .
5. Calculer le champ électrique résultant dans l'air. Déterminer son amplitude en fonction de  $x$ .
6. Calculer les amplitudes maximale et minimale du champ électrique résultant dans l'air.
7. Sachant que le T.O.S vaut  $4/3$ , calculer la valeur de l'indice  $n$ .
8. Donner une représentation graphique des variations, en fonction de  $x$ , de l'amplitude du champ électrique résultant dans l'air sachant que la longueur d'onde vaut  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ .

**Exercice 18 :** Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , d'intensité  $I$ , polarisée suivant la direction  $Oy$ , se propage suivant la direction  $Ox$  dans un milieu 1, diélectrique parfait d'indice  $n_1$ . Elle arrive sous incidence normale sur un milieu 2, diélectrique parfait d'indice  $n_2$  et d'épaisseur  $L_2$  déposé sur un conducteur supposé parfait (voir figure). On notera  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide,  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses de propagation respectives dans chacun des deux milieux. Les vecteurs correspondants seront notés respectivement  $k_1$  et  $k_2$ .



1. Écrire les expressions des champs électriques  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}'_1$ ,  $\vec{E}_2$  et  $\vec{E}'_2$  en notant  $A_1, A'_1$ ,  $A_2$  et  $A'_2$  leurs amplitudes respectives.
2. Écrire les expressions des champs résultants  $\vec{\mathcal{E}}_1$  et  $\vec{\mathcal{E}}_2$  dans le milieu 1 et dans le milieu 2.
3. En déduire les champs magnétiques résultants  $\vec{\mathcal{H}}_1$  et  $\vec{\mathcal{H}}_2$  dans les milieux 1 et 2.

4. Écrire les relations de continuité pour le champ électrique et le champ magnétique en  $x = 0$ .
5. Écrire les relations de continuité pour le champ électrique en  $x=L_2$ .
6. En déduire le coefficient de réflexion  $r = \frac{A'_1}{A_1}$ . En donner le module et la phase.
7. Mesure de l'indice  $n_2$  :
  - (a) Quelle est la condition pour que, dans le milieu 2, le champ électrique possède un nœud en  $x = 0$  et un seul ventre ?
  - (b) Sachant que le premier nœud du champ électrique dans le milieu 1 se situe en  $x = -L_1$ , calculer l'indice  $n_2$  en fonction de  $n_1$ ,  $L_1$  et  $L_2$ .
  - (c) L'expérience est réalisée, dans les conditions ci-dessus, avec de l'air comme milieu 1 ( $n_1 = 1$ ) et du méthanol comme milieu 2. On mesure  $L_1 = 15$  mm et  $L_2 = 11.3$  mm. Quel est l'indice de réfraction du méthanol.

## Propagation guidée

**Exercice 19 :** Une onde électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  monochromatique, de pulsation  $\omega$  se propage, suivant  $Oz$ , entre deux plateaux parfaitement conducteurs occupant les plans  $y = 0$  et  $y = a$ . Les composantes du champ électrique  $\vec{E}$  sont telles que :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{bmatrix}$$

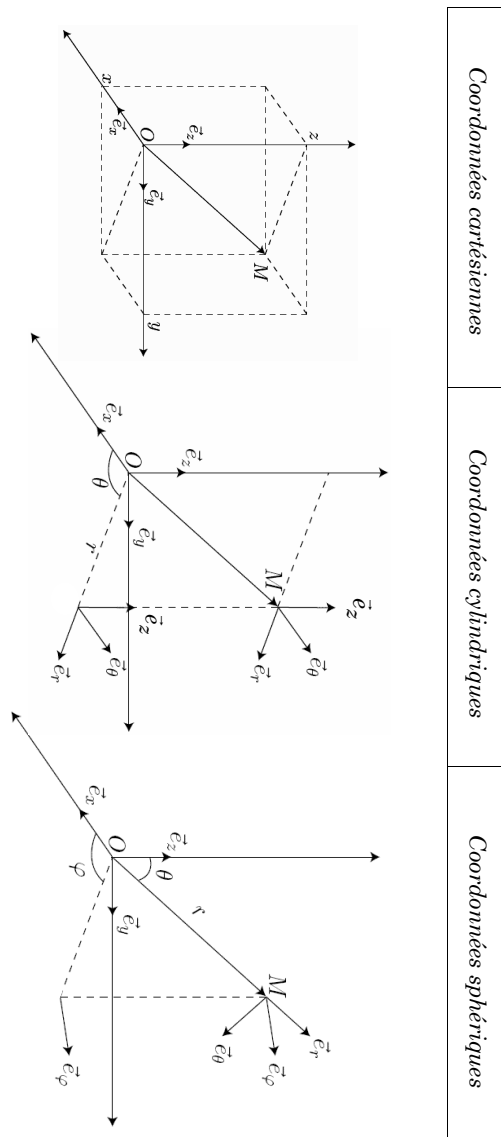
1. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  associé à cette onde.
2. Établir la relation  $k(\omega)$  qui relie  $k$  et la pulsation  $\omega$ .
3. Montrer que cette onde électromagnétique ne peut se propager que si la pulsation  $\omega$  est supérieure à une certaine valeur que l'on déterminera.





## Annexe A

# Opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.



	Coordonnées cartésiennes ( $x, y, z$ )	Coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ )	Coordonnées sphériques ( $r, \theta, \varphi$ )
$\vec{dl}$	$dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$	$dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$	$dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$
$\vec{\text{grad}} f(M)$ $\vec{\nabla} f(M)$	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$
$\text{div } \vec{A}(M)$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M)$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\vec{\text{rot}} \vec{A}(M)$ $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M)$	$\left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$	$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$
$\Delta f(M)$ $\text{lap } f(M)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

**NB:** • Les schémas des coordonnées sont donnés sur la figure ci-contre

• Le vecteur  $\vec{OM}$  est donné par  $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$

•  $f(M) = f(x, y, z)$  : fonction scalaire de point ou *champ scalaire*

•  $A(M) = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$  : fonction vectorielle de point ou *champ vectoriel*



# Annexe B

## Propriétés de symétrie

### B.1 Le principe de Curie

La symétrie des causes (que sont les charges, sources de l'électrostatique) se retrouve dans les effets produits (que sont le champ et le potentiel électrostatiques).

Ce principe est très utile en électrostatique car il permet de prévoir l'allure des lignes du champ électrique et les surfaces équipotentielles à partir de la symétrie du système chargé.

### B.2 Le champ électrostatique

Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ électrostatique créé par une distribution spatiale de charges électriques.

1. Si par le point M, passe un plan de symétrie pour la distribution des charges électriques, le champ électrique  $\vec{E}$  est contenu dans ce plan de symétrie.
2. Si par le point M, passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des charges électriques, le champ électrique  $\vec{E}$  est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.

### B.3 Le champ magnétostatique

Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ magnétostatique  $\vec{B}$  créé par une distribution spatiale de courants électriques.

1. Si par le point M, passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan de symétrie.
2. Si par le point M, passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique  $\vec{B}$  est contenu dans ce plan d'antisymétrie.

### B.4 Le potentiel vecteur

Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le potentiel vecteur  $\vec{A}$  créé par une distribution spatiale de courants électriques.

1. Si par le point  $M$ , passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électrique, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est contenu dans ce plan de symétrie.
2. Si par le point  $M$ , passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ vecteur  $\vec{A}$  est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.

# Bibliographie

- [1] Michel Serres, Nayla Farouki : *Le Trésor, dictionnaire des sciences*. Flammarion 1998.
- [2] Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte : *Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, tome 1*. Addison-Wesley, seconde édition, 1994.
- [3] Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte : *Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, tome 2*. Addison-Wesley, seconde édition, 1994.
- [4] I. E. Irodov : *Basic Laws of Electromagnetism*. Mir Publishers, Moscow, 1986.
- [5] Joseph Edminister : *Electromagnétisme : cours et problèmes*. Série Schaum Ediscience International,2000.