Objectif: démontrer que la conjecture de Goldbach est une variante du crible d'Ératosthène Mais dans les congruences, selon un principe et une propriété bien connue.
*(« pour 30k > 30, il existe **y/y'** tels que 30k = **p*y + R** et p' = **p*y' + R => 30k-p'= p*(y – y')** donc **p** divise **30k – p'** et à l'inverse **p** ne divise pas cette différence, d'où **30k-p' = q** premier. Démonstration page 6 ci-après .»)*

Que l'interprétation de la comète de Goldbach est une erreur; c'est une boule de neige qui utilise la propriété récurrente du décalage d'un rang des congruences : ce qui permet de comprendre et d'expliquer pourquoi le nombre de solutions qui vérifient 2n augmentent lorsque 2n tend ver ∞.
Goldbach indique que tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers (p'+q). On veut utiliser la décomposition 30k + 2i ou de 2n en deux nombres premiers selon les principes d'un crible. L'objectif est de montrer que ces nombres premiers par famille forment l'ensemble des nombres premiers > 5 pour une limite **n** fixée et qu'il est impossible d'infirmer la conjecture pour la limite **n +1** criblée.

La méthode du crible à utiliser suit la méthode d'Ératosthène, en utilisant les congruences de multiples de 30 (ci-dessous appelé 30k) modulo p, p ≤ √2n étant les nombres premiers définis ci-dessous qui vont cribler.
On crible de 1 à n et non de 1 à 2n **a :)** les nombres p' ≤ n et **b:)** les entiers non nuls A ≢ 2n[P] ≤ n.

- ⇨ cinq parties à expliciter :
  1/ : comment on construit ce crible, algorithme de Goldbach.

  2/ : prouver que les nombres premiers ainsi trouvés forment l'ensemble des nombres premiers

  3/ : montrer que quelque soit un 30k, il est toujours décomposable en somme de deux premiers en utilisant une des 8 familles 30k + 2i , i ∈ {1,7,11,13,17,19,23,29} avec 30k ≥ 300. « *Note: on peut montrer en utilisant simplement les entiers impairs non nul ≥ 1.»*

  4/ : montrer que l'on peut utiliser ce crible, à l'ensemble des entiers pairs en progression arithmétique de raison 30, selon des conditions particulières; afin d'obtenir une estimation minorée de couples premiers, qui décomposent un entier pair > 4 en somme de deux premiers.

  5/ : on montrera que ce crible a une propriété récurrente, le décalage d'un rang des congruences sur leur successeur, lorsque la limite 2n augmente de 2, ou en utilisant une famille pour la limite 30(k+1) + 2i; en la choisissant par rapport à la forme de n = 15k + i, la limite du criblage fixée. Cette propriété récurrente a un effet boule de neige.
«*Ce crible dans les congruences fera ressortir la famille complémentaire par rapport à 2n. Les nombres premiers q ont pour antécédent les entiers A≢ 2n[p]*»

  6/ : pour 3/ et 4/, on utilisera le Théorème des nombres premiers noté TNP et son corollaire, conséquence directe du TNP; où on en déduira une troisième fonction, indiquant le minimum de couples p'+ q = 2n.

1/ : Le crible.

Le **<u>périmètre</u>** de travail du crible par famille: on travaille sur les entiers circonscrits aux familles suivantes qui seront appelé fam (i): («*en fonction de la forme de n=15k+i → 2n = 30k +2i, on fixe la famille.» Ce qui donnera la famille complémentaire par rapport à 2n, pas forcément la même. Par exemple si n = 15k +1 on a 2n = 30k+2 on a que trois fam(i) possible {1 ,13 ,19} , 1+31=32 et 13+19 = 32.*
*En fixant la **fam 13** on obtient les complémentaires **q ∈ fam 19** et pour la **fam 1; q ∈ fam 1** qui est la même.»)*

fam(i) - 30k+1
- 30k+7
- 30k+11
- 30k+13
- 30k+17
- 30k+19
- 30k+23
- 30k+29

L'intérêt de travailler avec ces huit familles est qu'elles permettent de réduire le nombre d'entiers naturels avec lesquels on travaille sans perte de généralité, puisque tout entier de forme 30k+x avec x n'appartenant pas à {1,7,11,13,17,19,23,29} n'est pas premier à l'exception de 2, 3 et 5 .

L'objectif est d'extraire de ces suites arithmétiques de raison 30, les nombres premiers supérieurs à 5 congrus à 1 [30] ou à p [30] avec p appartenant à {7,11,13,17,19,23,29}, et de décomposer les nombres pairs en somme de deux nombres premiers par l'utilisation des congruences.

Construction de l'algorithme AG, crible de Goldbach:

[« ***Note:*** *On peut construire directement le crible en partant de 1 et faire ressortir ses propriétés, en utilisant les nombres impairs représenté par des 1 et les nombres pairs représenté par 0; ainsi que les entiers qui seront marqués congrus à 2n[p] noté A ≡ 2n[p] qui serra marqué 0, suivant le principe d'Ératosthène.*

ex*: 0,1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,11...etc et avec* ***p*** *≥ 3. lorsqu'un nombre sera* ***congru à 2n[p]*** *il serra remplacé par 0 ou marqué en rouge suivant les cas ci-dessous de raison* ***p***
ex: *limite n =15 , 2n =30 et* ***p*** *≤√2n =* ***3*** *et* ***5*** *le reste* **R** *de 2n par* ***p*** *=* ***0*** *et* ***0****.*

On part toujours de l'indice du reste: (ici) **0** avec **p = 3** et on marque les entiers de 1 à 15 congruents à p d'un 0; suivant le principe d'Ératosthène **modulo p** ou de raison **p**.
Si le reste R %2 = 0 on part de **p** puis += **2p .**
(*Ce qui est équivalent à marquer les multiples de* ***p*** *∈ [n;2n], si ce n'est que l'on marque les entiers* ***A*** *congrus à* ***2n[p]*** *de* ***1*** *à* ***n*** *de raison* ***p.***)

ex: liste à cribler **limite n = 15** [*0,1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,11,0,13,0,15]* en rouge les A congruents à **p**
résultat (mod 3) ou (mod 2*3) [*0,1,0,0,0,****5****,0,****7****,0,0,0,****11****,0,****13****,0,0]* *les A ≡ 2n [3]*
résultat (mod 5) ou(mod 2*5) [*0,1,0,0,0,0,0,7,0,0,0,****11****,0,****13****,0,0]* *puis les A ≡ 2n [5]*

Soit 3 couples ***p'****+q qui décomposent 30. On en déduit directement une conséquence du TNP:*
Comme on crible avec les nombres premiers ***p*** *≤ racine de* ***2n*** *, la fonction du nombre d'entiers* ***A*** *non congrus à 2n[p] noté A ≢ 2n [p]; devient [n / log 2n] ⇒ le nombre de nombres premiers q ∈ [n;2n].*

Montrons le décalage d'un rang des congruences sur leur successeurs impair en progression arithmétique de raison 2, permettant d'affirmer que la conjecture serra vérifiée pour la limite n+1 suivante.

Propriété récurrente si un entier ***A ≢2n[p]*** *précède un nombre premier* ***p'=A'+2 ,*** *alors* ***p'*** *qui serra donc* ***non congru à 2n[p]*** *vérifiera la conjecture pour la limite suivante* ***2n +2*** *suivant l'égalité ci après:*
30 – A⇔ (30+2) – (A+2)
Montrons:
Lorsque la limite ***n*** *augmente de 1, et donc* ***2n*** *augmente de 2 , cela n'a pas d'influence sur le nombre de premiers < (15+1) qui ne bougent pas, ni sur le nombre de premiers* ***p*** *qui criblent.* ***Seul les congruences*** *vont se décaler sur leur successeur* ***A'+2****.*

ex*: liste à cribler n+1 [0,****1****,0,3,0,5,0,7,0,9,0,11,0,13,0,15,0]*
les restes de 32 par 3 et 5, augmentent de 2. Donc l'égalité ***30 – A⇔ (30+2) – (A+2) qui est la même****.*

Par conséquent, 1 *qui était* ***≢ 2n [p]*** *la congruence se reporte sur (1+2)* ***≢ (2n+2) [p]*** *car* ***29*** *qui était un nombre premier* ***q*** *tel que 30 – 1 = 29 , serra toujours le même* ***sinon cela est contraire au TFA****.*
D'où 3 serra ***≢ (2n+2) [p]*** *et tel que 32 – 3 =* ***29*** *donnera pour 2n +2 un couple p'+ q = 32 .!*

vérification n = 15, ***p = 3,*** *R =0 : [0,****1****,0,0,0,****5****,0,****7****,0,0,0,****11****,0,****13****,0,0]*
résultat ***n+1****=16,* ***p=3*** *et R=2 : [0,****1****,0,****3****,0,****0****,0,****7****,0,9,0,* ***0****, 0,****13****,0,0,0]*
a) *la* ***non*** *congruence de* ***1*** *se reporte sur* ***3,*** *celle de 3 qui était congru se reporte sur* ***5,*** *celle de* ***7*** *se reporte sur 9 et celle de 9 se reporte sur* ***11.***
b) *vérification n = 15,* ***p=5,*** *R =0 : [0,1,0,0,0,0,0,7,0,0,0,****11****,0,****13****,0,0]*

résultat n+1=16, ***p=5*** *et R=2 :* *[0,**1**,0,**3**,0,0,0,**0**,0,9,0, **0**, 0,**13**,0,0,0]*
la non congruence de ***1*** *se reporte sur* ***3,*** *celle de 5 c'est reporté sur* ***7, car 7 et 32 sont ≡ 2[5], fin du crible.***

On a 2 couples ***3+29 et 13 +19*** *qui décomposent 32 et on constate bien que 23 qui est premier à pour antécédent* ***9 ≢ (2n+2) [p];*** *si les congruences ne se décalaient pas d'un rang, il serait resté congru à (2n +2) [p] ce qui est absurde, car contraire au TFA et au TNP, ce qui garanti aussi la famille complémentaire !*

Cela permet de garder *la propriété des entiers B ∈[n;2n]; si 2n – A = B est un multiple de p, (2n+2) – (A+2) = B serra toujours multiple de p; et inversement si 2n – A =* ***q*** *premier, (2n+2) – (A+2) =* ***q*** *serra toujours premier.*

Autre constat, ***9*** *qui n'est pas premier mais qui précède* ***11*** *un nombre premier,* ***sa non*** *congruence se reportera sur* ***11*** *lors de la limite suivante n+1. Ce qui permet d'affirmer que pour 2n +2 +2 la conjecture serra encore vérifiée avec au minimum 34 – 11 =* ***23, qui a donc déjà été utilisé précédemment****, on commence à voir l'effet boule de neige et par conséquent l'impossibilité d'infirmer la conjecture pour* ***n+1.***

On peut donc en déduire dès lors, une troisième fonction caractérisée par cet algorithme, relative au TNP par rapport aux deux fonctions ***π(n)~[n / log n]*** *indique ~ le nombre de premiers ≤* ***n*** *et* ***G(n)*** *qui vaut ~* ***[n / log 2n]*** *indique le nombre d'entiers* ***A ≢ 2n[p] ≤ n*** *⇔ nombre de premiers* ***q ∈ [n;2n].***

De ces deux fonctions on en déduira une troisième : $\frac{n}{(\ln(n)*\ln(2n))}$ *qui indiquera le nombre minimum de couples* ***p+q = 2n lorsque 2n → + ∞***

Ce sont les même nombres premiers qui criblent, selon le même principe et ces deux algorithmes qui caractérisent les fonctions asymptotiques du TNP.

Pour n=15 on avait 4 entiers non congruent[p] et 3 couples de premiers : on pourrait donc aussi utiliser simplement G(n) sur le log de G(n) *au lieu de 14 ÷(ln 14×ln 28) = 1,592* pour les petites limite n.

C'est à dire : pour ***n -1; G(14)*** *vaut 14/ln 28 = 4,2 ; qui est le nombres de* ***A≢ 2n[p], premiers ou pas,*** *ce qui implique par conséquent et suivant la propriété* ***b)*** *ci-dessus : le résultat du nombre de couples pour la limite suivante* ***2n+2 = 30*** *,* ***serra*** *le nombre de* ***A précédent un entier A'+2 = p'*** *de la limite* ***n précédente*** *, que l'on vient de vérifier on aura donc* ***4/ln 4 = 2*** *couples p'+q < 3 qui est le résultat réels.*

Pour n+1 = 16 on a ***2*** *couples de premiers qui vérifieront 32 («15 / Ln 30 = 4,.. et 4/ln 4 =2,... ≤* ***2.****»)*

*pour n+2 =17, p = 3 et 5; R = 1 et 4: donnera [0,1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,**11**,0,13,0,15,0,**17**]* ***4*** *couples de premiers p'+ q =34. («16 / Ln 32 = 4,.. et 4/ln 4 =2,... ≤* ***4****. ou* ***17÷(ln 17×ln 34) = 1,70..****»)*

pour n+3 = 18, sans vérifier, il est clair que l'on aura 4 couples p'+ q = 36 car on a bien 4 ***A≢ 2n[p]*** **qui précèdent p'. {3, 5, 11 et 15} quand bien même 15 n'est pas un P' ;** Autrement dit l'effet boule de neige, vient du fait que l'on ne tient pas compte uniquement des nombres premiers **A' = p' ≤ n**; mais des ***A≢ 2n[p]*** *précédent les* ***A'=p'.***

Ce qui permet avec cette propriété du décalage des congruences de ne pas tenir compte de la primalité des A qui précèdent ***p'****; mais simplement* ***du fait qu'ils sont non congruent à p, ce qui rend impossible son infirmation pour la limite suivant n+1.***

Cette fonction *caractérisée par le crible de Goldbach et aussi caractérisé par le TNP, car cela revient à cribler avec Ératosthène et Goldbach uniquement les entiers* ***A ≢2n[p]*** *pour la même limite !*
Elle serra donc inférieur au nombre réel de couples qui décomposent 2n en somme de deux premiers, lorsque la limite du crible ***n → + ∞****.*

Comme on peut le vérifier le décalage des congruences se produit sur plusieurs limite n + k successives qui vérifieront la conjecture, car au par avant, plusieurs limites n – k successive ont déjà vérifiées 2n + 2, 2n , 2n -2... etc ; et on ne peut *redescendre indéfiniment.!* ***Conclusion :*** *le nombre de* ***A ≢ 2n[p]*** *qui précèdent* ***A'=p'*** *pour la limite* ***n – 1 ;*** *vérifiera la limite* ***n*** *et* ***n+1 …*** *et donc* ***2n et 2n+2*** *serront somme de deux nombres premiers* ***p'+ q.***

En fin de document on construit le programme pour cribler les entiers A impairs de 1 à n.

Fin pour cette partie avec le crible dans les entiers ***A*** *impairs en progression arithmétique* ***de raison 2*** *≤ n. »]*

****

On va cribler dans les familles en progression arithmétique de raison 30:

On va utiliser le même principe, mais en calculant l'index de départ des nombres premiers p qui cribleront suivant la famille 30k+(i) noté fam(i) utilisé par rapport à n ≥150, en progression arithmétique de raison 15. Les entiers A de 1 à n sont en progression arithmétique de raison 30. Sont exclu les multiples de 2, 3 et 5.

Avec Ératosthène en début de programme on extrait les premiers **p** ≤ √**2n**
On établit un tableau de 1 (n//30).*
On calcul le reste ***R*** *de 30k + 2i par* ***p*** *≤ √****2n****.*
puis si R %2=0 on ajoute ***p*** *tel que* ***R +p*** *= j ; puis + 2p tant que j%30 est différent de fam (i)*
si j%30==Fam(i) on calcul l'index tel que j//30 = idx.
Puis on crible de l'idx qui serra marqué 0, par pas de **p** → n // 30 en remplaçant les 1 par 0.
les 0 seront les entiers A ≡ 2n[p]; à la fin on compte les 1 qui sont les A ≢ 2n[p] .

Ex: on fixe la limite **n = 15k** = 300, **la fam(i) = 7** progression arithmétique de raison 30 ;
les **A** seront représenté par des **1: A** ∈ **[***7,37,67,97,127………..277 < 300***]**
tableau du crible n//30 **[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1] p = 7,11,13,17** le **R** de 600 par **p = 5, 6, 2, 5**
on calcule **j = R +p si R%2=0 ,** sinon **R** +=2**p** → **j%30 = fam(i)=7**

p=7 , R =5 va donner → 5+14 , 19+14 →33, 47, 61,75, 89, 103, 117,131, 145, 159, 173, **187**==7%30,
on calcul l'index : idx = j//30 , **187 // 30 == 6**. et on va cribler en partant de idx,« *attention on compte en commençant par 0 ,1 ,2 , n... → n//30* **»** on remplace le 1 par 0 puis par pas de 7 .
ce qui va donner ***idx = 6*** → **[1,1,1,1,1,1,0,1,1,1]** puis *on réitère avec* ***p = 11, R = 6***
127 == j%30 et ***idx = 4***→ **[1,1,1,1,0,1,0,1,1,1]** puis *on réitère .* ***p = 13, R = 2,***
67 *== j%30 et* ***idx = 2***→ ***[1,1,0,1,0,1,0,1,1,1]*** *puis on réitère .* ***p = 17, R = 5*** *donnera 277 ,*
277*== j%30 et* ***idx = 9***→ ***[1,1,0,1,0,1,0,1,1,0]*** *fin on fait la somme des 1 = 7* ***A ≢ 2n[p]*** *= 7 premiers* ***q∈[n;2n].***

Ératosthène pour la même limite et la même fam(i) donnera les nombres ***1****=* ***p'∈ [1,1,1,1,1,1,0,0,0,1] .***
En criblant le tableau d'Ératosthène avec le crible (G) → ***0*** *=* ***A ≡2n [p]∈ : [1,1,0,1,0,1,0,1,1,1] ;***
ce qui donne le résultat suivant : nombre de ***,1,*** *couples* ***p'+q*** *= 600; 4 couples ∈ :* ***[1,1,1,1,1,1,0,0,0,1]***

La propriété récurrente est la même, lorsque ***n*** *ou* ***n+i*** *augmente de 15 les congruences se décalent d'un rang sur leur successeur* ***A+30. «****On a nul besoin de se soucier de la fam i complémentaire pour vérifier la conjecture, l'algorithme utilise les congruences et* ***q*** *a pour antécédent* ***A ≢ 2n[P] .»***

Cela donnera par obligation le tableau suivant pour 2n = 630 ; ***4*** *couples, sans même avoir besoin de cribler:*

…………………… ……. … *[****x,1,1,****1,****1,****1,0,0,0,****1****] seul le premier élément x est inconnu .*
résultat réel pour n= 315; vérifié :
Donnez N: 315; crible EG_2n_mod30*: [****1****, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]* ***4*** *couples p+q = 2n. Et ~ autant pour 2n = 660*
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1] réel ***6*** *couples*

Ce qui permet d'affirmer formellement que la conjecture serra vérifié pour la limite ***2n = 30(k+1) + 2i****; sans avoir besoin de cribler cette limite* **n = 15(k+1)+i.**

En effet: si **A ≢** ***2n[p]*** premier ou pas précèdent **A+30 premier p',** congru ou pas à **2n [p]** alors ce dernier, qui par obligation serra **non congruent à p,** il formera un couple: **p'** + q qui décompose **2n = 30(k+1) +2i** en somme de deux premiers !

Il devient donc avec d'autres raisonnements à l'appui, **impossible d'infirmer la conjecture** pour la limite **2n = 30(k+1) +2i , car il est aussi impossible d'utiliser les restes R de la limite n pour cribler le limite n+1.**

La fonction 2 du théorème de Goldbach est une conséquence directe du TNP: (log = *logarithme naturel)*

G(n): la fonction de compte du nombre de nombres ***A***$\not\equiv$ ***2n[p]*** $\Leftrightarrow$ **q** $\in$ **[n;2n]**

Corollaire: G(n) vaut **~** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{(\log 2n)}$

Le TNP dit que $\pi(n) = \dfrac{n}{(\log n)} + o(\dfrac{n}{\log n})$, donc le nombre de nombres premiers dans $]n,2n]$ vaut

$$\pi(2n) - \pi(n) = \left(\frac{2n}{\log(2N)} - \frac{n}{\log N}\right) + o(\frac{n}{\log n})$$

$$= n \times \left(\frac{2}{\log 2n} - \frac{1}{\log n}\right) + o(\frac{n}{\log n})$$

$$= n \times \frac{2\log n - \log(2n)}{\log(2n)\log n} + o(\frac{n}{\log n})$$

$$= \frac{n}{(\log 2n)} + o(\frac{n}{\log n})$$

*Tout nombre pair 2n $\geq$ 180 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers (**P**'+**q**)) appartenant à une famille Fam(i) tel que définie en début de document.*

Conséquence des deux fonctions du TNP on déduit une troisième fonction qui indique : que le nombre de A$\not\equiv$ 2n[P] qui précèdent un entiers A'= P'$\Rightarrow$ le nombre de couples P'+q = 2n est équivalent à

$\dfrac{n}{(\ln(n)*\ln(2n))}$ *lorsque n tend vers + ∞.*

Heuristiquement on peut aussi : pour n $\geq$ 3000 : $C_2 \dfrac{G(n)}{\ln G(n)}$ **;** où $C_2 \approx$ 1,320323… constante premiers jumeaux.

*Pour que la conjecture soit fausse pour une limite **n** il aurait fallu utiliser les restes R des limites **n-k** précédentes, mais aussi que la fonction* $\dfrac{n}{(\ln(n)*\ln(2n))}$ *soit nulle ; or pour une limite **n** qui est*

*vérifiée , cette fonction indique aussi le nombre de A $\not\equiv$2n[P] qui précèdent A'= p' de la limite n-1 et n-2 précédente qui par supposition ont été vérifiée et va donc vérifier la limite **n** ce qui est contradictoire, elle sera par conséquent positive !*

Mais qui plus est, il est clairement impossible, que la fonctions du TNP ou son corollaire soit nulle.

** Un autre document explicite ce fonctionnement et sa résolution, avec les programmes relatif à ces deux algorithmes.*