

A) Mouvement hyperbolique

R: Laboratoire
R': fusée

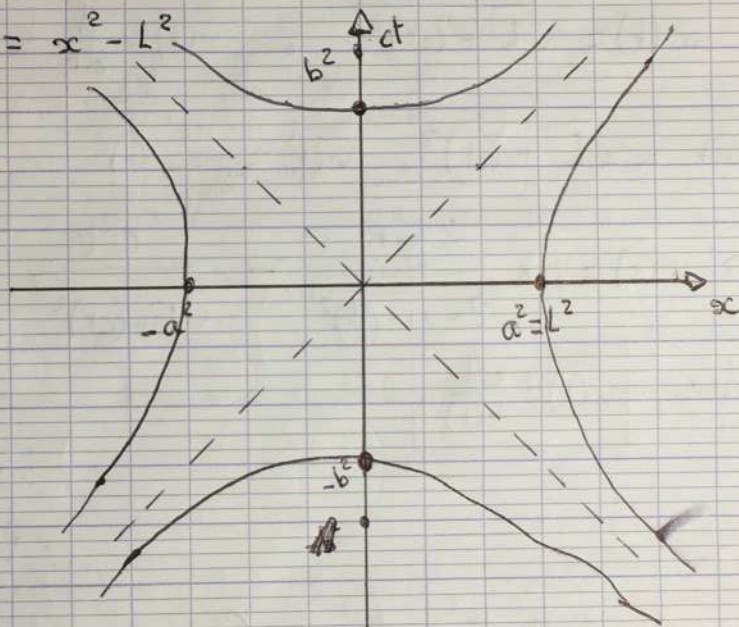
1) a)

$$x(t) = L \times \sqrt{1 + \left(\frac{ct}{L}\right)^2} = \sqrt{L^2 + (ct)^2}$$

$$ct = \sqrt{x^2 - L^2}$$

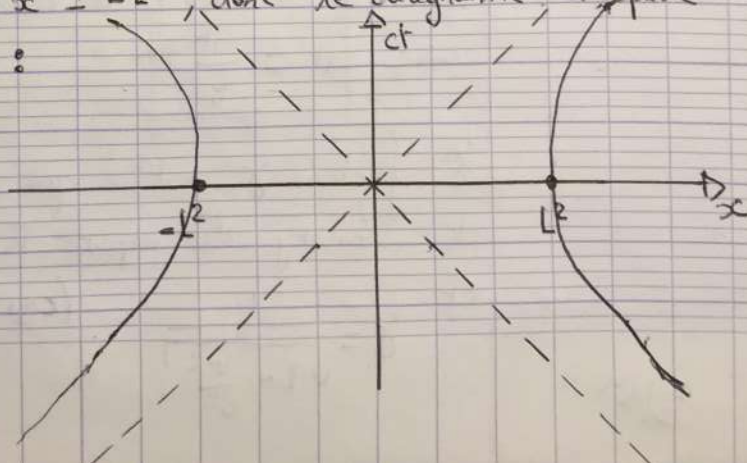
$$\Rightarrow (ct)^2 = x^2 - L^2$$

$y(t) = z(t) = 0$
dans $\mathbb{R}$



En se limitant aux dimensions temps et abscisses (ct et x),
on reconnaît immédiatement l'équation de deux hyperboles de
la forme :
• $(ct)^2 - x^2 = b^2$ (intervalle de genre temps avec $ds^2 > 0$)
• $(ct)^2 - x^2 = -a^2$ (intervalle de genre espace avec $ds^2 < 0$)

Dans notre cas $(ct)^2 - x^2 = -L^2$, donc le diagramme d'espace
temps dans $\mathbb{R}$ ressemble à :



b)

Dans R , le quadrivecteur position est :

$$\underline{x} = (ct, \sqrt{L^2 + (ct)^2}, 0, 0)$$

Le pseudo-norme est $\underline{x}^2 = (ct)^2 - L^2 - (ct)^2 = -L^2$

Le pseudo-norme est donc bien constante et $\underline{x}^2 = -L^2$

2)

$$x(t) = \sqrt{L^2 + (ct)^2} \quad , \quad v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$\text{Soit } u = L^2 + (ct)^2 \quad , \quad v(t) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = L \times \frac{2c^2 t}{2 \times \sqrt{L^2 + (ct)^2}} = \frac{c^2 t}{\sqrt{L^2 + (ct)^2}}$$

$$\text{Ainsi, } v(t) = \frac{c^2 t}{x(t)}$$

3) a)

$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$. On, en considère ici 2 événements situés à la même position

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}_{\vec{x}=0}^2 \quad \rightarrow \quad \text{dans } R' \quad ds'^2 = c^2 dt'^2$$

Soit un intervalle de genre $ds'^2 > 0$, on a $ds'^2 = c^2 dt'^2$ où dt'^2 est l'intervalle de temps propre. On peut donc écrire

$$dt' = \frac{dt}{\gamma}$$

Le facteur γ est ce qui intervient dans la transformation de Lorentz du repère R au repère propre de la source R' (car $d\vec{r}^2$ n'est pas forcément nul)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On a donc ; $v(t) = \frac{c^2 t}{x(t)}$ $dt' = dt \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ $x(t) = \sqrt{L^2 + (ct)^2}$

Ainsi ; $dt' = dt \times \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{c^2 x^2(t)}}$

$$\Rightarrow dt' = dt \times \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{L^2 + c^2 t^2}}$$

$$\Rightarrow dt' = \sqrt{\frac{L^2 + (ct)^2}{L^2 + (ct)^2} - \frac{(ct)^2}{L^2 + (ct)^2}} dt$$

$$\Rightarrow dt' = \sqrt{\frac{L^2}{L^2 + (ct)^2}} dt$$

$$\Rightarrow dt' = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{ct}{L}\right)^2}} dt$$

$$\Rightarrow \int dt' = \int \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{ct}{L}\right)^2}} dt$$

$$\Rightarrow t' = \frac{L}{c} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{ct}{L}\right) \quad \text{car } \int \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} dx = \operatorname{arcsinh}(x)$$

Le facteur $\frac{L}{c}$ intervient par le changement de variable $x = \frac{ct}{L}$

Ainsi ; $t' \times c = L \times \operatorname{arcsinh}\left(\frac{ct}{L}\right)$ CQFD

b)

$$\frac{t' \times c}{L} = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{ct}{L}\right) \Leftrightarrow t = \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right) \times \frac{L}{c}$$

On peut aussi écrire $t = \frac{L}{2c} \times \left(e^{\frac{t'c}{L}} - e^{-\frac{t'c}{L}} \right)$

$$\text{et } x(t') = L \times \sqrt{1 + \left(\frac{cx \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right) \times L}{L \times c} \right)^2}$$

$$\Rightarrow x(t') = L \times \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t'c}{L}\right)} = L \times \cosh\left(\frac{t'c}{L}\right)$$

$$x = L \times \cosh\left(\frac{t'c}{L}\right)$$

car $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$

c) $\underline{U} = \frac{d\underline{x}}{dt'}$ avec $\underline{x} = (ct, \sqrt{L^2 + (ct)^2}, 0, 0)$

Donc ; $\underline{U} = \frac{d}{dt'} (ct, \sqrt{L^2 + (ct)^2}, 0, 0)$

$\underline{U}$ est donc bien un vecteur à 4 dimensions.

C'est le quadri-vecteur vitesse tel que :

$\underline{U} = \gamma (c, \vec{v})$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ et $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
la vitesse

Ainsi ; $\underline{U} = (c \frac{dt}{dt'}, \frac{dx}{dt'}, \frac{dy}{dt'}, \frac{dz}{dt'}) = \gamma (c \frac{dt}{dt'}, \frac{dx}{dt'}, \frac{dy}{dt'}, \frac{dz}{dt'})$

$\Rightarrow$ Pour t , le ~~référéntiel~~ temps dans le référentiel du laboratoire :

$\underline{U} = \gamma (c, \frac{c^2 t}{\sqrt{L^2 + (ct)^2}}, 0, 0)$. car $v_x(t) = \frac{c^2 t}{x(t)}$

Dans la question 3. a (Page 3 au dos), on a calculé $\frac{1}{\gamma}$, tel que

$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{ct}{L})^2}}$. donc $\Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + (\frac{ct}{L})^2}$

On a donc $\underline{U} = (c \times \sqrt{1 + (\frac{ct}{L})^2}, \frac{c^2 t}{L}, 0, 0)$

La norme de $\underline{U}$ est $U^2 = c^2 \times (1 + (\frac{ct}{L})^2) - (\frac{c^2 t}{L})^2 = c^2 \times [1 + (\frac{ct}{L})^2 - (\frac{ct}{L})^2] = c^2$

On retrouve bien $U^2 = c^2$, qui est une propriété des quadri-vecteurs vitesse. En effet, la pseudo-norme q de $\underline{U}$, U^2 est toujours égale à $U^2 = c^2$ pour les deux temps des référentiels
(à noter que la norme d'un quadri-vecteur est commune pour les 2 référentiels)

$\Rightarrow$ On cherche donc désormais $\underline{U}$ pour le temps dans le référentiel de la fusée, t' , le temps propre

On a $\underline{U} = \frac{d\underline{x}}{dt'}$ et $t = \frac{L}{c} \times \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right)$

Avec le résultat précédent, on obtient :

$$\underline{U} = \left(c \times \sqrt{1 + \left[\frac{cxL}{L \times c} \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right) \right]^2}, \frac{c^2}{L} \times \frac{L}{c} \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$$

$$= \left(c \times \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t'c}{L}\right)}, c \times \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$$

$$\underline{U} = c \times \left(\cosh\left(\frac{t'c}{L}\right), \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$$

et $\underline{U}^2 = c^2 \times \left[\cosh^2\left(\frac{t'c}{L}\right) - \sinh^2\left(\frac{t'c}{L}\right) \right] = c^2$

car $\cosh^2\left(\frac{t'c}{L}\right) = 1 + \sinh^2\left(\frac{t'c}{L}\right)$.

On retrouve donc bien également $\underline{U}^2 = c^2$ pour le référentiel de la fusée

d) $\underline{\tau} = \frac{d\underline{U}}{dt'} = \gamma \times \frac{d\underline{U}}{dt} = \gamma \times \left(\dot{\gamma} c, \dot{\gamma} \underline{v} + \gamma \underline{\dot{a}} \right)$

dans R' dans R

De nos résultats précédents, on a $\underline{U} = c \times \left(\cosh\left(\frac{t'c}{L}\right), \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$

Donc : $\underline{\tau} = \frac{d}{dt'} c \times \left(\cosh\left(\frac{t'c}{L}\right), \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$

$$\underline{\tau} = c^2 \times \left(\frac{1}{L} \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), \frac{1}{L} \cosh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$$

$$\underline{\tau} = \frac{c^2}{L} \times \left(\sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), \cosh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$$

$$\text{et } \underline{\Gamma}^2 = \frac{c^4}{L^2} \times \left[\sinh^2\left(\frac{t'c}{L}\right) - \cosh^2\left(\frac{t'c}{L}\right) \right] = \boxed{-\frac{c^4}{L^2}}$$

Et, pour le référentiel du laboratoire, le quadri-vecteur accélération pour le temps est exprimé :

De nos résultats précédents, on a :

$$x(t'(t)) = L \times \cosh\left(\frac{t'c}{L}\right) \Rightarrow x = L \times \cosh\left(\frac{t'c}{L}\right) \quad (\text{Page 3})$$

et le quadri-vecteur position a pour norme $\underline{X}^2 = -L^2$ (Page 2).

On a également exprimé le temps t en fonction de t' (page 3) tel que :

$$t = \frac{L}{c} \sinh\left(\frac{t'c}{L}\right) \quad / \quad \text{et } \underline{\Gamma} = \frac{c^2}{L} \times \left(\sinh\left(\frac{t'c}{L}\right), \cosh\left(\frac{t'c}{L}\right), 0, 0 \right)$$

$$\text{On a donc ; } \underline{\Gamma} = \frac{c^2}{L} \times \left(\frac{t \times c}{L}, \frac{x}{L}, 0, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ et } \underline{\Gamma}^2 &= \frac{c^4}{L^2} \times \left[\frac{1}{L^2} \times (ct)^2 - \frac{1}{L^2} \times x^2 \right] \\ &= \frac{c^4}{L^4} \times [(ct)^2 - x^2], \text{ on } \underline{X} = (ct)^2 - x^2 = -L^2 \end{aligned}$$

$$\text{On retrouve donc bien } \underline{\Gamma}^2 = \frac{c^4}{L^4} \times (-L^2) = -\frac{c^4}{L^2}$$

Le mouvement est donc un mouvement à accélération propre constante. ~~Mouvement à accélération propre constante~~

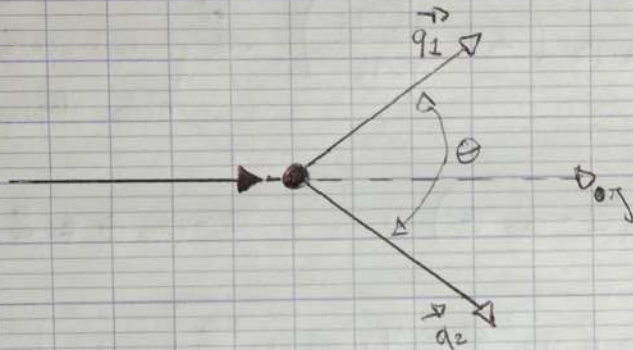
De plus, il est rectiligne car $y(t) = 0$ et $z(t) = 0$.

B) Désintégration d'une particule neutre en deux photons

Dans le référentiel R , laboratoire :

- un pion π^0 de masse $m_0 = 135 \text{ MeV}/c^2$, d'impulsion colinéaire à Ox
- se désintègre en deux photons d'impulsion $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_2$.

1)



$\underline{P}$ est le vecteur quadri-impulsion du pion π^0 , tel que $\underline{P} = m \underline{U}$ avec $\underline{U}$ le quadri-vecteur vitesse

On a alors, $\underline{P}^2 = m^2 \underline{U}^2 = m^2 c^2$
 et $\underline{P} = \gamma(m c, m \vec{v}) = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ avec $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ la quantité de mouvement tel que $\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$

Dans le cadre de cette désintégration et par conservation de la quadri-impulsion, on a $\underline{P} = \underline{Q}_1 + \underline{Q}_2$ avec $\underline{Q}_1$ et $\underline{Q}_2$ les vecteurs quadri-impulsion des photons, tel que $\underline{Q}_1 = (\frac{E_1}{c}, \vec{q}_1)$ (resp $\underline{Q}_2$)

• En élevant au carré, on a $\underline{P}^2 = \underline{Q}_1^2 + \underline{Q}_2^2 + 2 \underline{Q}_1 \cdot \underline{Q}_2$

On $\underline{Q}_1^2 = m_1^2 c^2 = m_2^2 c^2 = \underline{Q}_2^2 = 0$ car les photons sont de masse nulle

et $2 \underline{Q}_1 \cdot \underline{Q}_2 = 2 \times \left(\frac{E_1 E_2}{c} - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 \right)$ par propriété du produit scalaire.

L'équation devient donc :

$$\underline{P}^2 = 2 \times \left(\frac{E_1 E_2}{c^2} - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 \right) \quad \text{et} \quad \underline{P}^2 = m_0^2 c^2$$

avec m_0 la masse de π^0

- De plus on sait que $\underline{Q}_1^2 = 0 = \frac{E_1^2}{c^2} - q_1^2$ par propriété de la norme

On a donc $q_1^2 = \frac{E_1^2}{c^2}$ et $q_2^2 = \frac{E_2^2}{c^2}$

- On peut donc écrire :

$$m_0^2 c^2 = 2 q_1 q_2 \left(1 - \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{q_1 q_2} \right)$$

Le produit scalaire entre $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_2$
nous donne $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = q_1 q_2 \cos \theta$

$$\Rightarrow m_0^2 c^2 = 2 q_1 q_2 (1 - \cos \theta) \quad 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow m_0^2 c^2 = 2 q_1 q_2 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 4 q_1 q_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

De par les propriétés du sinus, on voit bien que l'angle ne peut pas être nul, car la quantité $m_0^2 c^2$ serait également nul.

Et la masse $m_0 \neq 0$, car $m_0 = \frac{135}{c^2} \text{ MeV}$

Schématiquement, on décide que $\theta < \pi$.

2) a)

L'impulsion est conservée - ~~conservation~~

Dans R^* , on aura $\underline{P}^* = \left(\frac{E_0^*}{c}, \vec{p}^* = 0 \right)$

et $\underline{P}^* = \underline{Q}_1^* + \underline{Q}_2^*$ avec $\underline{Q}_i^* = \left(\frac{E_i^*}{c}, \vec{q}_i^* \right)$ (resp Q_2)

On a donc par conservation de l'impulsion : $0 = \vec{q}_1^* + \vec{q}_2^*$

Ainsi $\vec{q}_1^* = -\vec{q}_2^*$ et Θ_2^* est alors dans la même direction que Θ_1^* mais de sens opposé : $\Theta_2^* = \Theta_1^* + \pi$.

b) On a également de par la conservation de l'énergie :

$$\frac{E_0^*}{c} = \frac{E_1^*}{c} + \frac{E_2^*}{c} \Leftrightarrow E_0^* = E_1^* + E_2^*$$

Et, la relation masse énergie donne : $q_1^* = \frac{E_1^*}{c}$, $q_2^* = \frac{E_2^*}{c}$

$$\Rightarrow m_0 c^2 = c \times (q_1^* + q_2^*) \Leftrightarrow m_0 c = q_1^* + q_2^*$$

On, on sait de par la partie précédente que $q_1^* = q_2^*$

Donc ; $m_0 c = 2q_1^* \Leftrightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{m_0 c}{2}$.

c) Dans le cadre de notre désintégration, le pion π_0 est de spin nul. C'est à dire qu'il n'y a pas de grandeur vectorielle dont la direction est celle de l'axe de notation, il n'y a donc pas de direction dont dépend la direction angulaire. $\frac{dN}{d\Omega^*}$ est une constante indépendante d'une quelconque direction.

3. Retour au référentiel R

a)

Pour passer du référentiel du laboratoire au référentiel du pion $R \rightarrow R^*$, on utilise la formule du cours :

$$\underline{P} = \Lambda^{-1} \underline{P}^* \quad \text{avec } \Lambda, \text{ la matrice de Lorentz tel que } \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

et $\underline{P}, \underline{P}^*$ les quadri-vecteurs impulsions.

On avait $\underline{P} = \left(\frac{E_0}{c}, \vec{p} \right)$ et $\underline{P}^* = \left(\frac{E_0^*}{c}, 0 \right)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E_0}{c} \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_0^*}{c} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{E_0}{c} = \gamma \frac{E_0^*}{c} + 0 \quad \text{et} \quad p_y = \beta\gamma \frac{E_0^*}{c} \\ \downarrow \\ \gamma m_0 c = \frac{E}{c} \quad \text{et} \quad p_y^2 = \beta^2 \gamma^2 \frac{E_0^{*2}}{c^2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}} \quad \text{et} \quad p_y^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \quad \text{car} \quad E = \gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Ainsi ; ~~$\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = \beta^2 \gamma^2 \frac{E_0^{*2}}{c^2}$~~ et, $\gamma \frac{E_0^*}{c} = \frac{E}{c}$ (première égalité)

$$\Rightarrow \gamma^2 \frac{E_0^{*2}}{c^2} = \frac{E^2}{c^2}$$

Donc ; $\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = \beta^2 \gamma^2 \frac{E_0^{*2}}{c^2} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - m_0^2 c^2 \times \frac{c^2}{E^2}$

$$\beta^2 = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2} \Leftrightarrow \boxed{\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

b)

En reprenant la relation de passage de R^* vers R :

$$\underline{P} = \Lambda^{-1} \underline{P}^*, \text{ on a :}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_1^*}{c} \\ q_1^* \end{pmatrix}$$

En exprimant $\vec{q}_1^*$ avec la norme q_1^* , on a : $\vec{q}_1^* = q_1^* \cos \theta_1^*$

De plus on sait que $q_1^* = \frac{m_0 c}{2}$.

Ainsi ; $\boxed{\vec{q}_1^* = \frac{m_0 c}{2} \cos \theta_1^*}$

On a pose précédemment $\frac{E_1}{c} = q_1$ et $\frac{E_1^*}{c} = q_1^* = \frac{m_0 c}{2}$

Notre équation devient alors $q_1 = \gamma \frac{E_1^*}{c} + \beta \gamma \frac{m_0 c}{2} \cos \theta_1^*$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{m_0 c}{2} \gamma (1 + \beta \cos \theta_1^*)$$

De la même manière $q_2 = \frac{m_0 c}{2} \gamma (1 + \beta \cos \theta_2^*)$

Or, $\theta_2^* = \theta_1^* + \pi$, $\Rightarrow \cos(\theta_2^*) = \cos(\theta_1^* + \pi) = -\cos(\theta_1^*)$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{m_0 c}{2} \gamma (1 - \beta \cos \theta_1^*)$$

La relation obtenue à la première question était :

$$m_0^2 c^2 = 4 q_1 q_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

En composant, on obtient donc :

$$m_0^2 c^2 = 4 \times \frac{1}{4} m_0^2 c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta_1^*) \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow (1 - \beta^2 \cos^2 \theta_1^*) \gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \cancel{\gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \left[\beta \cos \theta_1^* \times \gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \beta^2 \cos^2 \theta_1^*$$

$$\cos \theta_1^* = \frac{1}{\beta} \times \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

CQFD.

c) $dN = C \times d(-\cos \theta_1^*) d\varphi_1^*$

On a $\cos \theta_1^* = \frac{1}{\beta} \times \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$

$$u = 1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$u' = + \frac{1}{\gamma^2} \times \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d(-\cos \theta_1^*)}{d\theta} = -\frac{1}{\beta} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow \frac{d(-\cos \theta_1^*)}{d\theta} = -\frac{1}{2\beta} \times \frac{1}{\gamma^2} \times \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}}$$

$$= -\frac{1}{2\gamma^2 \beta} \times \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

$$= -\frac{1}{2\gamma^2 \beta} \times \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

Soient les photons, on a toujours $\varphi = \varphi^*$, ainsi :

$$\frac{dN}{d\theta d\varphi} = \frac{dN}{d(-\cos \theta_1^*) d\varphi_1^*} \times \left| \frac{d(-\cos \theta_1^*)}{d\theta} \right|$$

donnée par l'énoncé.

Calcul précédent

On prend la valeur absolue car le théorème de changement de variable pour des fonctions intégrables fait intervenir la valeur absolue du déterminant de la matrice des dérivées partielles (Jacobien)

En effet, $\frac{dN}{d(-\cos \theta_1^*) d\varphi_1^*} = C$

$$\Rightarrow \frac{dN}{d\theta d\varphi} = \frac{C}{2\gamma^2 \beta} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

d)

$$\text{On a } \frac{dN}{d\theta d\varphi} = \frac{C}{2\beta\gamma^2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

On se doit alors d'avoir $\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\gamma^2} > 0$.

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} > \frac{1}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \theta > 2 \times \arcsin \left(\frac{1}{\gamma} \right)$$

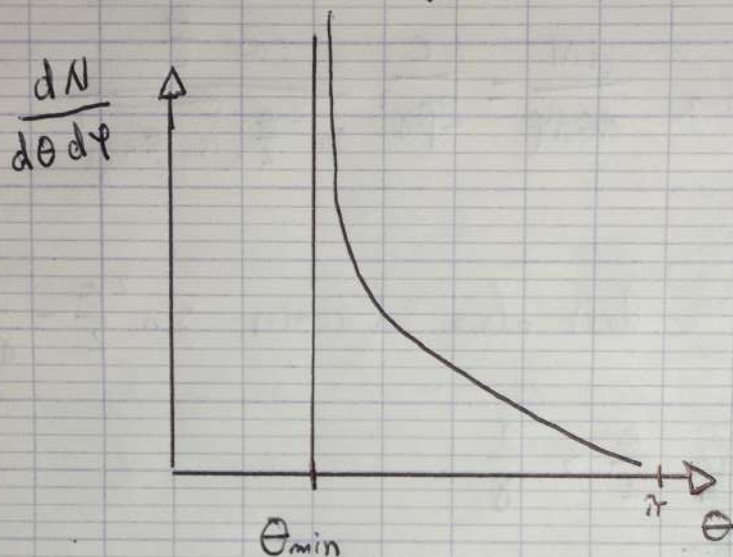
On a posé précédemment $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$ (page 10)

$$\Rightarrow \theta > 2 \times \arcsin \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)$$

L'angle minimal $\theta_{\min}$ correspond donc à cette valeur
tel que $\theta > \theta_{\min}$

$$\text{Soit } \boxed{\theta_{\min} = 2 \times \arcsin \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)}$$

On obtient donc un graphique de cette forme :



$$\text{à } \theta_{\min} : \sqrt{\gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1} = 0$$

Si $\theta_{\min} = 25^\circ$, on a :

$$\sin \frac{\theta_{\min}}{2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c^2}{E}$$

$$\Rightarrow \sin(12,5^\circ) = \frac{m_0 c^2}{E}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sin(12,5^\circ)} = \frac{135}{0,2165} \text{ MeV}$$

avec $m_0 = 135 \text{ MeV}/c^2$

$$E = 623,56 \text{ MeV}$$