69. س عدد حقيقي بحيث يكون $0 \leqslant$ س < 8

1) م مبلغ من المال موزع على ثلاثة أشخاص بالتناسب مع الأعداد الحقيقية 8 − س للشخص الأول ، 8 للشخص الثاني ، 8 + س للشخص الثالث .
احسب حصة كل واحد .

2) م هو نفس المبلغ موزع في هذه المرة على نفس الأشخاص بالتناسب مع ، 8 للشخص الأول ، 8 + س للثاني و 8 + 2 س للثالث .
احسب حصة كل شخص بعد التوزيع الثاني .

3) عين س حتى تكون حصة الشخص الأول في التوزيع الأول تساوي $\frac{3}{4}$ حصته في التوزيع الثاني .

70. س ، ع ، ص ثلاثة قياسات بالدرجات لزوايا مثلث متقايس الساقين.ط عدد حقيقي

1) احسب س ، ع ، ص إذا علمت أن ع و ص متناسبتان مع : 2 و 5 .

2) احسب س ، ع ، ص بدلالة ط إذا علمت أن ع و ص متناسبان مع : ط و 5

3) احسب س ، ع ، ص ، ط ، بحيث :
س = ص ؛ ع و ص متناسبتان مع ط و 5 ؛ ص − ع = $30°$.

8 أشعة المستوي — الجمع الشعاعي

1 ـ أشعة المستوي

1.1 . الثنائيات النقطية من المستوي :

« شكل 1 »

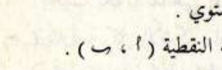
علم نقطتين أ و ب (شكل 1)

إن الثنائية المرتبة (أ ، ب) هي **ثنائية نقطية من المستوي** .

أ **مبدأ** الثنائية النقطية (أ ، ب) ؛ ب **نهاية** الثنائية النقطية (أ ، ب) .

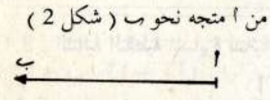
تقول إن الثنائية النقطية (أ ، أ) **ثنائية نقطية معدومة** .

تمثل الثنائية النقطية (أ ، ب) بسهم منطلق من أ متجه نحو ب (شكل 2)



« شكل 2 »

2.1 . الاتجاه على مستقيم :



« شكل 3 »

• ارسم مستقيما (ق)

علم على (ق) نقطتين مختلفتين أ و ب (شكل 3)

تعلم أن الثنائية النقطية (أ ، ب)

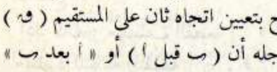
تسمح بتعيين اتجاه أول على المستقيم (ق) :

وهو الاتجاه من أ نحو ب الذي تقول من أجله أن « أ قبل ب » أو « ب بعد أ »

وتعلم أيضاً أن الثنائية النقطية (ب ، أ) تسمح بتعيين اتجاه ثان على المستقيم (ق)

وهو الاتجاه من ب نحو أ الذي تقول من أجله أن (ب قبل أ) أو « أ بعد ب »

وتعلم أيضاً ان هذين الاتجاهين متعاكسان وانهما الاتجاهان الوحيدان اللذان يمكن تعيينهما على المستقيم (ق)



« شكل 4 »

سم (س ع) المستقيم (ق)

شاهد الشكل 4 : إن السهم يعني

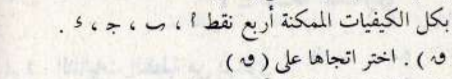
انك اخترت على المستقيم (س ع)

الاتجاه من أ نحو ب

• تعلم أيضا ان اختيار اتجاه على المستقيم (ف) يسمح لك بتعريف علاقة ترتيب في (ف) وهي العلاقة : « ... تسبق أو تطابق ... »

ا) ارسم مستقيما (ف) . اختر اتجاها على (ف)
علم على (ف) بكل الكيفيات الممكنة أربع نقط ا ، ب ، ج ، د .
ب) ارسم مستقيما (ف) . اختر اتجاها على (ف)
علم على (ف) بكل الكيفيات الممكنة أربع نقط ا ، ب ، ج ، د
بحيث يكون لقطعتي المستقيم [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف .
ج) بدراسة كل الأشكال المحصل عليها في التمرين ب) السابق بين أنه :
إذا كان للقطعتين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف فإن ا ب = ج د

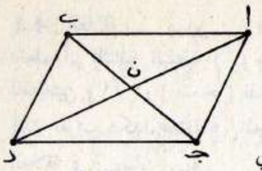
3.1 . الثنائية النقطية المسايرة لثنائية نقطية أخرى :



• أرسم مستقيما (△)
اختر اتجاها على (△)

« شكل 5 »

علم عليه أربع نقط ا ، ب ، ج ، د حيث يكون للقطعتين المستقيمتين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف ن (شكل 5) أرسم كل الأشكال الممكنة.
تقول إن الثنائية النقطية (ا ، ب) **مسايرة** للثنائية النقطية (ج ، د)
• يمكنك أن تقول إن للقطعتين المستقيمتين [ا د] و [ن ن] نفس المنتصف تستنتج أنه :
إذا كان ن منتصف القطعة [ا د] فإن الثنائية النقطية (ا ، ن) مسايرة للثنائية النقطية (ن ، د) .
عندما تحل التمرين ج) من الفقرة 2.1 تكون قد بينت أنه :
إذ كان للقطعتين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف فإن ا ب = ج د
تلاحظ أنه :
إذا كانت النقط ا ، ب ، ج ، د على استقامة واحدة وإذا كانت الثنائية (ا ، ب) مسايرة للثنائية (ج ، د) فإن ا ب = ج د .



« شكل 6 »

• عين الآن أربع نقط ا ، ب ، ج ، د من المستوي بحيث لا تكون أية ثلاثة منها على استقامة واحدة وبحيث يكون للقطعتين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف ن (شكل 6)
تقول أيضا إن الثنائية النقطية (ا ، ب) **مسايرة** للثنائية النقطية (ج ، د)

تعريف :

> تكون الثنائية النقطية (ا ، ب) **مسايرة** للثنائية النقطية (ج ، د) اذا كان للقطعتين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف .

ترمز لهذا بما يلي : (ا ، ب) ~ (ج ، د) . وتقرأ : (ا ، ب) تساير (ج ، د)
تلاحظ في حالة الشكل (6) أن القطعتين [ا د] و [ب ج] هما قطرا الرباعي ا ب د ج
لهذين القطرين نفس المنتصف . تستنتج ان الرباعي ا ب د ج متوازي أضلاع .
تعلم أنه اذا كان الرباعي ا ب د ج متوازي أضلاع فإن للقطرين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف .
في حالة ما إذا كانت ا ، ب ، ج ، د أربع نقط بحيث لا تكون أية ثلاث منها على استقامة واحدة تلاحظ أن :
(ا ، ب) تساير (ج ، د) يعني ان الرباعي ا ب د ج متوازي أضلاع
• نتفق على أن ثنائية نقطية معدومة تساير أي ثنائية نقطية معدومة أخرى .

ا) بين أنه :
إذا كانت الثنائية النقطية (ا ، ب) تساير الثنائية النقطية (ج ، د) فان الثنائية النقطية (ا ، ج) تساير الثنائية النقطية (ب ، د) .
ب) بين أنه :
إذا كانت (ا ، ب) ~ (ج ، د) فإن (د ، ب) ~ (ج ، ا)

4.1 . العلاقة « ... يساير ... » في مجموعة الثنائياتُ النقطية من المستوي :

تعلم أن الثنائية النقطية (أ ، ب) تساير الثنائية النقطية (ج ، د) إذا كان للقطعتين [أ د] و [ب ج] نفس المنتصف .

إنك تعرف هكذا علاقة في المجموعة ج للثنائيات النقطية من المستوى و هي العلاقة « ... يساير ... » .

• من أجل كل ثنائية (أ ، ب) تكون القطعتان [أ ب] و [ب أ] متساويتين . لهما اذا نفس المنتصف .

تستنتج أنه : من أجل كل ثنائية نقطية (أ ، ب) : (أ ، ب) ~ (أ ، ب)

تستنتج أن : كل ثنائية نقطية تساير نفسها .

اذن العلاقة « ... يساير ... » في ج انعكاسية .

• اذا كانت الثنائية النقطية (أ ، ب) تساير الثنائية النقطية (ج ، د) هذا يعني أن للقطعتين [أ ب] و [ج د] نفس المنتصف ويعني أن للقطعتين [ج د] و [أ ب] نفس المنتصف أيضا .

تستنتج أنه اذا كان : (أ ، ب) ~ (ج ، د) فإن (ج ، د) ~ (أ ، ب)

يمكنك أن تستخلص أنه :

كلما كانت ثنائية نقطية (أ ، ب) مسايرة لثنائية نقطية (ج ، د)

تكون (ج ، د) مسايرة لـ : (أ ، ب)

تقول ان الثنائيتين النقطيتين (أ ، ب) و (ج ، د) **متسايرتان**

إذن العلاقة « ... يساير ... » في ج تناظرية .

• لنبين أنه :

اذا كانت (أ ، ب) ~ (ج ، د) و (ج ، د) ~ (هـ ، و) فإن

(أ ، ب) ~ (هـ ، و)

لديك خمس حالات :

الحالة الأولى :

المستقيمات (أ ب) ، (ج د) و (هـ و) متمايزة مثنى مثنى (شكل 7)

تعرف في هذه الحالة أن :

(أ ، ب) ~ (ج ، د) يعني أن الرباعي أ ب د ج متوازي أضلاع .

(ج ، د) ~ (هـ ، و) يعني أن الرباعي ج د و هـ متوازي أضلاع .

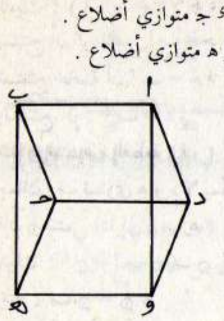
تستنتج أن :

(أ ب) // (ج د) و ج د = هـ و

تستنتج أن : (أ ب) // (هـ و) و أ ب = هـ و

إن الرباعي أ ب و هـ متوازي أضلاع .

تستنتج أن (أ ، ب) ~ (هـ ، و)



« شكل 7 »

الحالة الثانية :

المستقيمان (أ ب) و (ج د) متطابقان والمستقيمان (أ ب) و (هـ و) متمايزان (شكل 8)

لديك (أ ، ب) ~ (ج ، د) .

تستنتج أن :

للقطعتين [أ د] و [ب ج] نفس المنتصف ن

وتستنتج أن : أ ب = ج د

لديك : (أ ب) // (ج د) و أ ب = ج د

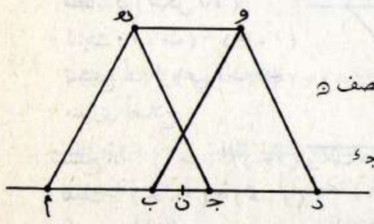
إن الرباعي ج د و هـ متوازي أضلاع .

تستنتج أن (أ ب) // (هـ و) و ج د = هـ و

وتستنتج أن (أ ب) // (هـ و) و أ ب = هـ و

إن الرباعي أ ب و هـ متوازي أضلاع .

تستنتج أن : (أ ، ب) ~ (هـ ، و)

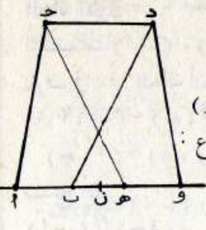


« شكل 8 »

الحالة الثالثة :

المستقيمان (ا ب) و (ج د) متمايزان

والمستقيمان (ا ب) و (هـ و) متطابقان (شكل 9)



« شكل 9 »

لديك : (ا ، ب) ~ (ج ، د) و (ج ، د) ~ (هـ ، و)

تستنتج أن الرباعيين ا ب د ج و ج د و هـ متوازيان أضلاع :

تستنتج خاصة أن ا ب = ج د و ج د = هـ و

وتستنتج أن : ا ب = هـ و

سمّ ن منتصف القطعة [ا و]

بما أن ا ب تساوي هـ و ، لا يمكن للنقطة ن أن تنتمي الى [ا ب] ولا إلى [هـ و] .

فإن ن تنتمي اذا إلى [ب هـ]

لديك : ا ن = ا ب + ب ن ، ن و = ن هـ + هـ و ، ا ب = هـ و

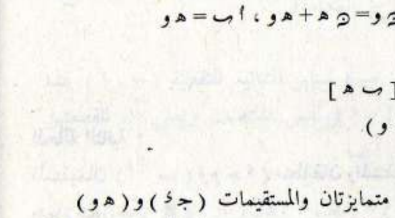
ومنه : ب ن = ن هـ

تستنتج أن : ن منتصف القطعة [ب هـ]

تستنتج أن : (ا ، ب) ~ (هـ ، و)

الحالة الرابعة :

المستقيمات (ا ب) و (ج د) متمايزتان والمستقيمات (ج د) و (هـ و) متطابقان (شكل 10)



« شكل 10 »

لديك (ا ، ب) ~ (ج ، د)

تستنتج أن الرباعي ا ب د ج متوازي أضلاع

تستنتج أن : (ا ب) // (ج د) و ا ب = ج د

لديك : (ج ، د) ~ (هـ ، و)

تستنتج إن للقطعتين [ج و] و [د هـ] نفس المنتصف

تستنتج أن : ج د = هـ و

تستنتج أن : (ا ب) // (هـ و) و ا ب = هـ و

تستنتج أن الرباعي ا ب و هـ متوازي أضلاع

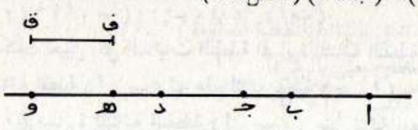
تستنتج أن : (ا ، ب) ~ (هـ ، و)

الحالة الخامسة :

المستقيمات (ا ب) ، (ج د) ، (هـ و) متطابقة (شكل 11)

علم ثنائية نقطية (ف ، ق) بحيث : ف ∉ (ا ب) ، ق ∉ (ا ب)

و (ف ، ق) ~ (ج ، د) (شكل 11)



« شكل 11 »

لديك : (ا ، ب) ~ (ج ، د) و (ج ، د) ~ (ف ، ق) .

إن النتيجة المحصل عليها في الحالة الثانية تمكنك من الاستنتاج أن :

(ا ، ب) ~ (ف ، ق)

لديك : (ف ، ق) ~ (ج ، د) و (ج ، د) ~ (ف ، ق)

تستنتج حسب نفس النتيجة ، أن : (هـ ، و) ~ (ف ، ق)

لديك اذا : (ا ، ب) ~ (ف ، ق) و (ف ، ق) ~ (هـ ، و)

إن النتيجة المحصل عليها في الحالة الثالثة تمكنك من الاستنتاج أن :

(ا ، ب) ~ (هـ ، و) .

بينت في كل الحالات أنه إذا كان :

(ا ، ب) ~ (ج ، د) و (ج ، د) ~ (هـ ، و) فإن (ا ، ب) ~ (هـ ، و) .

يمكنك أن تستخلص أنه :

كلما كانت ثنائية نقطية (ا ، ب) مسايرة لثنائية نقطية (ج ، د) وكانت (ج ، د) مسايرة لثنائية نقطية (هـ ، و) تكون (ا ، ب) مسايرة لـ (هـ ، و)

إذن العلاقة « ... يساير ... » في ج **متعدية**

إن هذه العلاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية في آن واحد فهي إذا علاقة تكافؤ في مجموعة الثنائيات النقطية من المستوى .

تقول : إن هذه العلاقة هي **علاقة التساير** .

أ) علم ثنائيتين نقطيتين (أ ، ب) و (ج ، د) بحيث :

(أ ، ب) ~ (ج ، د) .

علم ثنائيتين نقطيتين (هـ ، و) و (ف ، ق) بحيث :

(هـ ، و) ~ (أ ، ب) و (ف ، ق) ~ (أ ب)

هل يمكنك تعيين كل الثنائيات النقطية المسايرة للثنائية النقطية (أ ، ب) ؟

ب) علم ثنائية نقطية (أ ، ب) ثم علم ثنائية نقطية (ج ، د) بحيث لا تكون (ج ، د) مسايرة للثنائية النقطية (أ ، ب) . عين ثنائية نقطية (هـ ، و) تساير (أ ، ب) .هل (هـ ، و) تساير (ج ، د) ؟

5.1 . أشعة المستوى :

• لقد عرفت أن العلاقة « ... يساير ... » في المجموعة ج للثنائيات النقطية من المستوي هي علاقة تكافؤ .

إذا كانت (أ ، ب) ثنائية نقطية من المستوي فإنك تعرف أن :

مجموعة الثنائيات النقطية من المستوي التي تساير (أ ، ب) هي صنف تكافؤ الثنائية النقطية (أ ، ب) .

يشمل هذا الصنف عدداً لا نهائيا من الثنائيات النقطية : (أ ، ب) ، (أ$_1$ ، ب$_1$) (أ$_2$ ، ب$_2$) ، (أ$_3$ ، ب$_3$) ....

تقول إن هذا صنف التكافؤ هو **شعاع** من المستوى

تعين صنف تكافؤ الثنائية النقطية (أ ، ب) بالرمز $\overleftarrow{\text{أب}}$ وتقرأ : شعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$

تعرف أن : كلا من الثنائيات النقطية (أ ، ب) ، (أ$_1$ ، ب$_1$) ، (أ$_2$ ، ب$_2$)... تعين نفس صنف التكافؤ .

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{أ}_1\text{ب}_1} = \overleftarrow{\text{أ}_2\text{ب}_2} = \overleftarrow{\text{أ}_3\text{ب}_3} \ldots$

يمكنك أن تعين الشعاع بحرف واحد يعلوه سهم .

سم $\overleftarrow{\text{ش}}$ الشعاع السابق .

كل ثنائية نقطية (أ ، ب) ، (أ$_1$ ، ب$_1$) ، (أ$_2$ ، ب$_2$) ، (أ$_3$ ، ب$_3$) ... ممثل للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$.

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{أ}_1\text{ب}_1} = \overleftarrow{\text{أ}_2\text{ب}_2} = \ldots$

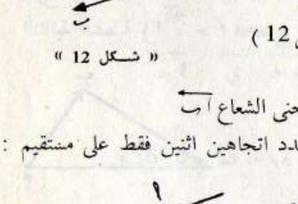
إن مجموعة أصناف التكافؤ من أجل علاقة التساير في مجموعة الثنائيات النقطة من المستوى هي **مجموعة أشعة المستوى** .

ارمز لهذه المجموعة بالحرف : ش

• إن الشعاع الممثل بالثنائية النقطية المعدومة (أ ، أ) هو **الشعاع المعدوم**.يعين بالرمز $\overleftarrow{0}$.

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{\text{أأ}} = \overleftarrow{0}$.

• لا يمكنك أن ترسم شعاعا لأنه يجب أن ترسم كل الثنائيات النقطية التي تمثل نفس الصنف وعددها غير منته .



« شكل 12 »

تكتفي برسم ثنائية نقطية تمثل هذا الشعاع يمكنك أن تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ كما هو مبين في الشكل 12.

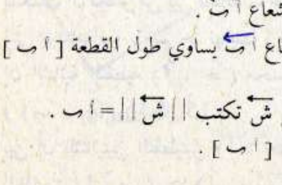
(أ ، ب) ممثل للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ (شكل 12)

(أ$_1$ ، ب$_1$) ممثل آخر للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ (شكل 12)

يكون اختيار المبدأ لممثل الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ كيفيا

تقول ان منحنى المستقيم (أ ، ب) هو منحنى الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$

تعرف أن الثنائية النقطية (أ ، ب) تحدد اتجاهين اثنين فقط على مستقيم :



« شكل 13 »

اتجاه أ نحو ب واتجاه ب نحو أ (شكل 13)

تقول ان :

الاتجاه من أ نحو ب هو **اتجاه** الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$

وتقول ان طول القطعة [أ ب] هو **معيار** الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$.

تكتب $\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$ = أ ب . وتقرأ معيار الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$ يساوي طول القطعة [أ ب] أو البعد بين أ و ب .

إذا كانت الثنائية (أ ، ب) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ تكتب $\|\overleftarrow{\text{ش}}\|$ = أ ب .

تقرأ : معيار الشعاع ش يساوي طول القطعة [أ ب] .

تلاحظ أن : $\|\overleftarrow{0}\| = 0$.