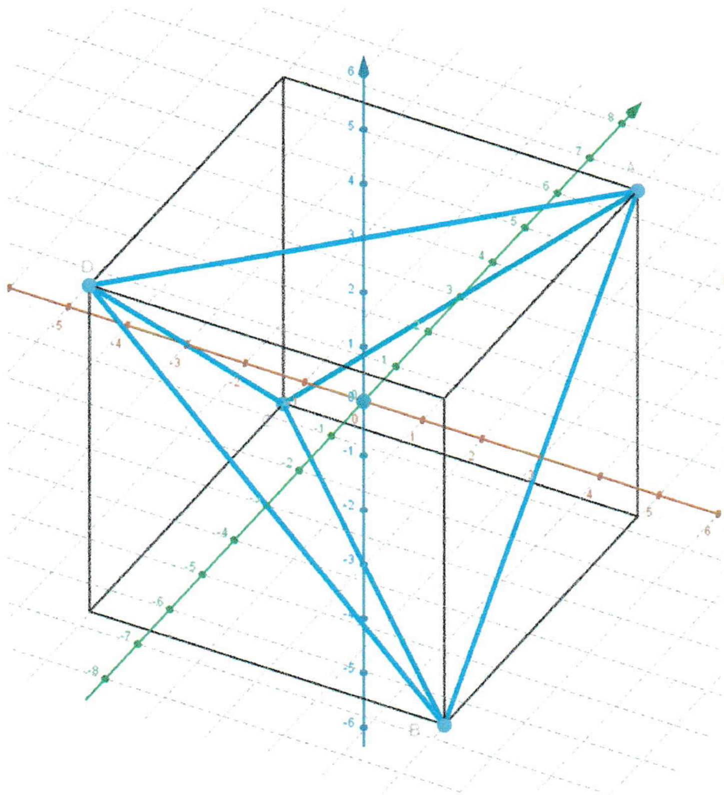
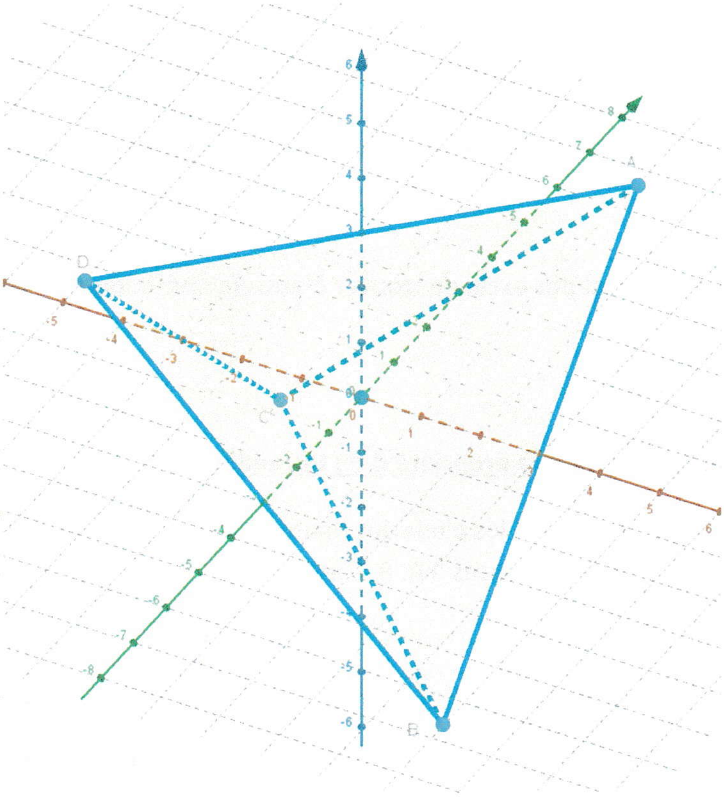
Tétraèdre régulier : dual, équations, dépassements et troncatures … 2021-04-05

Ce qui suit est la reprise de travaux antérieurs menés en 2018 et suivant, ainsi que leur compilation. Je me limiterai dans cette présentation au tétraèdre régulier, une autre édition parlera du tétraèdre non régulier (si j'ai le … temps).

<u>1°) Mise en repère et mesures</u> :

Vu les nombreuses propriétés du tétraèdre régulier, je vais le prendre inscrit dan un cube de demi côté a ≥ 0. Soit donc ABCD ce tétraèdre, avec A(a ;a ;a), B(a ;-a ;-a), C(-a ;a ;-a) et D(-a ;-a ;a). Le point O est l'origine du repère (ici a = 3).





Le tétraèdre est un polyèdre, c'est donc un solide plein, son volume est plein. Par contre, en général, on s'intéresse à la partie visible, donc sa surface constituée de 4 triangles équilatéraux …

Quelles sont ses dimensions ? Par construction, ses arêtes sont des diagonales d'un cube de côté c = 2a, donc l'arête vaut b = $2a\sqrt{2}$. Les 4 hauteurs se recoupent au point O, et ont pour valeur h = $4a\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2c\dfrac{\sqrt{3}}{3} = b\dfrac{\sqrt{6}}{3}$!

On en déduit l'aire latérale et le volume de ABCD : Aire = $2 \times b^2\sqrt{3}$, et Volume = $b^3\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

<u>2°) Quelles équations ?</u>

a) Quand on parle d'équation, en général on pense à l'équation de surface, comme pour la sphère, par exemple. Ou pour toutes les surfaces que l'on trouve en grand nombres, mais ce sont des surfaces … Or ici nous avons un solide, dont nous allons chercher une équation « pleine ». Nous reparlerons plus tard de l'équation de surface …

b) Le tétraèdre est un solide convexe, c'est-à-dire que pour chacune de ses 4 faces, il est entièrement d'un seul côté du plan contenant la face. Autrement dit, pour chaque face, il est dans un demi-espace. Il est donc à l'intersection des 4 demi-espaces (repérés). Or pour définir une équation de demi-espace, il suffit de connaître l'équation du plan frontière, et de jouer sur les signes ...

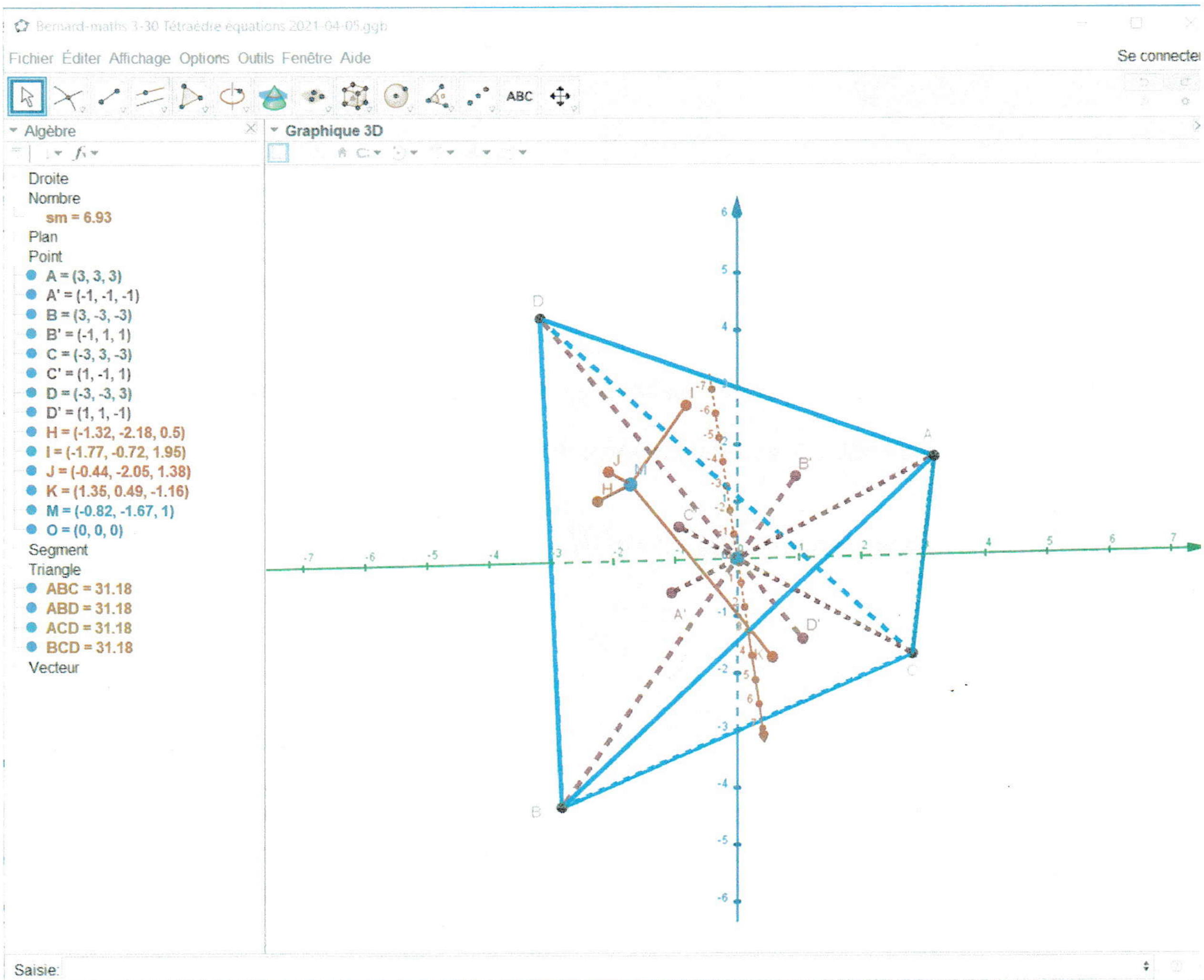
c) On peut aussi considérer le tétraèdre comme contenu dans une tranche de l'espace, définie par 2 plans parallèles. Ainsi chaque plan de chaque face et le plan parallèle passant par le sommet opposé vont définir 4 tranches d'espace. Le tétraèdre est alors considéré comme l'intersection de ces 4 tranches ... L'épaisseur d'une tranche est égale à la hauteur h du tétraèdre. Remarquons que les 4 plans, parallèles aux 4 faces, se recoupent et définissent alors le tétraèdre dual (extérieur).

d) Une propriété du tétraèdre permet d'avoir une 3ème approche : si l'on considère un point de l'espace, et ses 4 distances aux 4 plans des faces, la somme des 4 distances passe par un minimum constant pour tout point du tétraèdre plein. La somme minimale est égale à la hauteur h du tétraèdre.

e) Il n'est pas exclu de trouver d'autre(s) méthode(s) ... selon les objets utilisés.

3°) Equation avec la propriété d du tétraèdre :

Soient A', B', C' et D' les pieds des hauteurs issues de A, de B, de C et de D. Soit M un point de l'espace, qui se projette en H, I, J et K sur les plans opposés à A, B, C et D.



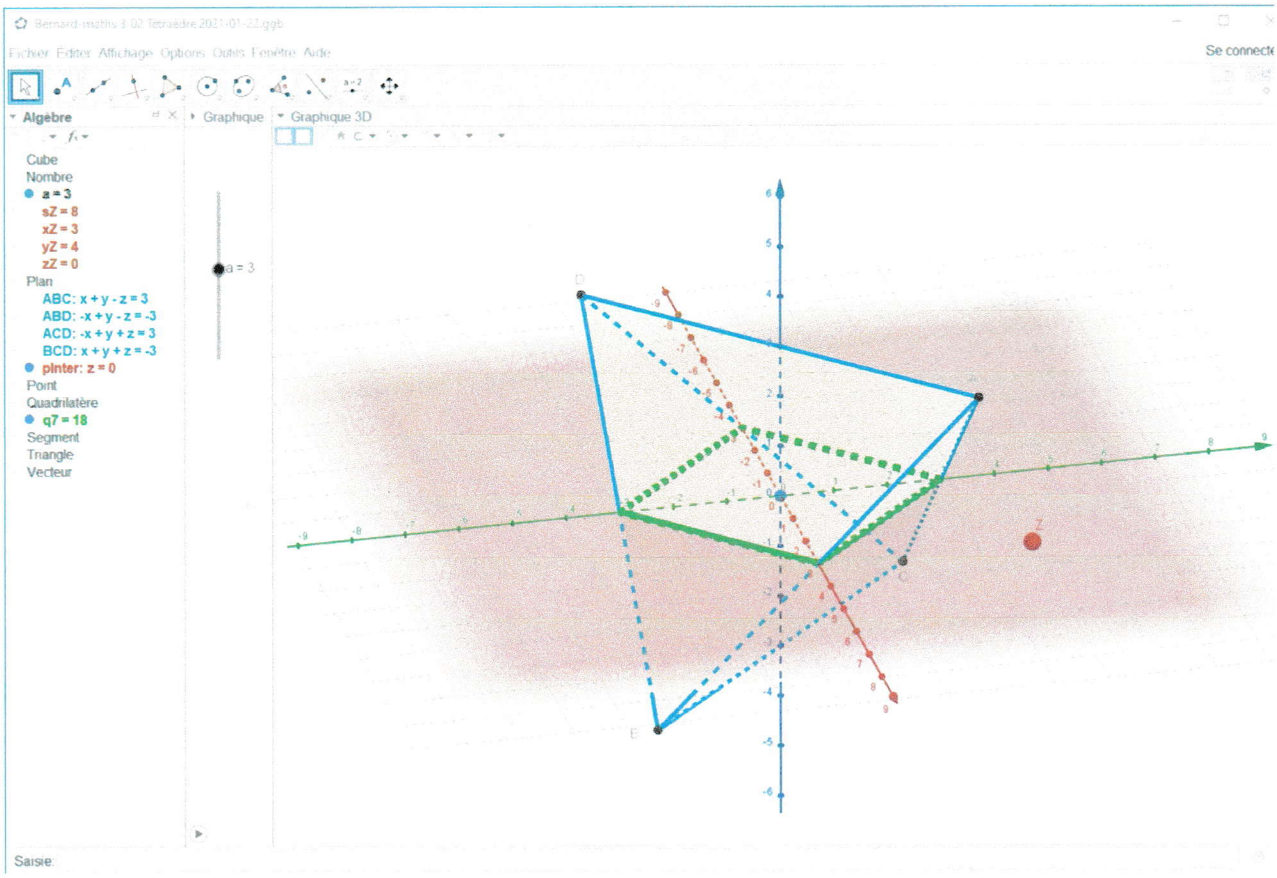
Il faut maintenant trouver des équations des 4 plans des faces. Pour cela nous avons des vecteurs normaux qui sont $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{DO}$. On a par exemple $\overrightarrow{AO}$ (-a ;-a ;-a) pour le plan BCD passant par A'(-a/3 ;-a/3 ;-a/3), d'où $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{A'M} = 0$. On obtient … x + y + z + a = 0 pour BCD. De même on aura ABC : x + y – z – a = 0 ; ABD : x - y + z - a = 0 ; ACD : x - y - z + a = 0 (aux signes près). Il reste à écrire que MH + MI + MJ + MK = h. Ce qui donne finalement :

$$|x + y - z - a| + |x - y + z - a| + |x - y - z + a| + |x + y + z + a| - 4a = 0.$$

GeoGebra/ … /Bernard-maths/Bernard-maths 3-02 Tétraèdre 2021-01-22

Peut-on vérifier cette équation ? Voyons la figure suivante …

GeoGebra/ … /Bernard-maths/Bernard-maths 3-30 Tétraèdre équations 2021-04-05



On y voit le tétraèdre, et un point Z en rouge, dont les coordonnées s'affichent à gauche : xZ = 3, yZ = 4 et zZ = 0. Par le point Z, on trace un plan (rouge) horizontal, recoupant (ou non) le tétraèdre selon un quadrilatère vert (appelé q7).

Si on place le curseur sur le point Z, on voit apparaître un flèche à 4 branches « horizontales », ou à 2 branches « verticales », et en cliquant sur Z, la forme change … Bien sur si on clique-tenu sur Z, on pet alors le déplacer dans le sens de flèches : horizontalement ou verticalement !

Verticalement : Z monte ou descend, le plan rouge aussi ! On peut alors voir le quadrilatère vert se déformer, et même disparaître si Z est trop haut ou trop bas …

Horizontalement : Z se place « dans » le plan rouge, et on peut le mettre « dans » le quadrilatère vert, à ce moment là Z devient vert ! Z redevient rouge en quittant ce quadrilatère vert.

De plus, on peut voir le nombre sZ s'afficher, et on peut constater que sZ = 0 lorsque Z est vert, et sZ > 0 lorsque Z est rouge !

En effet sZ est l'équation associée au tétraèdre plein :

$$sZ = abs(xZ + yZ - zZ - a) + abs(xZ - yZ + zZ - a) + abs(xZ - yZ - zZ + a) + abs(xZ + yZ + zZ + a) - 4a$$

On peut ainsi vérifier que l'équation trouvée pour le tétraèdre est une « bonne « équation » !