

Proposition de corrigé des

Olympiades nationales de mathématiques 2020 Orient

EXERCICES NATIONAUX

Exercice 1 : Batailles navales.

Partie A: Étude de trois cas particuliers.

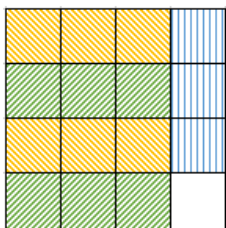
1. Cas où $n=3$

- a. Le bateau peut occuper 6 positions (soit sur les 3 lignes, soit sur les 3 colonnes).
- b. Une des possibilités est :

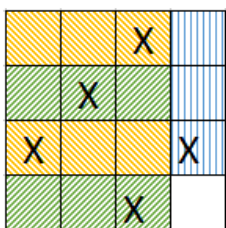
		X
	X	
X		

- c. Avec 2 tirs on peut cibler au maximum 2 bateaux (2 lignes ou 2 colonnes), par suite, on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec 2 tirs.
- d. Pour toucher un bateau, il faut le cibler au moins une fois. Et puisqu'il y a 3 bateaux, alors pour un jeu optimal on a $J(3)=3$.

2. Cas où $n=4$

- a.  (on aurait pu aussi placer 4 bateaux verticalement et un 5ème horizontalement).

On déduit que $J(4)$ ne peut pas être inférieur à 5.

- b.  Pour garantir que les 5 bateaux sont touchés, il ne faut pas laisser 3 cases blanches consécutives sur une des lignes ou sur une des colonnes.

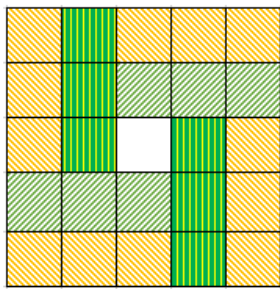
Alors $J(4)=5$.

3. Cas où $n=5$

On pourrait opter pour la configuration suivante :

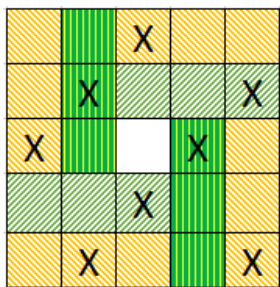
Mais ce n'est pas une configuration optimale, étant donné qu'il reste 4 cases vides!

On opte alors pour la configuration suivante :



où l'on a placé 8 bateaux au lieu de 7.

En suivant la même stratégie qui consiste à ne pas laisser 3 cases blanches consécutives horizontalement ou verticalement et à tirer une seule fois sur chaque bateau (jeu optimal), on peut alors représenter ce jeu optimal par 8 tirs suivant le schéma suivant :

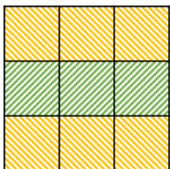


D'où, $J(5)=8$.

Partie B: Cas général.

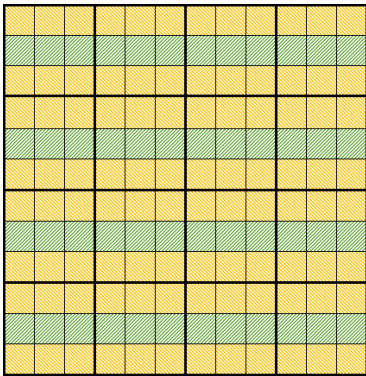
1. Cas où $n=3p$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Nommons le schéma suivant par schéma de base



cas où $n=3$.

Alors si $n=3p$, le damier carré de $n \times n$ cases peut contenir p lignes et p colonnes de schéma de base, c'est-à-dire p^2 schémas de base (contenant chacun 3 bateaux). D'où le nombre maximal de bateaux est $3p^2$. Voici un cas où $n=12$:



Alors $J(3p)$ ne peut pas être inférieur à $3p^2$.

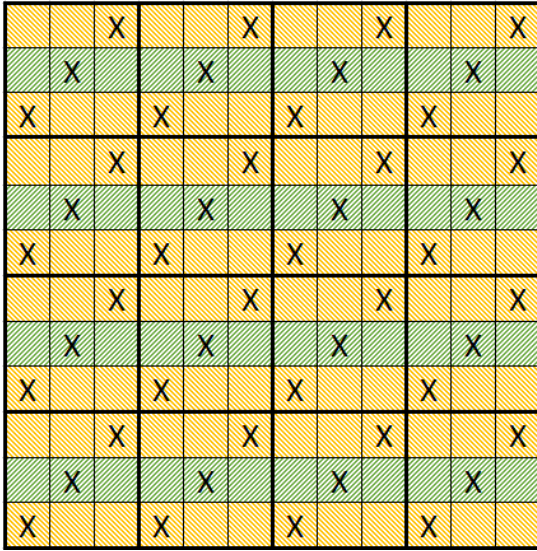


on aurait pu calculer le nombre maximal de bateaux en suivant le raisonnement ci-dessous:

Le nombre de bateaux qu'on peut ranger sur un côté est $\frac{n}{3}$. Cette rangée est répétée

n fois, d'où le nombre total est $\frac{n^2}{3}$.

b. On suit la même stratégie déjà mentionnée ci-dessus :



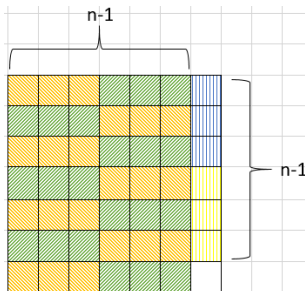
c. Le nombre maximal de bateaux étant $3p^2$ et qu'un bateau est touché si au moins un des cases qu'il occupe est touché, alors pour un jeu optimal $J(3p)=3p^2$.

2. Cas où $n=3p+1$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Le nombre de bateaux qu'on peut ranger sur un côté est $\frac{n-1}{3}$. Cette rangée est répétée n fois, donc le nombre de bateaux ainsi rangés est $\frac{n^2-n}{3}$.

Le nombre de bateaux qu'on peut ranger sur la partie restante est $\frac{n-1}{3}$.

D'où, Le nombre maximal de bateaux est $\frac{n^2-n}{3} + \frac{n-1}{3} = \frac{n^2-1}{3}$.



b. La démarche se fait suivant la même stratégie qu'avant :

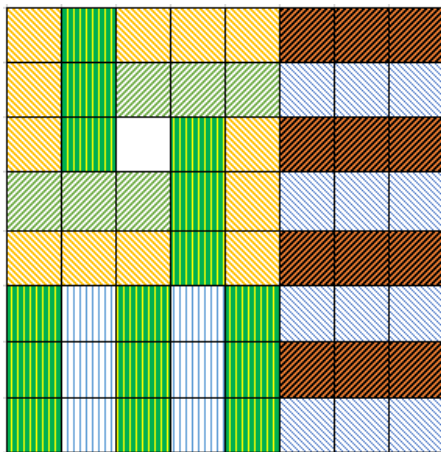


c. $J(n) = \frac{n^2-1}{3}$ ou bien $J(3p+1) = \frac{(3p+1)^2-1}{3} = 3p^2 + 2p$.

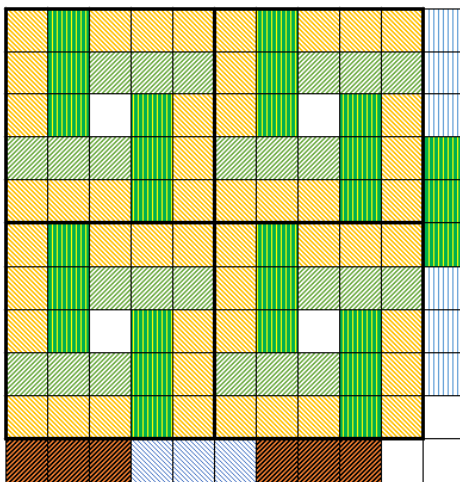
3.  Pour info:

Cas où $n=3p+1$, avec p entier et $p \geq 1$:

Si $n=8$, la configuration optimale est :

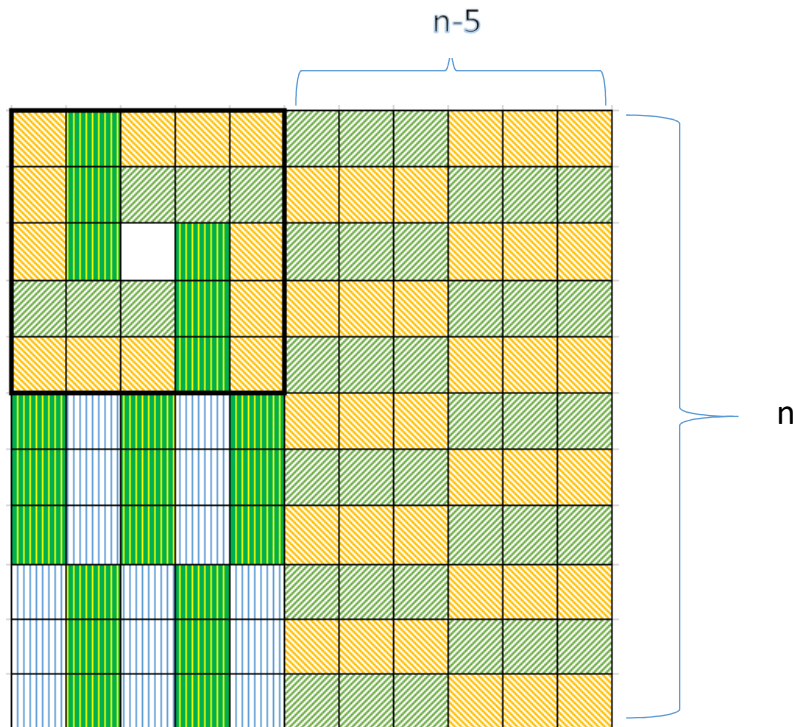


Si $n=11$, on pourrait penser à la configuration suivante :



qui n'est pas du tout optimale.

Alors pour $n=11$ (ou ≥ 8), la configuration optimale est:



Le nombre de bateaux qu'on peut ranger sur un côté (à droite du carré en gras) est

$\frac{n-5}{3}$. Cette rangée est répétée n fois, donc le nombre de bateaux ainsi rangés est

$\frac{n^2-5n}{3}$. Le nombre de bateaux qu'on peut ranger sur la partie en bas du carré en gras

est $\frac{n-5}{3} \times 5 = \frac{5n-25}{3}$

D'où, Le nombre maximal de bateaux est $\frac{n^2-5n}{3} + \frac{5n-25}{3} + 8 = \frac{n^2-1}{3}$.

Par suite $J(3p+2) = \frac{(3p+2)^2-1}{3} = 3p^2 + 4p + 1$.

a. Si $n=3p \Rightarrow J(n) = \frac{n^2}{3} \leq \frac{n^2}{3}$ et c'est vérifié.

Si $n=3p+1$ ou $n=3p+2 \Rightarrow J(n) = \frac{n^2-1}{3}$ qui est bel et bien le plus grand entier inférieur à $\frac{n^2}{3}$.

b. 2 cas :

- $\frac{n^2}{3} = 2020 \Rightarrow n^2 = 6060 \Rightarrow n$ n'est pas entier.
- $\frac{n^2-1}{3} = 2020 \Rightarrow n^2 = 6061 \Rightarrow n$ n'est pas entier.

D'où, il n'y a pas de n tel que $J(n) = 2020$.

Exercice 2 : Ensembles surprenants.

1. a. $A=\{1,2,3,2020\}$, $P(A)=1 \times 2 \times 3 \times 2020=12\,120$, $C(A)=1^2 + 2^2 + 3^2 + 2020^2 = 4\,080\,414$.

Donc, A n'est pas surprenant.

- b. $A=\{6,15,87\}$, $P(A)=6 \times 15 \times 87=7\,830$, $C(A)=6^2 + 15^2 + 87^2 = 7\,830$.

Donc, A est surprenant.

2. a. $x^2 - xP(A) + P(A) - 1 = 0$ admet 2 racines évidentes : 1 et $P(A)-1$.

- b. Si $P(A)-1 \in A \Rightarrow P(A)-1$ est un diviseur de $P(A) \Rightarrow$ il existe un entier $k>1$ tel que

$$P(A)=k[P(A)-1] \Rightarrow P(A)-1=k[P(A)-1]-1 \Rightarrow k[P(A)-1]-[P(A)-1]=1 \Rightarrow [P(A)-1][k-1]=1 \Rightarrow$$

$$[P(A)-1] \text{ est un diviseur de } 1 \Rightarrow P(A)-1 = 1 \Rightarrow P(A)=2 \text{ ce qui est impossible car } P(A) \geq 5.$$

D'où, $P(A)-1 \notin A$.

- c. $A'=A \cup \{P(A)-1\} \Rightarrow P(A')=P(A) \times [P(A)-1] = P^2(A)-P(A)$ et $C(A') = C(A) + [P(A)-1]^2 \Rightarrow$

$$P(A')-C(A')= P^2(A)-P(A)-C(A) - [P(A)-1]^2 = P^2(A)-P(A)-C(A) - P^2(A) + 2P(A) - 1$$

$$= P(A) - C(A) - 1$$

- d. $[P(A') - C(A')] - [P(A) - C(A)] = -1 = \text{constante}$

On reconnaît une suite arithmétique décroissante de raison -1 et de premier terme $P(A)-C(A)$ positif ($P(A)>C(A)$).

Cad, on peut réitérer ce processus plusieurs fois, et à chaque fois $P(A_i)-C(A_i)$ diminue de 1, ce qui veut dire qu'on va arriver à un terme de cette suite qui est nul :

$P(A_k)-C(A_k)=0$ (avec $A \subset A' \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_k$). A_k sera l'ensemble surprenant contenant A .

e.

A	P(A)	C(A)	P(A)-C(A)	P(A)-1
{3,4,9}	108	106	2	107
{3,4,9,107}	11 556	11 555	1	11 555
{3,4,9,107,11555}	133 529 580	133 529 580	0	Processus fini.

D'où, un ensemble surprenant contenant {3,4,9} est {3,4,9,107,11555}.



L'ensemble {1,3,4,9,107} est aussi surprenant.

3. a. Si $P(A)-2 \in A \Rightarrow P(A)-2$ est un diviseur de $P(A) \Rightarrow$ il existe un entier $k > 1$ tel que $P(A) = k[P(A)-2] \Rightarrow P(A)-2 = k[P(A)-2]-2 \Rightarrow k[P(A)-2] - [P(A)-2] = 2 \Rightarrow [P(A)-2][k-1] = 2 \Rightarrow [P(A)-2]$ est un diviseur de 2 $\Rightarrow P(A)-2 = 1$ ou $2 \Rightarrow P(A) = 3$ ou 4 ce qui est impossible car $P(A) \geq 5$.

D'où, $P(A)-2 \notin A$.

- b. Soit $A_1 = A \cup \{P(A)-2\}$

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A)[P(A)-2], C(A_1) = C(A) + [P(A)-2]^2 \Rightarrow P(A_1) - C(A_1) = P^2(A) - 2P(A) - C(A) - [P(A)-2]^2 \\ &= P^2(A) - 2P(A) - C(A) - P^2(A) + 4P(A) - 4 \\ &= 2P(A) - C(A) - 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A_1) - C(A_1) - [P(A) - C(A)] = P(A) - 4 = \text{constante positive car } P(A) \geq 5.$$

On reconnaît une suite arithmétique croissante de raison $P(A)-4$ et de premier terme $P(A)-C(A)$ négatif ($P(A) < C(A)$).

Cad, on peut réitérer ce processus plusieurs fois, et à chaque fois $P(A_i) - C(A_i)$ augmente de $P(A)-4$, ce qui veut dire qu'on va arriver à un terme de cette suite qui est positif. On peut alors continuer comme dans le processus de la question 2d: $P(A_k) - C(A_k) = 0$ (avec $A \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_k$). A_k sera l'ensemble surprenant contenant A .

4. 2 cas:

- Si $P(A) \geq 5$, on a déjà démontré qu'on peut toujours trouver un ensemble surprenant contenant A .
- Si $1 \leq P(A) \leq 5$, on crée l'ensemble $A' = A \cup \{5\}$ et l'on obtient que $P(A') \geq 5$. On continue alors comme dans la question 2d

D'où, on peut toujours trouver un ensemble surprenant.

- 5.

A	P(A)	C(A)	P(A)-C(A)	P(A)-1	P(A)-2
{1,2,5}	10	30	-20 < 0		8
{1,2,5,8}	80	94	-14 < 0		78
{1,2,5,8,78}	6 240	6 178	62 > 0	6 239	

$P(A) - C(A) = 62$, donc il reste 62 étapes pour arriver à 0 (car chaque fois ça diminue de 1).

D'où, l'ensemble surprenant contenant {1,2,5} comporte $62+5=67$ éléments.

Exercice 3 : Mathématiques et cryptographie, une longue histoire !

1. Clé 3 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

OLYMPIADES = ROBPSLDGHV

2. Clé 9:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I

JWWNN MNB VJCQNVJCRZDNB = ANNEE DES MATHEMATIQUES

3. Eper Xyvmrk = Alan Turing $\Rightarrow$ Clé = 4.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D

- qmppi riyj girx hsydi = mille neuf cent douze
- Tcxleksvi ri ey wmbmiqi wmigpi ezerx Niwyw Glvmwx
= Pythagore né au sixième siècle avant Jesus Christ

4. Clé (22,4):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour B : $22 \times 1 + 4 = 26$, $26 \equiv 0 [26]$, alors B est codé A.

5. Pour D : $22 \times 3 + 4 = 70$, $70 \equiv 18 [26]$, alors D est codé S.

Pour Q : $22 \times 16 + 4 = 356$, $356 \equiv 18 [26]$, alors Q est codé S.

Le défaut de cette clé est qu'elle code 2 lettres différentes par une même lettre.

6. a.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$m = ax + b$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229
Rang y	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8	17	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21
En crypté	E	N	W	F	O	X	G	P	Y	H	Q	Z	I	R	A	J	S	B	K	T	C	L	U	D	M	V

b. Oui.

7. Ez-Qpeuebyviy ro or kojt wort scetbo lyrgtk

= Al-Khawarizmi né en sept cent quatre vingts

8. $y \equiv 9x + 4 [26] \Rightarrow y - 4 \equiv 9x [26] \Rightarrow 3y - 12 \equiv 27x [26]$

or $-12 \equiv 14 [26]$ et $27 \equiv 1 [26] \Rightarrow 3y + 14 \equiv x [26]$

Soit pour déchiffrer un code on utilise : $y \equiv 3x + 14 [26]$.

Par exemple pour déchiffrer Q : $x = 16$, $3 \times 16 + 14 = 62$, $62 \equiv 10 [26] \Rightarrow$ Q se déchiffre par K.

Algorithme de décodage :

```

1 x=0
2 while x<26:
3     m=3*x+14
4     y=m%26
5     print(x,y)
6     x=x+1

```

9. Le principal défaut des 2 systèmes de codage vus précédemment c'est qu'ils codent une lettre toujours par une même autre lettre, ce qui permet de casser facilement la clé du codage.
10. Pour coder par exemple avec la clé 21 on décale à droite de 21, donc pour décoder avec la même clé on décale à gauche de 21:

Codée par	H	Q	R	P	R	G	Z	R	L	K	K	R	G	Z	Z	R	B	B	Z	V	B	M	J
Clé	V	I	G	E	N	E	R	E	V	I	G	E	N	E	R	E	V	I	G	E	N	E	R
se décale de	-21	-8	-6	-4	-13	-4	-17	-4	-21	-8	-6	-4	-13	-4	-17	-4	-21	-8	-6	-4	-13	-4	-17
Décodée par	M	I	L	L	E	C	I	N	Q	C	E	N	T	V	I	N	G	T	T	R	O	I	S

Donc le décodage est : mille cinq cent vingt trois

