

Proposition de corrigé des Olympiades académiques de mathématiques 2021 Créteil

EXERCICES ACADEMIQUES

Exercice 1 : l'escargot quadrille...

I. Exploration du quadrillage.

1) $D(6;3)=45$. (fig.1)

2) $D(13;15)=242$. (fig.2)

Figure 1.

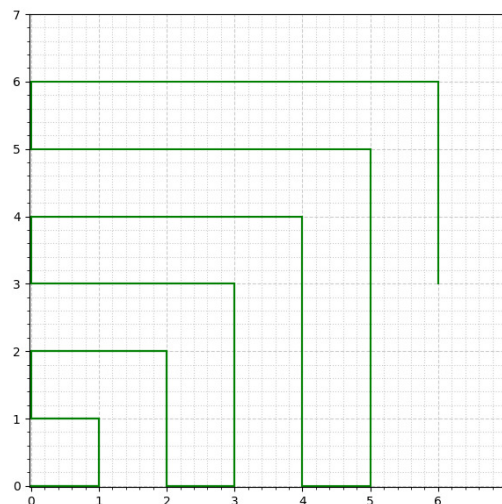
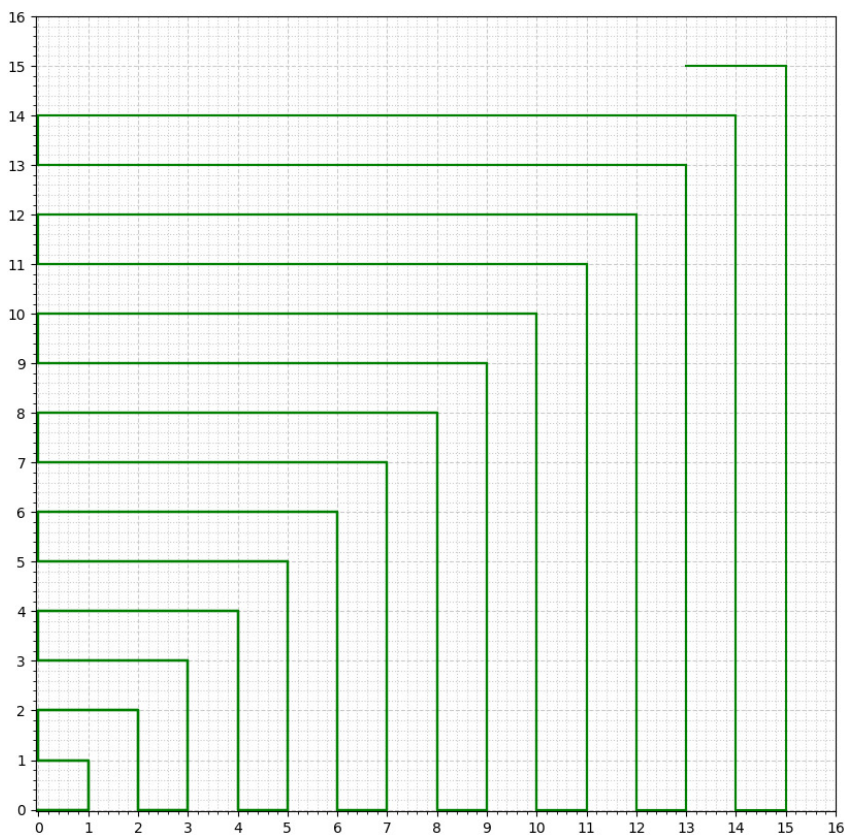


Figure 2.



- 3) a) $D(7;1)=50$. (fig.3)
 b) $D(0;10)=100$. (fig.4)

Figure 3.

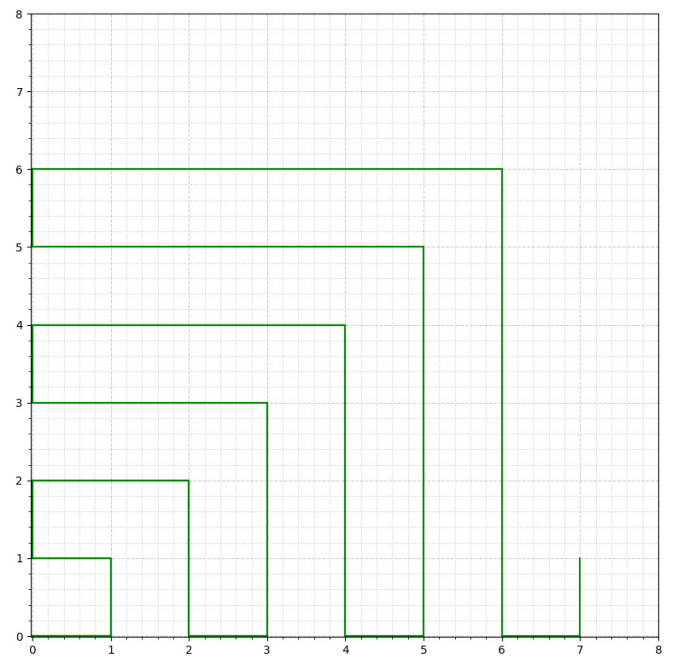
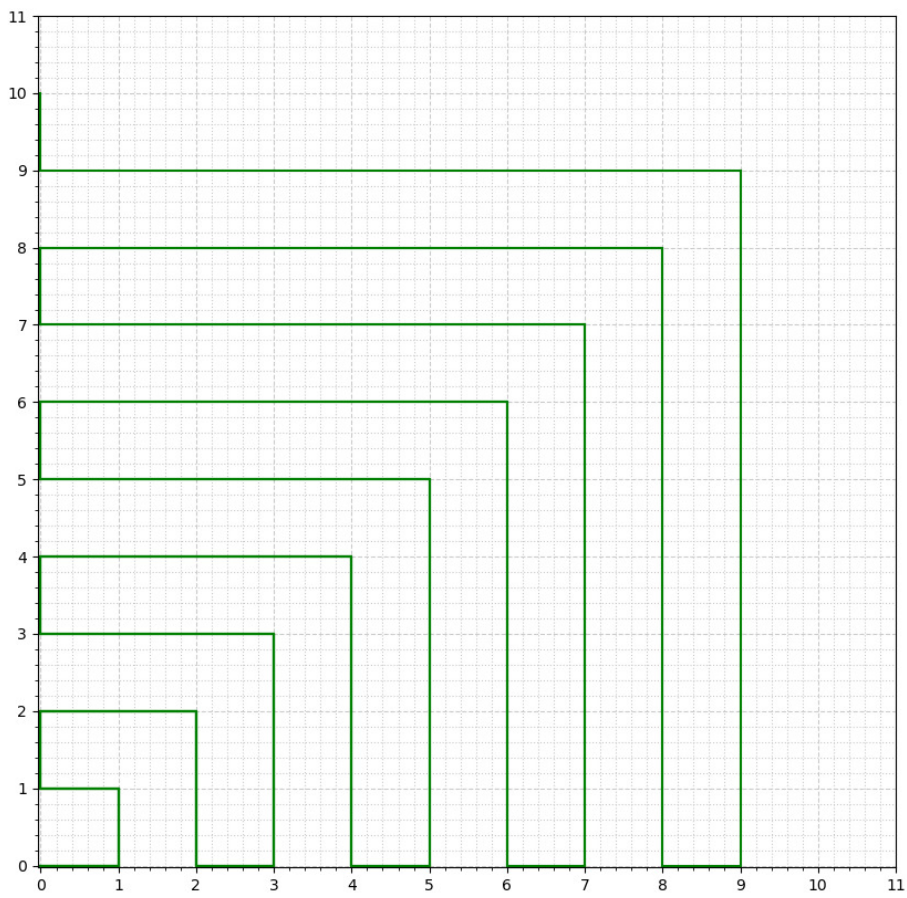


Figure 4.



II. Quelques propriétés de la distance parcourue.

1) a) $D(0;2)=4$, $D(0;4)=16$, $D(0;6)=36$. Conjecture: $D(0;2p)=4p^2$.

b) Les points $(0;2p)$ et $(2p;0)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Ils sont séparés par $2p \times 2 = 4p$ unités.

Or, $(2p;0)$ et $(2p+1;0)$ sont séparés par 1 unité, par suite, $(0;2p)$ et $(2p+1;0)$ sont séparés par $4p+1$ unités.

D'où, $D(2p+1,0)=D(0;2p)+4p+1=4p^2+4p+1=(2p+1)^2$.

En plus, $D(0;2p+2)=(2p+2)^2$.

2) Le carré parfait directement inférieur à 2021 est $44^2=1936$, cad $D(0;44)=1936$.

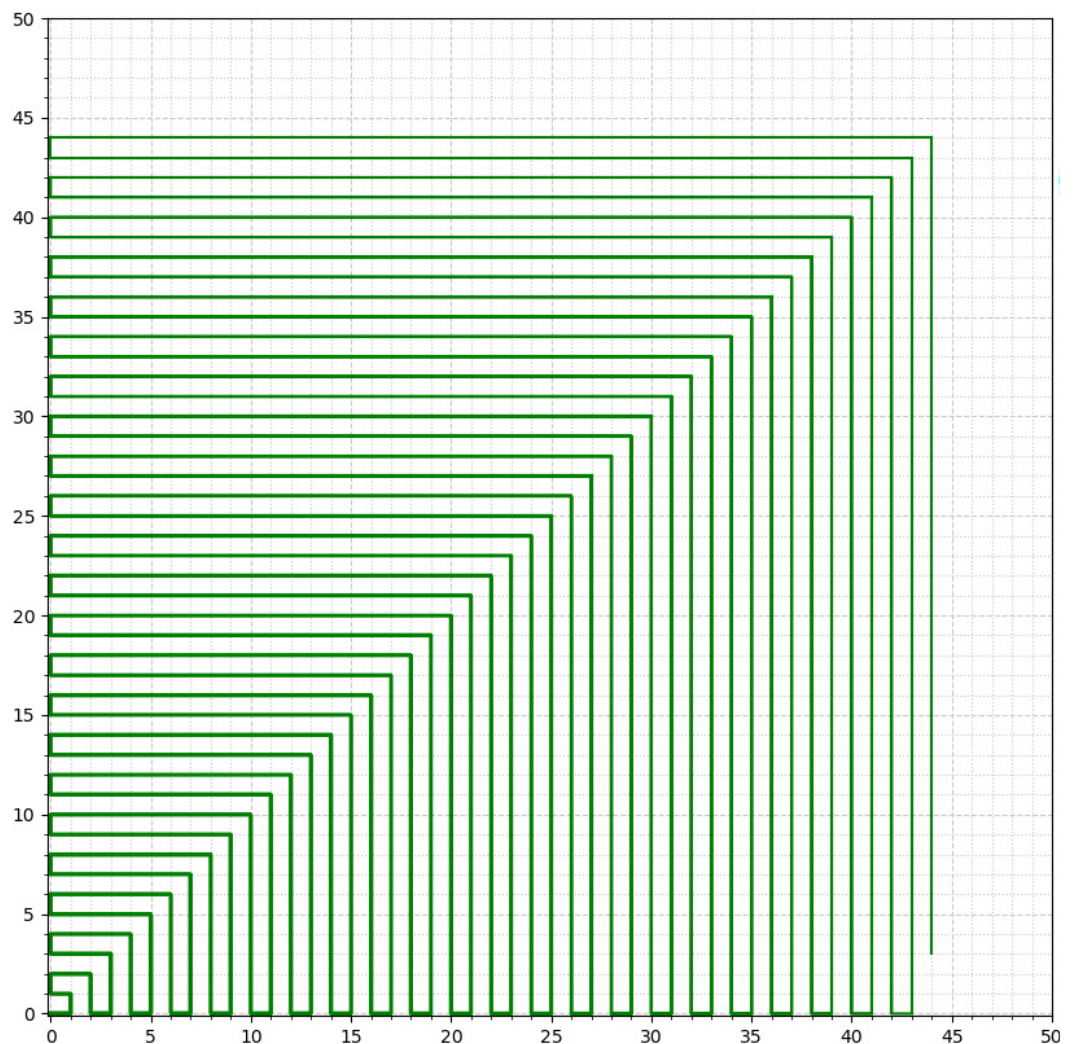
Or, $(44;0)$ et $(0;44)$ sont séparés de $2 \times 44 = 88$ unités $\Rightarrow D(44;0)=1936+88=2024$.

Alors il faut raccourcir le trajet de 3 unités, d'où, $D(44;3)=2024-3=2021$.

Conclusion: lorsque l'escargot aura parcouru 2021 unités, ses coordonnées seront $(44;3)$

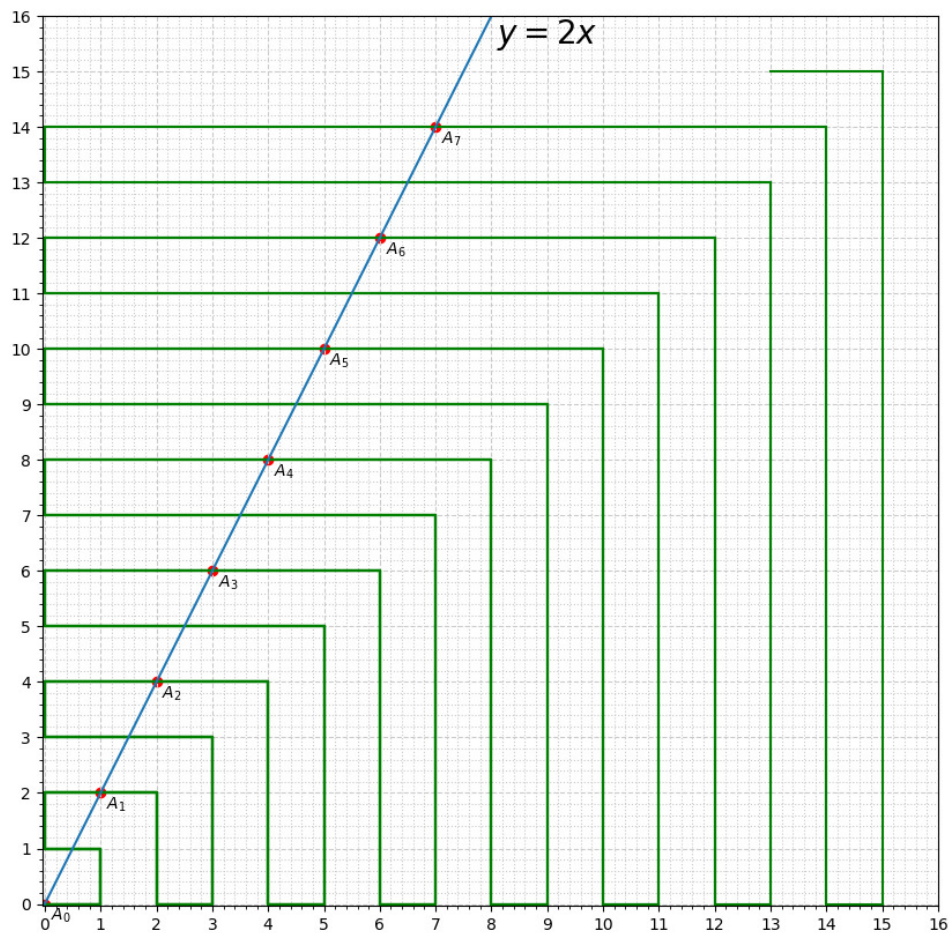
(fig.5).

Figure 5.



III. Points sur une droite.

Figure 6.



1) $s_1 - s_0 = 13 - 5 = 8$, $s_2 - s_1 = 21 - 13 = 8$, il semble que $s_{n+1} - s_n = 8$.

2) $A_n(n; 2n)$ est loin du point $A'(0; 2n)$ de n unités.

Alors, A_n correspond à $D(n, 2n) = D(0, 2n) + n = 4n^2 + n$.

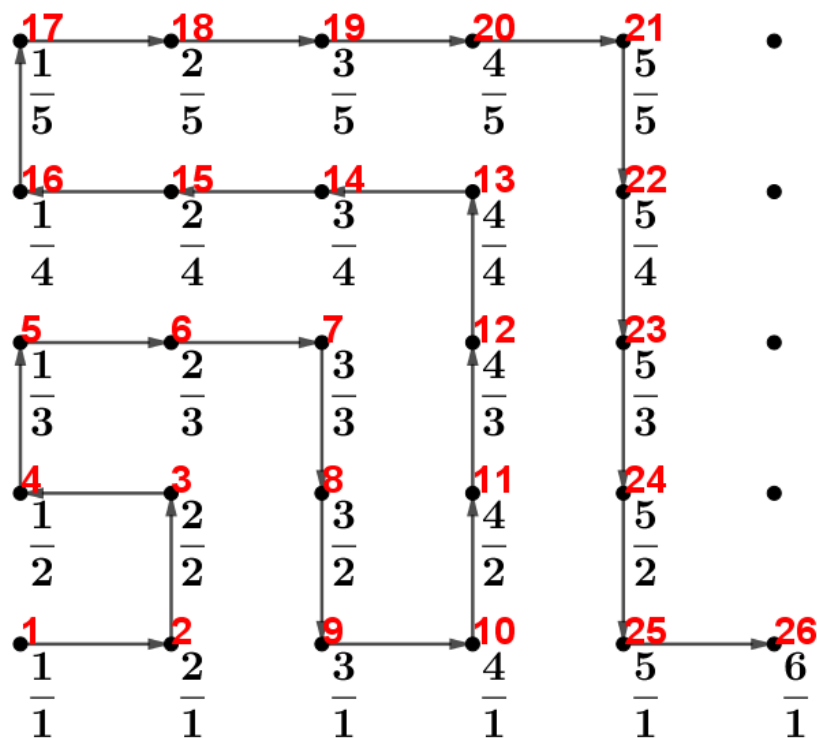
De même, A_{n+1} correspond à $D(n+1, 2n+2) = D(0, 2n+2) + n+1 = 4n^2 + 9n + 5$.

Et, A_{n+2} correspond à $D(n+2, 2n+4) = D(0, 2n+4) + n+2 = 4n^2 + 17n + 18$.

Donc, $s_n = 4n^2 + 9n + 5 - 4n^2 - n = 8n + 5$ et $s_{n+1} = 4n^2 + 17n + 18 - 4n^2 - 9n - 5 = 8n + 13$.

Ce qui entraîne: $s_{n+1} - s_n = 8n + 13 - 8n - 5 = 8$.

IV. Oh ! Des fractions...



On peut établir une bijection entre $\mathbb{N}$ (en rouge) et $\mathbb{Q}$ (en noir) en suivant le modèle ci-dessus (chaque rationnel est repéré par son dénominateur qui représente le numéro de la ligne et par son numérateur qui représente le numéro de la colonne) – à zéro on peut attribuer l'entier 0.

Exercice 2 : Les jeux de Nim.

I. Avec des cailloux, le dernier perd...

- 1) a) Si $r=1$, elle sera perdante.
- b) Si $r=2$, pour gagner, elle doit tirer un seul caillou.
Si $r=3$, pour gagner, elle doit tirer 2 cailloux.
Si $r=4$, pour gagner, elle doit tirer 3 cailloux.

c)

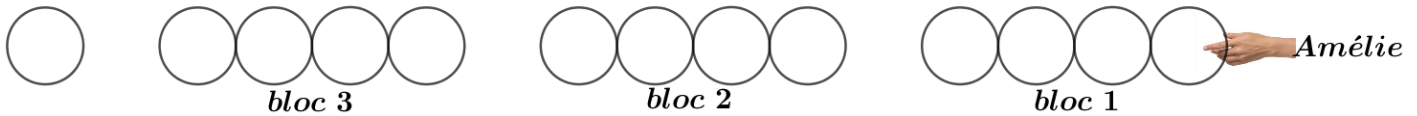


Si Amélie tire un caillou, Balthazar tirera 3 cailloux, et Amélie sera perdante.
Si Amélie tire 2 cailloux, Balthazar tirera 2 cailloux, et Amélie sera perdante.
Si Amélie tire 3 cailloux, Balthazar tirera 1 caillou, et Amélie sera perdante.
Donc s'il reste 5 cailloux, Amélie sera toujours perdante en supposant que Balthazar adopte la meilleure stratégie.

2) a) Les nombres perdants sont les nombres congrus à 1 modulo 4 : 1, 5, 9, 13 et 17.

Explication :

Cas de 13 cailloux.



Balthazar peut toujours gagner s'il oblige Amélie à jouer la première devant le bloc 3 (comme c'est expliqué dans 1c). Ainsi quoiqu'elle tire du bloc 1, Balthazar doit tirer le(s) caillou(x) restant(s) de ce bloc. De même pour les blocs 2 et 3, ainsi Amélie se trouve devant le dernier caillou et sera perdante.

b) Amélie, qui commence la partie, est sûre de gagner si elle suit la stratégie suivante :

Cas de 20 cailloux.



Elle commence à tirer 3 cailloux, puis elle tire le restant de chaque bloc après le tirage de Balthazar. Ainsi elle l'oblige à se trouver devant le bloc 4 pour garantir son gain au jeu.

3) Voici le nombre perdant de base :



Cad, si Balthazar tire de ce bloc n cailloux ($1 \leq n \leq 5$), pour gagner, Amélie doit tirer $6-n$ pour garantir que balthazar se trouve devant le tout dernier caillou.

Alors, le nombre total N de cailloux doit être congru à 1 modulo 6. Autrement dit, $N-1$ doit être multiple de 6. Sachant que $20 \leq N \leq 40$, donc :

N-1	24	30	36
N	25	31	37

Pour gagner le jeu, sachant que Balthazar commence le jeu, Amélie doit choisir $N=25, 31$ ou 37 .



Si Amélie doit commencer la partie, dans ce cas elle a intérêt à choisir parmi les nombres ci-dessous en suivant la stratégie appropriée :

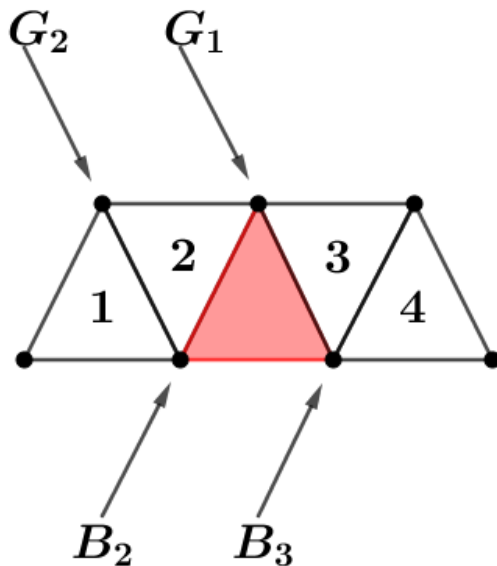
- Si $N=26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35$ ou 36 , alors Amélie doit commencer le jeu en tirant au début 1, 2, 3, 4 ou 5 cailloux respectivement
- Si $N=38, 39$ ou 40 , alors Amélie doit commencer le jeu en tirant au début 1, 2 ou 3 cailloux respectivement.

4) Les nombres perdants sont les nombres inférieurs à n et congrus à 1 modulo $p+1$.

5)

```
1 def nim_20_3():
2     nombre=20
3     ordi=3
4     nombre=nombre-ordi
5     print("L'ordinateur prend ",ordi," cailloux et il reste ",nombre," cailloux.")
6     if nombre<=0:
7         res="Gagné"
8     else:
9         while nombre>0:
10            cailloux=int(input("Choisissez un nombre de cailloux entre 1 et 3: "))
11            nombre=nombre-cailloux
12            print("Il reste ",nombre," cailloux.")
13            if nombre<=0:
14                res="Perdu"
15            else:
16                ordi=4-cailloux
17                nombre=nombre-ordi
18                print("L'ordinateur prend ",ordi," cailloux et il reste ",nombre," cailloux.")
19                if nombre<=0:
20                    res="Gagné"
21            return res
```

II. Avec des triangles, le dernier gagne...



Si Balthazar coupe 1 suivant G_2 , alors Amélie coupe 3 et 4 suivant $G_1 \Rightarrow$ Balthazar coupe 2 suivant B_2 et C'est Amélie qui gagne.

Si Balthazar coupe 1 et 2 suivant B_2 , alors Amélie coupe 4 suivant $B_3 \Rightarrow$ Balthazar coupe 3 suivant G_1 et C'est Amélie qui gagne.

D'où, si Amélie adopte la meilleure stratégie, Balthazar ne peut jamais gagner.