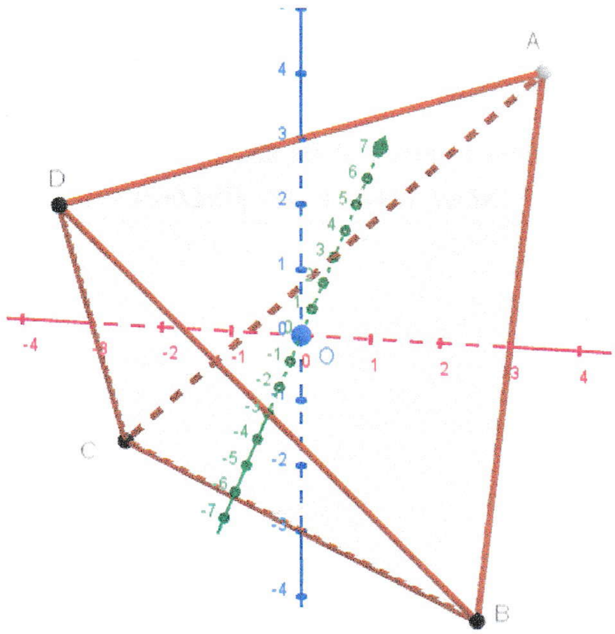
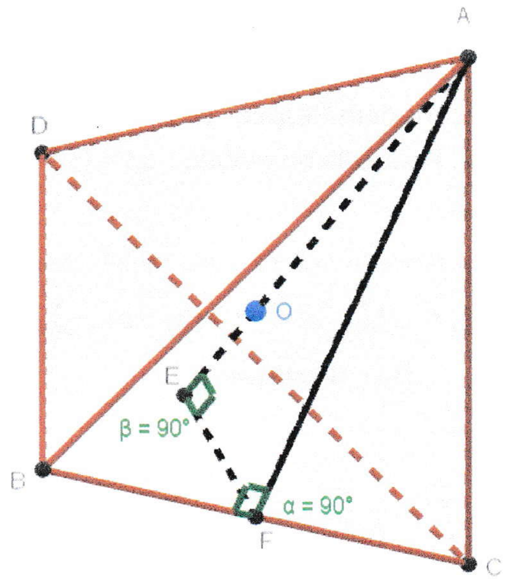
Je vais développer ici 2 thèmes autour du tétraèdre : d'abord une équation cartésienne implicite du volume tétraèdre régulier plein; puis une équation cartésienne implicite du tétraèdre régulier en tant que surface.

Dans un autre document, plus tard, des extensions à d'autres polyèdres, par manipulations sur le tétraèdre ...

Pour des raisons calculatoires, il est judicieux de choisir un 1^{er} sommet A(a,a,a), puis les 3 autres B(a,-a-a), C(-a,-a,-a) et D(-a-a,a), respectivement symétriques de A par rapport aux 3 axes du repère, (x'x), (y'y) et (z'z). Ici a = 3.

On peut vérifier que les 4 faces sont équilatérales de côtés $2a\sqrt{2}$. On peut remarquer que le tétraèdre est obtenu par troncature maximale d'un cube par des plans passant par 3 sommets, et dont A, B, C et D sont des sommets opposés diagonalement sur les 6 faces ... d'où la mesure des côtés, diagonales de faces du cube de sommets (±a,±a,±a). Voir Mathcurve !





Ainsi l'arête du tétraèdre mesure $2a\sqrt{2}$, et les équations des 4 plans des 4 faces sont :

(ABC) : x+y-z=a ; (ABD) : x-y+z=a ; (ACD) : x-y-z=-a ; (BCD) : x+y+z=-a.

Si l'on trace la hauteur issue de A, son pied est le point E(-a/3,-a/3,-a/3), centre de BCD. Traçons également la hauteur AF de la face ABC, F(0,0,-a) est le milieu de l'arête [BC]. E est alors au tiers de [DF] à partir de F ...

On peut calculer AF = $2a\sqrt{2}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ =. Et sachant que EF = 1/3 AF = $a\sqrt{6}/3$, et que $AE^2 = AF^2 - EF^2$, on obtient

AE = $\sqrt{(a\sqrt{6})^2 - (a\sqrt{6}/3)^2)}$ = ... = $4a\sqrt{3}/3$. D'où ... OE = AE / 4 = $a\sqrt{3}/3$.

A) Le tétraèdre plein :

O étant à égale distance des 4 faces, on peut alors constater que « la somme des 4 distances du point O aux 4 faces est égale à la hauteur du tétraèdre ».

On peut démontrer le théorème suivant :

Soit un tétraèdre régulier de l'espace 3D, un point M est intérieur au tétraèdre (ou dessus) si, et seulement si, la somme des 4 distances du point M aux 4 plans des faces du tétraèdre, est égale à la hauteur du tétraèdre ».

Il suffit d'utiliser la « formule des volumes » ...

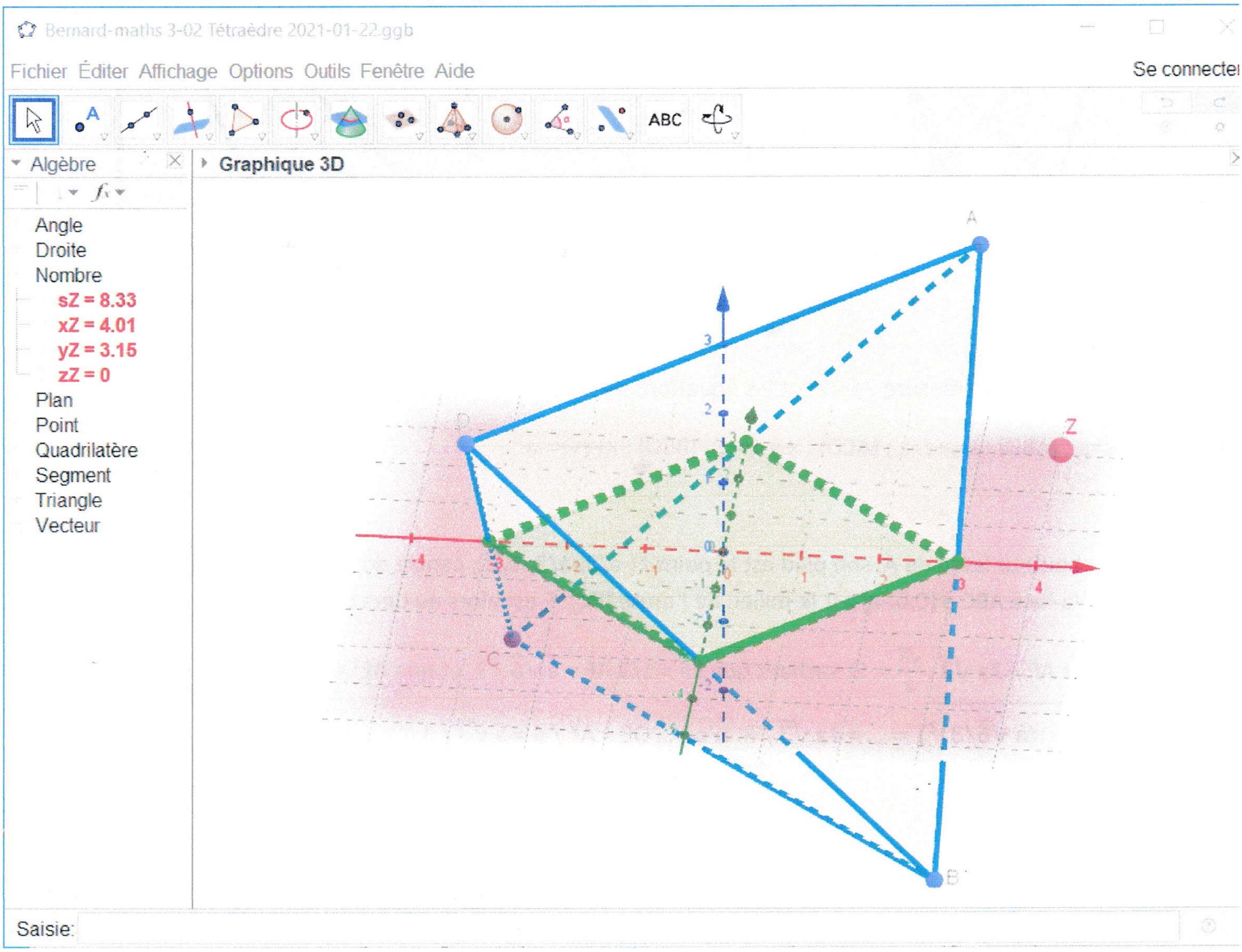
Ecrivons l'équation correspondante pour ABCD : $|x+y-z-a|/\sqrt{3}+|x-y+z-a|/\sqrt{3}+|x-y-z+a|/\sqrt{3}+|x+y+z+a|/\sqrt{3} = 4a\sqrt{3}/3$.

Soit aussi : $|x+y-z-a| + |x-y+z-a| + |x-y-z+a| + |x+y+z+a| - 4a = 0$.

Donc, ceci une équation du tétraèdre plein.

Matérialisons ce phénomène ! Charger en suivant le lien : https://www.cjoint.com/c/KAzthl1I7nV

D'abord plaçons dans l'espace un point Z(xZ,yZ,zZ), et réglons sa couleur à verte si il est dans le tétraèdre, et à rouge à l'extérieur. Pour cela on calcule : $sZ = |xZ+yZ-zZ-a| + |xZ-yZ+zZ-a| + |xZ-yZ-zZ+a| + |xZ+yZ+zZ+a| - 4a$.



Voici la fenêtre du logiciel, à gauche, on peut voir le nombre sZ, et les coordonnées de Z, en rouge.

Ce calcul utilise l'équation, avec les coordonnées de Z, donc si Z vérifie cette équation, c'est qu'il est à l'intérieur du tétraèdre, et vert, sinon il est dehors, et rouge !

Soit donc si sZ = 0, c'est que M est dans (ou sur) le tétraèdre, et si sZ > 0, il est dehors ...

Pour cela, traçons un plan d'équation z = zZ et cherchons son intersection avec les faces du tétraèdre. Etant donné que les arêtes du tétraèdre sont 2 à 2 parallèles aux plans du repère, on obtient un rectangle si –a < zZ < a.

Si zZ = a, on a l'arête supérieure [AD], et pour zZ = -a, l'arête [BC].

Le plan z = zZ est en rouge, le rectangle d'intersection est en vert. Il reste à déplacer le point Z, en cliquant dessus, GeoGebra indique soit une double flèche verticale pour déplacer Z en haut ou en bas, soit une quadruple flèche horizontale pour déplacer Z parallèlement au plan grillagé (xOy). Cliquer encore pour changer de flèche !

Verticalement, le plan rouge et le rectangle vert suivent Z « en hauteur » selon (z'z), et la forme du rectangle change, et si Z est trop haut ou bas, il disparaît.

Horizontalement, le rectangle et le plan sont stables, et Z peut se déplacer parallèlement au plan grillagé (xOy).

Au début, à l'extérieur, Z est rouge. En le déplaçant, dès qu'il entre dans le rectangle vert, il passe au vert.

On peut ainsi contrôler que l'équation du tétraèdre plein est bien vérifiée !

B) Passons maintenant à une équation (de la surface) du tétraèdre !

On peut considérer le tétraèdre comme une pyramide régulière de base équilatérale, de 4 façons différentes.

Chaque façon donnera une équation de la face/base considérée. Récrivons les 4 équations des faces :

(ABC) : x+y-z-a=0 ; (ABD) : x-y+z-a=0 ; (ACD) : x-y-z+a=0 ; (BCD) : x+y+z+a=0.

Alors pour BCD nous aurons : $|x+y-z-a|+|x-y+z-a|+|x-y-z+a| = c^{te}$ = valeur en B(a,-a,-a) par ex = ... = 4a.

Puis pour ABC : $|x-y+z-a|+|x-y-z+a|+|x+y+z+a| = 4a$. Pour ABD : $|x+y-z-a|+|x-y-z+a|+|x+y+z+a| = 4a$.

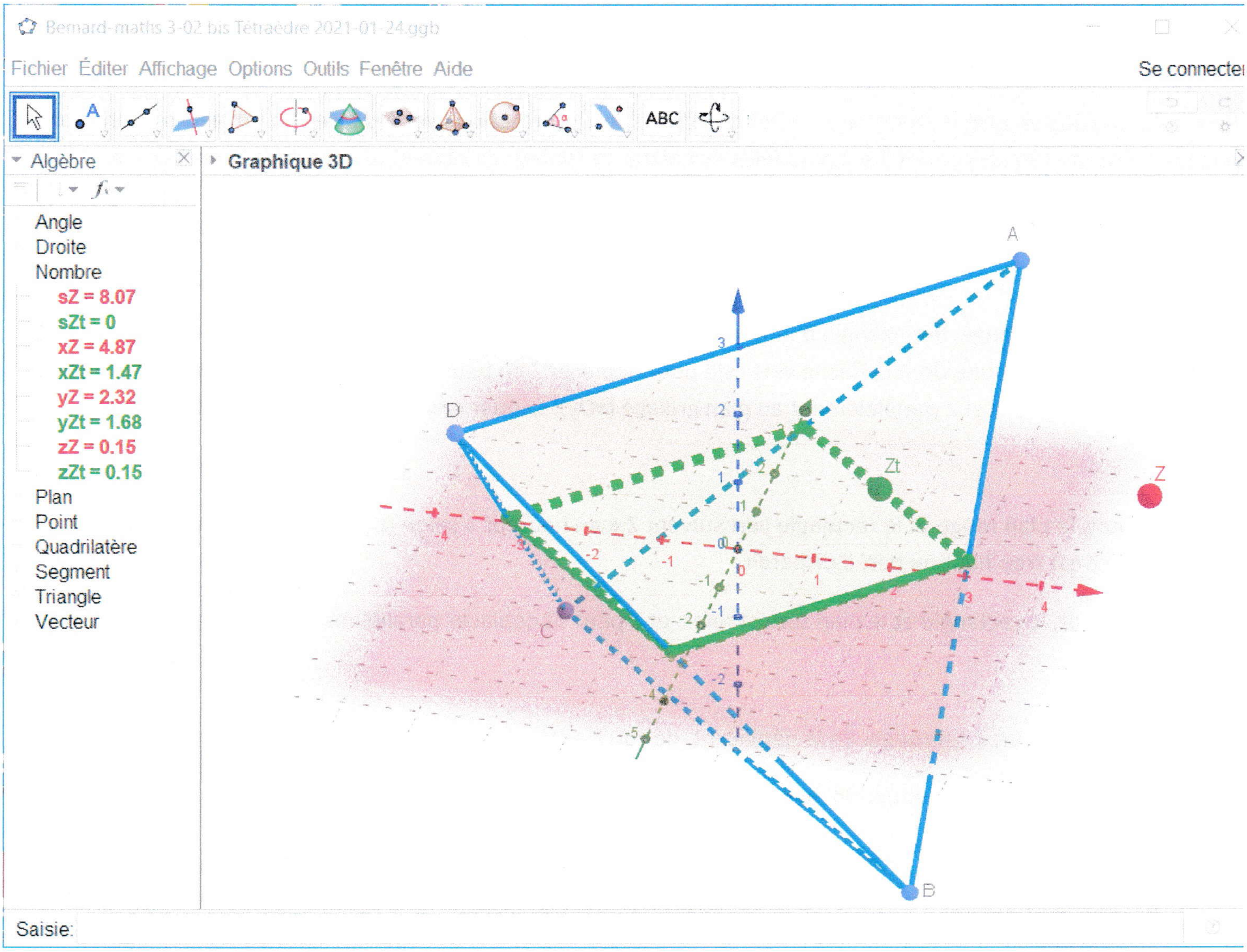
Et pour ACD : $|x+y-z-a|+|x-y+z-a|+|x+y+z+a| = 4a$.

Et pour les 4 faces, on a une équation produit nul :

$$\Big|\,|x+y-z-a|+|x-y+z-a|+|x-y-z+a|-4a\,\Big| * \Big|\,|x-y+z-a|+|x-y-z+a|+|x+y+z+a|\ -4a\,\Big| *$$

$$\Big|\,|x+y-z-a|+|x-y-z+a|+|x+y+z+a|\ -4a\,\Big| * \Big|\,|x+y-z-a|+|x-y+z-a|+|x+y+z+a|\ -4a\,\Big| = 0.$$

Matérialisons ce phénomène ! Charger en suivant le lien : https://www.cjoint.com/c/KAztisnGWHV



On voit qu'il y a un nouveau point Zt, en vert sur le rectangle vert précédent. Ce point Zt peut se déplacer SUR le rectangle vert. Pour déplacer le rectangle vert, comme avant, on déplace le point rouge Z !

Ainsi on peut déplacer Zt en tout point de la surface du tétraèdre … sauf sur les 2 arêtes [AD] et [BC], où le rectangle dégénère en segment (petit problème technique). A gauche, on voit les coordonnées en rouge de Z et en vert de Zt.

On a aussi créé le nombre sZt, qui est défini en écrivant l'équation du tétraèdre, avec les coordonnées de Zt, et qui donc doit valoir 0 ! En déplaçant Zt, vous le constaterez ! Voici d'ailleurs sZt :

sZt = (abs(xZt - yZt + zZt - a) + abs(xZt - yZt - zZt + a) + abs(xZt + yZt + zZt + a) - 4a) * (abs(xZt + yZt - zZt - a) + abs(xZt - yZt - zZt + a) + abs(xZt + yZt + zZt + a) - 4a) * (abs(xZt + yZt - zZt - a) + abs(xZt - yZt + zZt - a) + abs(xZt + yZt + zZt + a) - 4a) * (abs(xZt + yZt - zZt - a) + abs(xZt - yZt + zZt - a) + abs(xZt - yZt - zZt + a) - 4a).

Avec x = xZt, y = yZt et z = zZt, dans l'équation page d'avant !

Voilà terminée cette présentation sur le tétraèdre, il reste à exploiter ces formules, dans une autre présentation !

Références :

1) L'excellent site : « https ://mathcurve.com »

2) Le doc GeoGebra du tétraèdre plein :

https://www.cjoint.com/c/KAzthl1I7nV

3) Le doc GeoGebra du tétraèdre n surfce :

https://www.cjoint.com/c/KAztisnGWHV

4) Vos commentaires sur : www.bibmath.net !