Je suis actuellement en discussion sur le site de Bibmath, pour échanger des idées sur différentes approches pour trouver des équations de polygones et de polyèdres, et éventuellement d'autres formes.

Etant parti du cube, et en pensant à ses formes dérivées, sur le site de Mathcurve, j'ai rencontré pour le cuboctaèdre une curiosité : son équation ! Effectivement, une équation « simple » pour 6 carrés ET 8 triangles équilatéraux, c'est beau !

Alors, pourquoi ne pas utiliser des techniques que j'ai mises au point, pour la retrouver ?

La technique que je vais employer résulte de deux « trouvailles », sur les polygones réguliers convexes, et sur les pyramides régulières, à bases polygonales régulières convexes. Soit :

1) Pour un polygone convexe régulier à n côtés, M est un point intérieur au polygone (ou sur) si, et seulement si, la somme des n distances du point M aux n côtés, est égale à n fois l'apothème du polygone.

2) Pour une pyramide régulière, de base un polygone régulier convexe à n côtés, M est un point intérieur au polygone de base (ou sur) si, et seulement si, la somme des n distances du point M aux n côtés de la pyramide, est égale à n fois l'apothème du polygone, multiplié par hauteur de la pyramide, et divisé par apothème de la pyramide.

La formule 1) est facile à utiliser dans un des trois plans du repère, mais devient « pénible », en utilisant les produits vectoriels pour calculer les distances …

L a formule 2) est plus simple, car on n'utilise que des équations de plans (en 3D), et on travaille au premier degré en x, y et z ; plus des valeurs absolues !

Passons au cuboctaèdre ! Avec la méthode 2).

Soit un cube de demi côté b, et de sommets A(b,b,b), B(-b,b,b), C(-b,-b,b) et D(b,-b,b) en face supérieure, puis E(b,b,-b), F(-b,b,-b), G(-b,-b,-b) et H(b,-b,-b) en face inférieure.

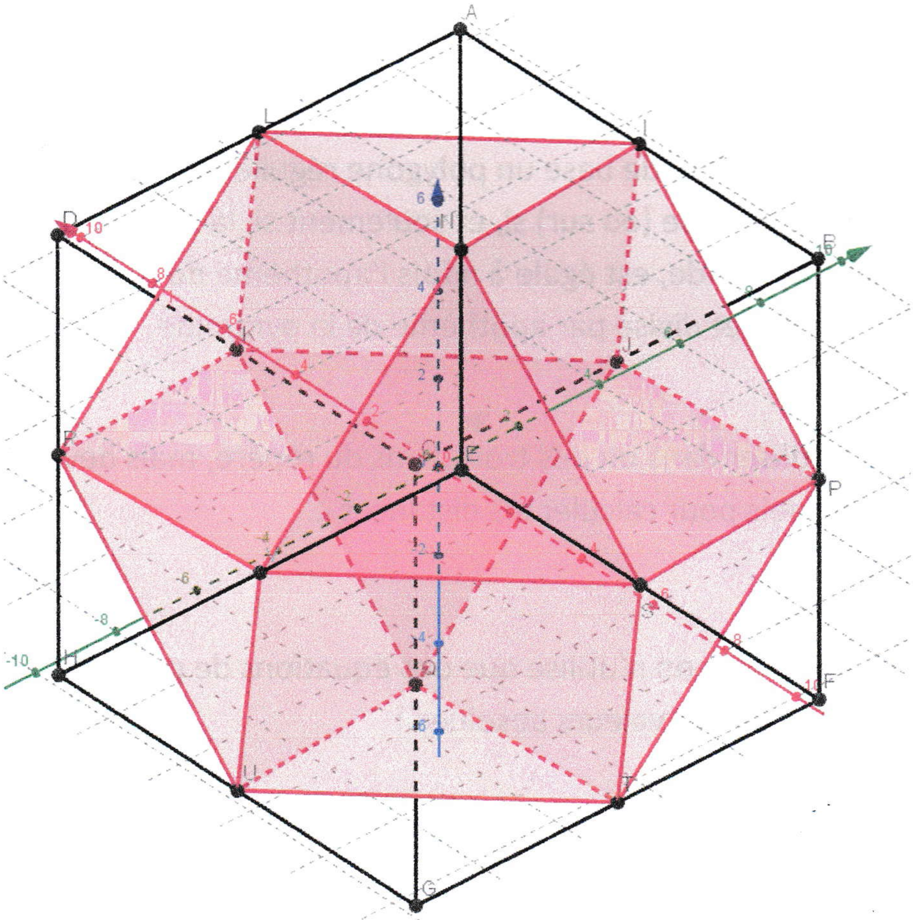
Puis I(0,b,b), J(-b,0,b), K(0,-b,b) et L(b,0,b) les milieux de [AB], [BC], [CD] et [DA] en face supérieure. Puis N(b,b,0), P(-b,b,0), Q(-b,-b,0) t R(b,-b,0) les milieux des « verticaux » [AE], [BF], [CG] et [DH].

Enfin S(0,b,-b), T(-b,0,-b), U(0,-b,-b) et V(b,0,-b) les milieux de [EF], [FG], [GH] et [HE] en face basse.

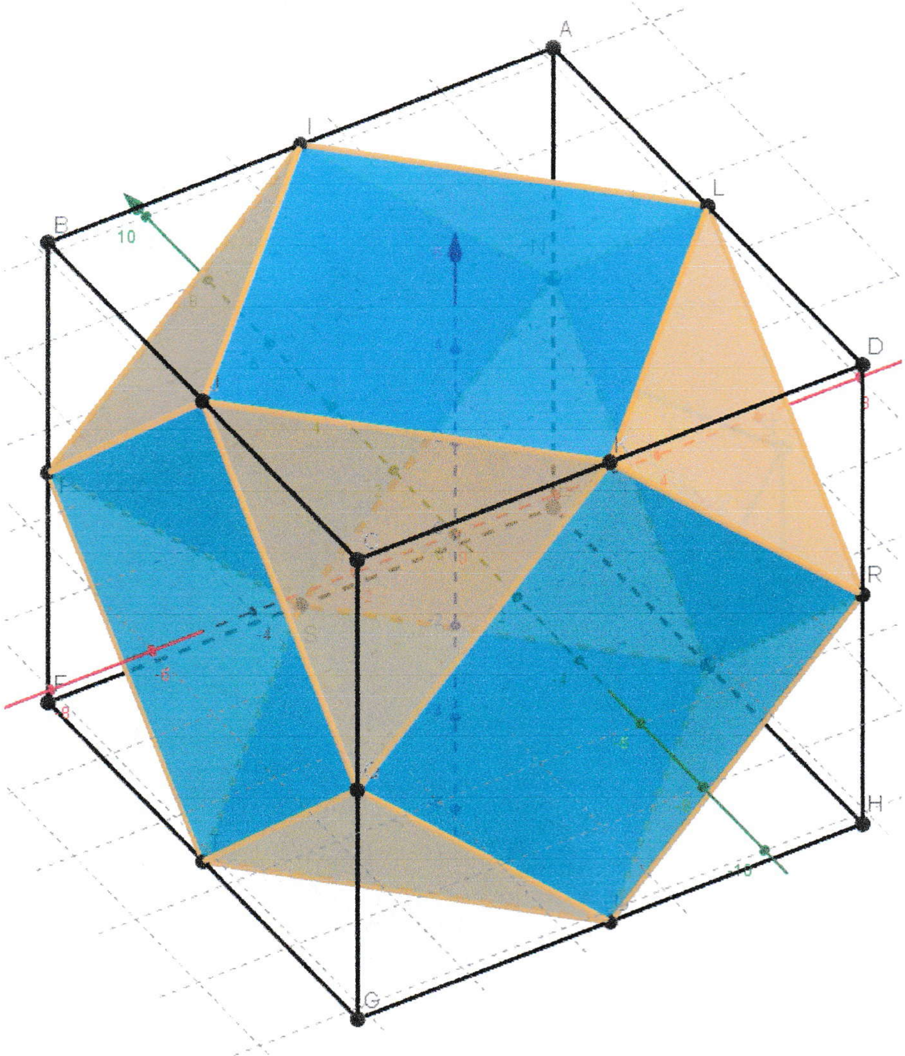
Alors on peut tracer 4 plans coupant le cube en passant par 6 milieux d'arêtes, en formant des hexagones réguliers plans, à savoir : (P1) IJQUVN, (P2) JKRVSP, (P3) KLNSTQ, et (P4) LIPTUR.

Ces 4 plans déterminent 6 carrés sur les 6 faces du cube, à savoir IJKL, INSP, JPTQ, KQUR, et STUV.

Ainsi que 8 triangles équilatéraux IPJ, JQK, KRL, et LNI en haut, et STP, TUQ, UVR et VSN en bas.



Si on trace les 6 carrés et les 8 triangles, on reconnaît un cuboctaèdre !



L'origine O du repère est le centre de symétrie du cuboctaèdre, qui a par ailleurs des plans et des axes de symétrie … Ce qui va nous intéresser ici, ce sont les 4 plans « hexagonaux », qui passent par les 4 côtés de chaque carré !

De même, 3 de ces 4 plans passent par les 3 côtés des triangles, en particulier, pour chaque groupe de 3 des 4 plans, ils passent par les 3 côtés de 2 triangles symétriques par rapport au point O !

Nous y reviendrons …

Il est assez facile de montrer que les équations des 4 plans sont :

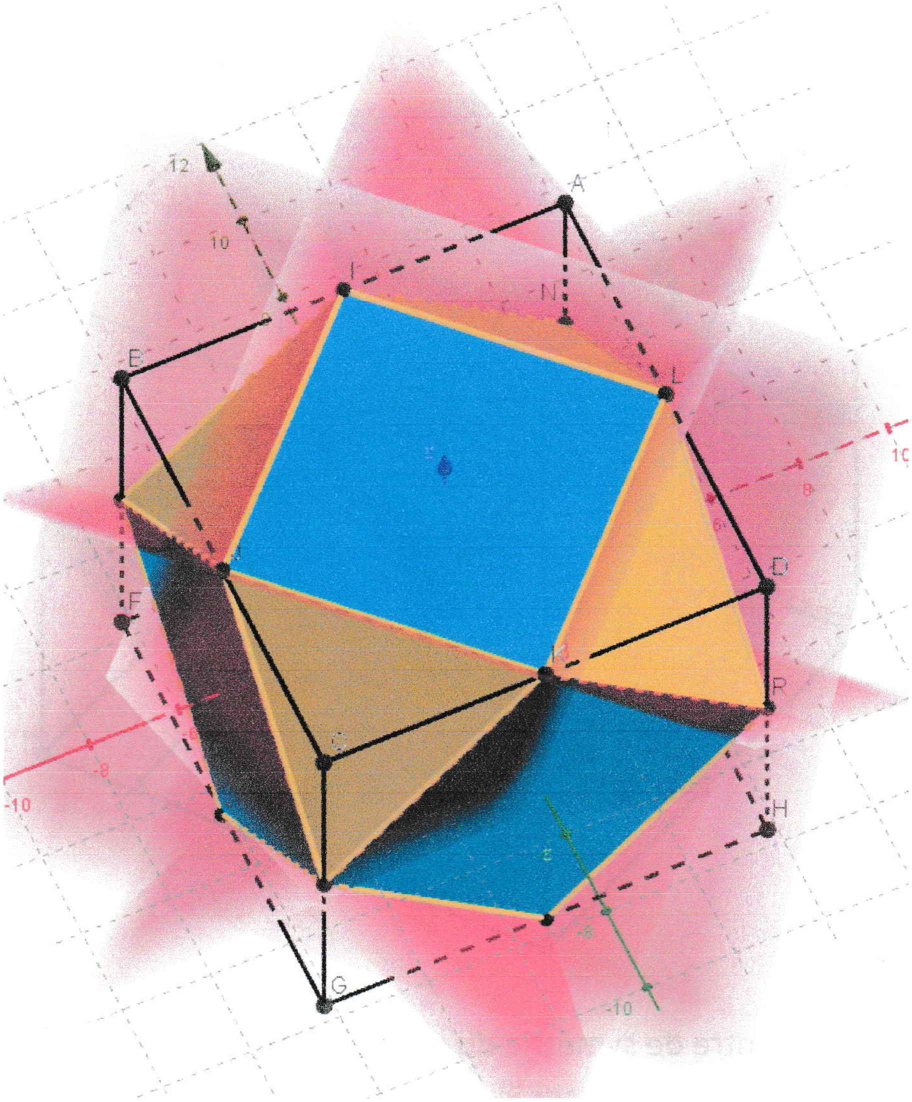
(P1) : $x - y + z = 0$; (P2) : $x + y + z = 0$; (P3) : $x - y - z = 0$; (P4) : $x + y - z = 0$. Aux signes près …

Comme une propriété d'une pyramide est que tout point de la base carrée a une somme des 4 distances aux 4 côtés qui est constante, on en déduit que :

$|x - y + z|/\sqrt{3} + |x + y + z|/\sqrt{3} + |x - y - z|/\sqrt{3} + |x + y - z|/\sqrt{3} =$ cte, avec cte = valeur en I (par ex) !

Après calculs … on trouve finalement :

Soit : $|x-y+z|+|x+y+z|+|x-y-z|+|x+y-z| = 4b$.



On peut justifier que cette équation correspond déjà aux 6 faces carrées du cuboctaèdre, en regardant ce qu'il se passe sur l'une des 6 faces du cube …

Par exemple sur la face supérieure ABCD, on a $z = b$. L'équation devient :

$$|x-y+b|+|x+y+b|+|x-y-b|+|x+y-b| = 4b \text{ ET } z = b.$$

Soit $M(x,y,b)$ un point du plan (ABCD), alors $|x-y+b|$ et $|x-y-b|$ sont les distances (multipliées par $\sqrt{2}$!) de M aux 2 plans parallèles « verticaux » passant par (IL) et par (JK). De même pour $|x+y+b|$ et $|x+y-b|$ passant par (KL) et par (IJ). Et les plans parallèles sont distants de $b\sqrt{2}$ …

L'équation correspond donc à celle du carré IJKL, qui s'écrit :

$$(|x-y+b| + |x-y-b|)/\sqrt{2} + (|x+y+b| + |x+y-b|)/\sqrt{2} = 2*b\sqrt{2} \ldots$$

Par raison de symétries diverses, il en est de même pour les 5 autres carrés !

Passons aux triangles ... CURIOSITé, la formule fonctionne encore ! Voyons pourquoi.

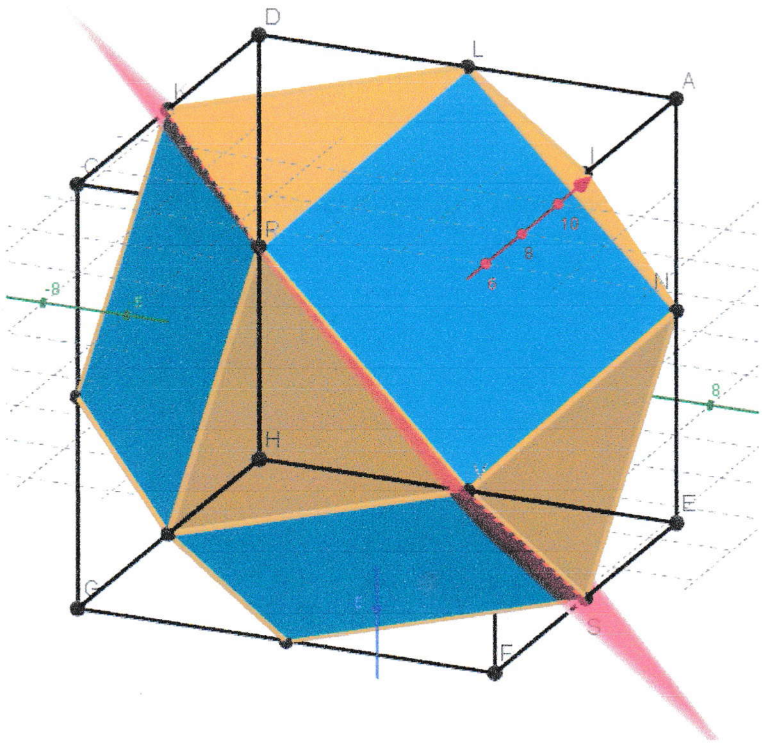
Prenons par exemple le triangle ILN, dans le 1er octant du repère. Le plan P4 passe par (IL), le plan P3 passe par (LN), et le plan P1 passe par (NI). Ces 3 plans définissent une pyramide de sommet O et de base ILN équilatérale.

On peut donc écrire pour tout point M de ILN :

$|x - y + z|/\sqrt{3} + |x - y - z|/\sqrt{3} + |x + y - z|/\sqrt{3}$ = valeur en I (par ex) = $2b/\sqrt{3}$.

Si on regarde comment sont les 2 plans P2 et (ILN), on constate qu'ils sont parallèles, et que leur distance vaut $2b/\sqrt{3}$. (= 1/3 de la diagonale du cube, j'ai la flemme de détailler, ça se voit !).

... On peut aussi calculer Z(2b/3,2b3,2b/3), centre de ILN, puis OZ = $2b/\sqrt{3}$.



En rajoutant distance(M,P2) = $|x + y + z|/\sqrt{3}$ à gauche et $2b/\sqrt{3}$ à droite, on trouve :

$|x - y + z|/\sqrt{3}+|x - y - z|/\sqrt{3}+|x + y - z|/\sqrt{3}+|x + y + z|/\sqrt{3} = 2b/\sqrt{3} + 2b/\sqrt{3}$.

Et en multipliant par Rac(3).

Soit : $|x - y + z| + |x + y + z| + |x - y - z| + |x + y - z| = 4b$.

Ce qui « prouve » que c'est bien une équation du cuboctaèdre ! Devoir accompli ?

Extensions :

1) La méthode des pyramides ouvre la voie pour trouver des équations aux multiples polyèdres ayant des faces polygonales convexes. Le choix de leurs sommets, sur l'axe de la base, permet aussi des variantes dans le choix des plans utilisables !

2) La méthode des pyramides doit être extensible aux bases triangulaires quelconques : en cours de développement. Ce qui ouvrirait la voie pour des polyèdres quelconques. Evidement, il faut s'attendre à des formules de n facteurs pour les n faces !

Références :

1) J'ai découvert il y a environ 18 mois, et je dois citer en référence, les travaux de monsieur ROTARU Paul, qui a écrit en 2007 un article sur des « principes simples » pour des équations de polyèdres, article de 12 pages dans la revue n°64 de Quadrature, revue épuisée. Je n'ai pas encore pu obtenir et lire cet article, et si quelqu'un peut me le faire parvenir, un grand merci ! J'ai probablement (re)trouvé certaines de ses bases …

2) Les techniques employées sont celles que j'ai développées seul, peu à peu depuis 10 ans environ …