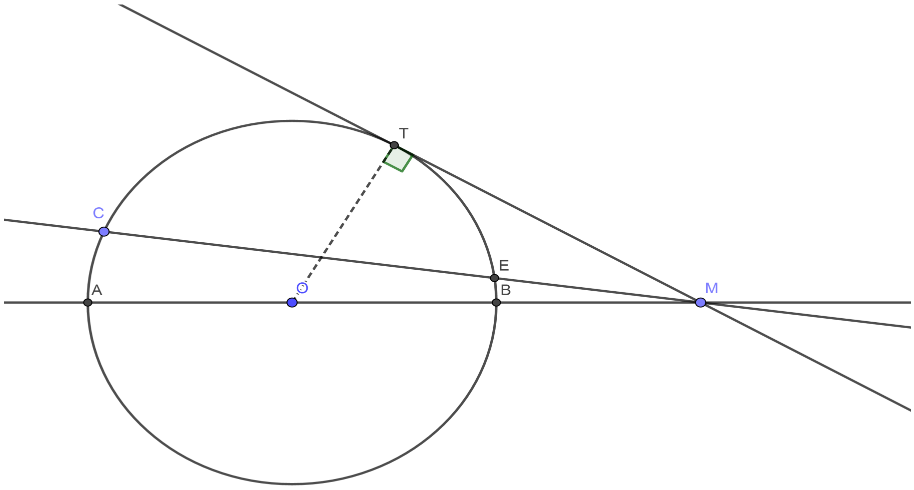
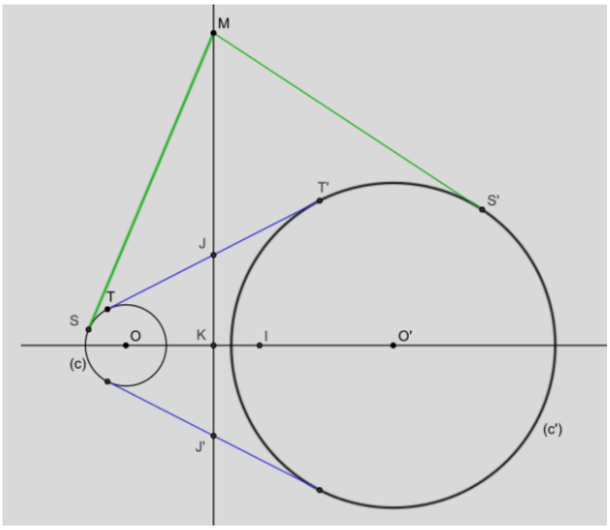
Définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle



Par théorème :
La puissance de M par rapport au cercle (C) est $\boxed{\overline{ME}.\overline{MC}=\overline{MA}.\overline{MB}=MO^2-R^2=MT^2}$
Remarque : Elle est positive si M est extérieur au cercle, nulle si M est sur le cercle, négative si M est à l'intérieur du cercle.

AXE RADICAL



Par un point M extérieur aux cercles (C) et (C') , on trace les tangentes (MS) et (MS') aux deux cercles, pour les tracer il suffit de tracer les cercles de diamètre [OM] et [O'M], on obient S et S',

Par définition (théorème) la puissance de M par rapport au cercle de centre O est MS^2 et pour l'autre cercle MS'^2,
M appartient à l'axe radical si et seulement si $MS^2 = MS'^2$ (E)
Dans MSO rectangle en S, $MO^2 = MS^2 + R^2$ de même $MO'^2=MS'^2 +R'^2$
Donc (E) <=> $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$
<=> $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$
Or $MO^2-MO'^2=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{MO'}^2=(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MO'})\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'})=\overrightarrow{O'O}\cdot 2\overrightarrow{MI}$ car I est milieu de [OO']
De plus : $\overrightarrow{O'O}\cdot 2\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{O'O}\cdot(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KI})=2\overrightarrow{O'O}\cdot\overrightarrow{KI}$ où K est le projeté orthogonal de M sur (OO')

Donc (E) <=> $R^2 - R'^2 = 2\overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{KI}$

ou (E) <=> $\overline{KI} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{O'O}}$

Donc $\overline{KI}$ ne fépend que des cercles, on peut le construire connaissant les deux cercles, M est sur une perpendiculaire à (OO') passant par K,

Ceci justifie que l'axe radical est une perpendiculaire à la droite (OO').

Remarque :
Pour des cercles sécants en A et B, la puissance de A par rapport à (C) est 0, de même pour B, donc l'axe radical est (AB).