

Nombres rationnels

I. Nombres rationnels :

a) Définition

Un nombre rationnel c'est le quotient d'un nombre entier relatif a par un nombre entier relatif b non nul notée $\frac{a}{b}$

Exemples : $\frac{6}{3}$; $\frac{-5,7}{9}$; $\frac{7}{-2,8}$; $\frac{-1,5}{-6,5}$

Remarque :

➤ Tout nombre entier relatif est un nombre rationnel.

Exemples $-8 = \frac{-8}{1}$ $79 = \frac{79}{1}$

➤ Tout nombre décimal relatif est un nombre rationnel

Exemples : $3,6 = \frac{3,6 \times 10}{10} = \frac{36}{10}$

b) Le signe d'un nombre rationnel :

Règle

Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel.

$\frac{a}{b}$ est positif si a et b sont de même signe.

$\frac{a}{b}$ est négatif si a et b sont de signes différents

Exemples : $\frac{-8}{5}$ est négatif $\frac{118}{-5,8}$ est négatif $\frac{-45,7}{-7,5}$ est positif

Remarque $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

c) Egalité des quotients

Propriété :

Le quotient ne change pas si on multiplie (ou si on divise) le numérateur et le dénominateur d'un nombre rationnel par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k} \quad \text{Avec } k \text{ un nombre non nul}$$

Exemple1 : Simplifier $\frac{27}{45}$  solution : $\frac{27 \div 9}{45 \div 9} = \frac{3}{5}$

Exemple2 : Réduire au même dénominateur 15 les nombre rationnels $\frac{2}{-3}$ et $\frac{-3}{5}$

$$\frac{2 \times -5}{-3 \times -5} = \frac{-10}{15} \qquad \frac{-3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{-9}{15}$$

d) Comparaison

Règle :

- si deux nombres rationnels positifs en écriture fractionnaire ont le même dénominateur alors ils sont ranger dans le même ordre que leurs numérateurs
- si deux nombres rationnels positifs en écriture fractionnaire ont le même numérateurs alors ils sont ranger dans l'ordre inverse que leurs dénominateurs
- si deux nombres rationnels sont négatifs alors ils sont rangés dans l'ordre inverse que leurs opposés

Exemple : $\frac{3,9}{15} > \frac{1,9}{15}$ car $3,9 > 1,9$ $\frac{8,7}{125} < \frac{8,7}{78}$ car $125 > 78$

Règle :

- Si le numérateur d'un nombre rationnels positif en écriture fractionnaire est supérieur à son dénominateur alors **il est supérieur à 1**.
- Si son numérateur est inférieur à son dénominateur alors **il est inférieur à 1**.

Exemple

$$\frac{7,2}{8,7} < 1 \text{ car } 7,2 < 8,7 \qquad \frac{56}{15} > 1 \text{ car } 56 > 15$$

Règle :

Pour comparer des nombres rationnels positif en écriture fractionnaire, on les écrit avec le même dénominateur, le plus grand c'est celui qui a le plus grand numérateur.

Exemple ; Compare les nombres $\frac{5}{3}$ et $\frac{11}{7}$

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 7}{3 \times 7} = \frac{35}{21} \qquad \text{On écrit le nombre } \frac{5}{3} \text{ avec le dénominateur } 21$$

$$\frac{11}{7} = \frac{11 \times 3}{3 \times 7} = \frac{33}{21} \quad \Longrightarrow \quad \text{On écrit le nombre } \frac{11}{7} \text{ avec le dénominateur } \mathbf{21}$$

$$35 > 33 \quad \Longrightarrow \quad \text{On compare les numérateurs.}$$

$$\frac{5}{3} > \frac{11}{3} \quad \Longrightarrow \quad \text{On conclue}$$

e) Produit en croix

Propriété :

a,b,c et d des nombres relatifs (avec b et d non nul)

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } a \times d = b \times c \quad \text{si } a \times d = b \times c \text{ alors } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Exemple : comparons $\frac{49}{343}$ et $\frac{94}{658}$

$$49 \times 658 = 32242 \text{ et } 94 \times 343 = 32242 \text{ donc } \frac{49}{343} = \frac{94}{658}$$

II. Addition et soustraction

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) des nombres rationnels en écriture fractionnaire :

- on écrit les nombres avec le même dénominateur
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

$$a, b \text{ et } d \text{ des nombres relatifs avec } d \neq 0 \quad \frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} A &= \frac{-2}{7} + \frac{3}{4} \\ A &= \frac{-2 \times 4}{28} + \frac{3 \times 7}{28} \\ A &= \frac{-8}{28} + \frac{21}{28} \\ A &= \frac{13}{28} \end{aligned}$$

III. Multiplication et Division

a) Produit de deux nombres rationnels

Propriété :

Pour multiplier des nombres rationnels en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$a, b, c \text{ et } d \text{ des nombres relatifs avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0 \quad \frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Exemple 1

$$A = \frac{-5}{6} \times \frac{7}{8}$$

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux

$$A = \frac{-5 \times 7}{6 \times 8}$$

$$A = \frac{-35}{48}$$

Remarque : Il est préférable de simplifier les fractions avant d'effectuer les calculs afin d'obtenir une fraction irréductible.

Exemple 2

$$A = \frac{15}{6} \times \frac{4}{30} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{5}} = \frac{1}{3}$$

b) Quotient de deux nombres rationnels :

Propriété :

Diviser par un nombre rationnel non nul revient à multiplier par son inverse

a, b, c et d des nombres relatifs avec $b \neq 0, c \neq 0$ et $ad \neq 0$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples :

$$\diamond \quad \frac{3}{5} \div \frac{-7}{6} = \frac{3}{5} \times \frac{6}{-7} = \frac{3 \times 6}{5 \times -7} = \frac{18}{-35}$$

$$\diamond \quad \frac{\frac{7}{11}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{11} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{11} \times \frac{5}{2} = \frac{7 \times 5}{11 \times 2} = \frac{35}{22}$$

$$\diamond \quad \frac{\frac{13}{-7}}{9} = 13 \div \frac{-7}{9} = \frac{13}{1} \times \frac{9}{-7} = \frac{13 \times 9}{1 \times -7} = \frac{117}{-7}$$