Résolution de problèmes par utilisation de systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Plan de résolution:

- S'attacher à lire calmement l'énoncé et lentement, plusieurs fois si nécessaire,
- Identifier ensuite les 2 inconnues et commencer par les désigner en toutes lettres,
- Rechercher dans l'énoncé les 2 situations différentes, les 2 phrases différentes, les 2 propositions différentes. Ceci donnera les 2 équations,
- Ecrire les 2 équations,
- Résoudre le système,
- Revenir au problème en répondant à la question posée et dans les mêmes termes.

Exemples

Problème n°1

Pour 3 croissants et 5 chocolatines, j'ai donné 23 F au boulanger, mais par l'odeur alléché, je commande 4 autres croissants et 2 autres chocolatines que je paie 19 F. Quel est le prix d'un croissant ? Quel est le prix d'une chocolatine ?

De quoi s'agit-il ici ? De rechercher le prix d'un croissant et celui d'une chocolatine ! Nous devons donc écrire :

Soient x le prix en F d'un croissant et y celui d'une chocolatine.

Ici, nous repérons facilement deux situations différentes, deux achats séparés, bien marqués par deux propositions coordonnées par : ***mais.*** Chacune de ces propositions permet d'écrire une équation :

$\begin{cases} 3x + 5y = 23 \\ 4x + 2y = 19 \end{cases}$ Ici la méthode par combinaison paraît être la plus simple (sinon, par substitution, il faudrait se "débarrasser" du dénominateur).

On va donc multiplier (par exemple) les deux membres de la première équation par 4 et les 2 membres de la seconde par -3, afin "d'éliminer" les x :

$\begin{cases} 12x + 20y = 92 \\ -12x - 6y = -57 \end{cases}$ On obtient alors, par addition membre à membre :

$20y - 6y = 92 - 57$ soit après réduction :

$14y = 35$ et division des deux membres par 14

$y = 35/14 = 2{,}5$ D'où, en reportant la valeur de y dans l'une des équations de départ (au choix) :

$3x + 5 \times 2{,}5 = 23$ et en réduisant : $3x + 12{,}5 = 23$. D'où $x = (23 - 12{,}5)/3 = 3{,}5$

Vérification. On reporte les valeurs de x et y dans ***l'autre équation*** : $4 \times 3{,}5 + 2 \times 2{,}5 = 14 + 5 = 19$.
Les calculs sont donc justes.

Retour au problème : le prix d'un croissant est 2,50 F et celui d'une chocolatine 3,50 F

Problème n°2

Une voiture de 15 places, les unes à 1.50 € et les autres à 2 €, donne 24 € de recette quand elle est pleine de voyageurs. Combien cette voiture a-t-elle de places à 1,50 € et à 2 € ?

Une lecture attentive permet de voir qu'il est question d'une voiture comprenant 15 places de ***deux*** types et que l'on demande le nombre de places de chaque type : les inconnues sont donc clairement identifiées.
On doit donc écrire :

Soient x le nombre de places à 1,50 € et y le nombre de places à 2 €.

La première équation équation également est clairement identifiée. On recherche alors les autres informations non encore utilisées : la ***recette totale*** est de **24** € à raison de 1,50 € **par place du premier type** et **2 € par place du second type** et nous obtenons alors la seconde équation**.**
D'où le système :

$\begin{cases} x + y = 15 \\ 1{,}5x + 2y = 24 \end{cases}$ Toutes les méthodes sont acceptables pour entamer la résolution, cependant ici la méthode par substitution semble préférable. On va donc exprimer y en fonction de x à partir de la première équation : $y = 15 - x$. Expression que l'on reporte dans la seconde équation :

$1{,}5x + 2(15- x) = 24$ Maintenant, on développe et on réduit :

$-0{,}5x + 30 = 24$ On isole l'inconnue :

$-0{,}5x = 24-30$ On calcule le second membre et on divise ensuite les 2 membres par -0,5 :
$x = (-6)/(-0{,}5) = 12$ D'où $y = 15 - 12 = 3$.
Vérification : 1,5 x 12 + 2 x 3 = 24. Les calculs sont donc justes.

Retour au problème : cette voiture contient 12 places à 1,50 € et 3 places à 2 €.

Problème n° 3. *La mule et le baudet.*
Une mule et un baudet chargés de sacs également pesants cheminent de concert. Le baudet se plaignant de sa charge, la mule lui dit : «*De quoi te plains-tu ? Si je prenais un de tes sacs, je serais chargée deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi chargée que toi.* »
Combien chaque animal porte-t-il de sacs ?

De quoi s'agit-il ici ? De rechercher le nombre de sacs porté par la mule et le nombre de sacs porté par le baudet. Nous devons donc écrire :
Soient x le nombre de sacs porté par la mule et y le nombre de sacs porté par le baudet.
Ici, nous repérons facilement ***deux situations différentes***, bien marquées par deux propositions coordonnées par le conjonction ***et.*** Chacune de ces propositions permet d'écrire une équation.
Avant de passer à l'écriture de ces équations, soyons sûrs d'avoir bien compris ! Avant que l'âne ne commence à se plaindre, la situation était simple : la mule portait (avec notre convention de départ) x sacs et l'âne y sacs !
Que se passe-t-il ensuite ?
Avec la première proposition, la mule ***enlève*** un sac dans la charge portée par l'âne et le met sur son dos, avec les autres sacs, donc l'***ajoute*** à sa charge : la mule porte donc alors $\boldsymbol{x+1}$ sacs et l'âne $\boldsymbol{y-1}$ sacs.
Avec la deuxième proposition, la mule ***enlève*** un sac dans la charge ***qu'elle porte*** et le met sur le dos de l'âne, avec les autres sacs, donc l'***ajoute*** à la charge de l'âne : la mule porte donc alors $\boldsymbol{x-1}$ sacs et l'âne $\boldsymbol{y+1}$ sacs.
Ce n'est pas simplement un sac de plus ou de moins, mais à chaque fois, un sac qui est **retiré** du total de l'un pour être rajouté au total de l'autre.
Attention encore au mot ***double*** : c'est le plus grand nombre qui vaut deux fois le plus petit et non le contraire ! Lecture, lecture...
D'où les équations :

$$\begin{cases} x + 1 = 2(y - 1) \\ x - 1 = y + 1 \end{cases}$$

Ici la méthode par substitution paraît être la plus rapide et la plus commode en exprimant x en fonction de y à partir de la seconde équation.

Après calculs, on obtient $y = 7$ et $x = 5$.

Retour au problème : la mule porte 7 sacs et le baudet 5.

N-B Si le but du jeu n'avait pas été ici d'utiliser un système de 2 équations à 2 inconnues, un petit raisonnement permettait d'arriver à la solution mentalement.
Puisque déplacer **1** sac permet d'égaliser les nombres, c'est que l'écart des 2 nombres est 2.
Puisque il y a double, c'est que le nombre modifié est pair, et l'autre, nombre pair moins 2, l'est également. Mais ces nombres sont obtenus, le premier par ajout de 1, le second par retrait de 1. Un nombre pair moins 1, ou plus 1, est un nombre impair.
Donc, les nombres de sacs cherchés sont deux nombres impairs de différence 2. Ces nombres ne peuvent pas être trop grands, car enlever 1 à l'un pour l'ajouter à l'autre suffit pour passer du simple au double.
Très rapidement, on éliminait les premiers nombres et on obtenait 7 et 5.