Systèmes de 2 équations à deux inconnues

Les équations (et inéquations) vues jusqu'à maintenant ne comportaient qu'une seule inconnue.. Il faut bien penser que s'il y a plus d'une inconnue, il faut plus d'une équation : il faut autant d'équations que d'inconnues pour obtenir une seule solution. Ici, avec 2 inconnues il faut 2 équations. Ces 2 équations doivent être vraies simultanément, d'où le nom de système.

Exemple :

$$\begin{cases} 3x + 4y = -9 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$$

Le but du "jeu" est donc ici de chercher quelle valeur donner à x et à y pour que l'on ait, **en même temps**, $3x + 4y = -9$ **et** $2x - 3y = 11$

La réponse sera donnée obligatoirement ainsi : **Le couple de solutions est (x ; y) = (1 ; -3)**

(*Vous pouvez et devez vérifier que c'est vrai*)

Comment arriver à cela ? Il existe 2 méthodes par **combinaison** et par **substitution**..

1. Méthode de combinaison

Elle consiste, comme toujours en Mathématiques, à revenir à quelque chose de plus simple (dans le sens de moins complexe) : c'est à dire à résoudre une équation à une inconnue, et particulièrement simple.

Pour cela comme il y a deux inconnues, il faut obligatoirement "se débarrasser" de l'une d'entre elles !

La méthode consiste à *multiplier les 2 membres de la première équation par un nombre (convenablement choisi), à multiplier les 2 membres de la deuxième équation par un nombre (convenablement choisi lui aussi) et à ajouter "**membre à membre**" les 2 équations afin d'en obtenir une troisième ne comprenant qu'une seule inconnue.*

D'où la question subsidiaire : quelle inconnue doit-on éliminer ? Réponse : aucune importance, celle que vous voulez !

$$\begin{cases} 3x + 4y = -9 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$$

Je décide d'éliminer x

$$\begin{cases} 6x + 8y = -18 \\ -6x + 9y = -33 \end{cases}$$

J'ai multiplié la ligne 1 par 2
J'ai multiplié la ligne 2 par -3

$$\begin{cases} 3x + 4y = -9 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$$

Je décide d'éliminer y

$$\begin{cases} 9x + 12y = -27 \\ 8x - 12y = 44 \end{cases}$$

J'ai multiplié la ligne 1 par 3
J'ai multiplié la ligne 2 par 4

J'ajoute le 1er membre de la ligne n°1 avec le 1er membre de la ligne n°2 et le 2e membre de la ligne n°1 avec le 2e membre de la ligne n°2.

$6x + (-6x) = 0$, on ne l'écrit plus et il reste alors :

$17y = -51$

ce qui donne bien : $y = -51/17 = -3$

$12y + (-12y) = 0$, on ne l'écrit plus et il reste alors :

$17x = 17$

ce qui donne bien : $x = 17/17 = 1$

Doit-on trouver x et y (c'est à dire les deux) en procédant de cette façon ? Réponse : Non !

*Lorsque vous avez trouvé l'une des inconnues de cette façon, pour trouver l'autre, il vous suffit de prendre **l'une des 2 équations**, de remplacer x (ou y) par la valeur trouvée et de résoudre l'équation ainsi obtenue.*

On a trouvé $y = -3$.

On peut reporter $y = -3$ dans la 1ere équation :

$3x + 4 \times (-3) = -9$ soit $3x - 12 = -9$

D'où $3x = -9 + 12$; $3x = 3$ et $\boldsymbol{x = 1}$

On pouvait aussi reporter $y = -3$ dans la 2e équation :

$2x - 3 \times (-3) = 11$ soit $2x + 9 = 11$

D'où $2x = 11 - 9$; $2x = 2$ et $\boldsymbol{x = 1}$

On a trouvé $x = 1$

On peut reporter $x = 1$ dans la 1ere équation :

$3 \times 1 + 4y = -9$ soit $3 + 4y = -9$

D'où $4y = -9 - 3$; $4y = -12$ et $\boldsymbol{y = -3}$.

On pouvait aussi reporter $x = 1$ dans la 2e équation :

$2 \times 1 - 3y = 11$ soit $2 - 3y = 11$

D'où $-3y = 11 - 2$; $-3y = 9$ et $\boldsymbol{y = -3}$.