En 2nde, on apprend à développer $(a + b)^3$ qui est égal à : $a^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2 + b^3$.
C'est cela qui va servir...
On développe donc :

$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times 1 + 3 \times 1 \times 1^2 + 1^3.$
$3^3 = (1 + 2)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times 2 + 3 \times 1 \times 2^2 + 2^3.$
$4^3 = (1 + 3)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times 3 + 3 \times 1 \times 3^2 + 3^3.$
$5^3 = (1 + 4)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times 4 + 3 \times 1 \times 4^2 + 4^3.$
....
$n^3 = (1 + n\text{-}1)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (n\text{-}1) + 3 \times 1 \times (n\text{-}1)^2 + (n\text{-}1)^3.$
$(1 + n)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times n + 3 \times 1 \times n^2 + n^3.$

Et puisque $1^3 = 1^2 = 1$, on va récrire tout cela :

$2^3 = (1 + 1)^3 = 1 + 3 \times 1 + 3 \times 1^2 + 1.$
$3^3 = (1 + 2)^3 = 1 + 3 \times 2 + 3 \times 2^2 + 2^3.$
$4^3 = (1 + 3)^3 = 1 + 3 \times 3 + 3 \times 3^2 + 3^3.$
$5^3 = (1 + 4)^3 = 1 + 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + 4^3.$
....
$(n\text{-}1)^3 =$
$n^3 = (1 + n\text{-}1)^3 = 1 + 3 \times (n\text{-}1) + 3 \times (n\text{-}1)^2 + (n\text{-}1)^3.$
$(1 + n)^3 = (1 + n)^3 = 1 + 3 \times n + 3 \times n^2 + n^3.$

- La 3e colonne ne contient que des 1. Du nombre 1 au nombre n, il y a n nombres, par conséquent du nombre 2 au nombre n+1, il y en aussi n. Il y a donc n fois le nombre 1, donc somme 1ere colonne résultat = n
- La 4e colonne contient $3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + ...$, c'est à dire $3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + ...)$ soit encore une somme égale à $3 \times \frac{n(n+1)}{2}$ donc résultat = $\frac{3n(n+1)}{2}$,
- La 5e colonne contient elle $3 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + ...$, c'est à dire encore après factorisation $3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ...)$ donc 3 fois la somme cherchée, notons cela 3S,
- Quant à la 6e colonne, chacun de ses nombres (sauf le 1er) se retrouve dans la première colonne de la ligne du dessus.

La somme des nombres de la 1ere colonne étant égale à la somme des nombres de la 3e colonne, de la 4e colonne, de la 5e colonne et de la 6e colonne, on constate que 2^3, 3^3, 4^3, 5^3,.... n^3 se retouvent une fois de chaque côté, on va donc pouvoir supprimer 2^3, 3^3, 4^3, 5^3,...puis n^3 de chaque côté sans démolir l'égalité.
Il reste donc :
- Dans la 1ere colonne $(1 + n)^3$,
- Dans la dernière colonne le nombre 1 (1ere ligne).

Les 3e, 4e, 5e colonne sont inchangées. On peut maintenant écrire que :

$$(1 + n)^3 = n + \frac{3n(n+1)}{2} + 3S + 1.$$

En utilisant les mêmes méthodes qu'avec les équations, on va écrire que :

$$3S = (1 + n)^3 - n - \frac{3n(n+1)}{2} - 1$$

En mettant avec le dénominateur 2 :

$$3S = \frac{2(1+n)^3 - 2n - 3n(n+1) - 2}{2}$$

On développe tout ça :

$$3S = \frac{2(1+3n+3n^2+n^3) - 2n - 3n^2 - 3n - 2}{2}$$

On développe encore :

$$3S = \frac{2+6n+6n^2+2n^3-2n-3n^2-3n-2}{2}$$

Et on peut enfin réduire :

$$3S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

et enfin écrire que

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^3 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$