

*Etude analytique et numérique du transfert de chaleur d’un écoulement oscillatoire dans un éspace annulaire*

**Deghmoum Mohamed 1, Ghezal Abderrahmane 2 **

1 Faculté des Sciences de l’ingénieur, UMBB, Département Energetique, Boumerdes, Algérie.

2 Institut de Physique, USTHB, B.P.32, El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie.

*Résumé*— On présente dans ce travail une étude analytique associé à une résolution numérique des équations qui régissent les écoulements de type oscillatoire. L’étude analytique a permis d’établir des équations qui déterminent le champ dynamique et thermique d’un écoulement oscillatoire dans un espace annulaire. L’étude numérique est basée sur la méthode des différences finis utilisant le schéma implicite pure.

Mots-Clés; écoulement oscillant; transferts thermiques; differences finis ;

# Nomenclature

A : Amplitude du gradient de pression oscillant

Ar: Amplitude Adimensionnelle (=2.xm,max/Lt )

F : Fréquence Hz

h, hf: Coefficient d’échange de chaleur

par convection W.m-2.K-1

I0: Fonction de Bessel modifiée de

première espèce, d’ordre 0

I1: Fonction de Bessel modifiée de

première espèce, d’ordre 1

K0: Fonction de Bessel modifiée de

seconde espèce, d’ordre 0

K1: Fonction de Bessel modifiée de

seconde espèce, d’ordre 1

Lt: Longueur totale du tube m

Nu : Nombre de Nusselt (=h.Dt/)

P : Pression Pa

Pr : Nombre de Prandtl (=.Cp/)

Remax: Nombre de Reynolds maximum

Rt: Rayon du tube extérieur m

Robs: Rayon du tube intérieur (obstacle) m

Re : Fréquence adimensionnelle

t : Temps Sec

t0: Temps de référence Sec

T : Température K

T\*: Température adimensionnelle

T\*p: Température adimensionnelle de la paroi

chauffée

T\*ad: Température adimensionnelle de la paroi

Adiabatique

U : Composante axiale de la vitesse m.Sec-1

Um : Vitesse débitante instantanée m.Sec-1

V : Volume m3

Vdeb: Vitesse débitante m.Sec-1

X : Cordonnée axiale (axe de la conduite) m

Caractères grecs :

: Nombre de Womersley

Gradient de température longitudinal K. m-1

d: Viscosité dynamique Pa. Sec

Viscosité cinématique m2.Sec-1

Masse volumique Kg. m-3

Notations utilisées :

# Introduction

Le problème de transfert de chaleur des écoulements pulsés est rencontré dans de très nombreux domaines vu son implication dans différents phénomènes naturels et processus industriels. On cite les moteurs Stirling, les échangeurs de chaleur, le transport des produits énergétiques, le raffinage du pétrole, ainsi que dans le domaine médical particulièrement le traitement des vaisseaux sanguins. Les premiers travaux sur les écoulements oscillatoires réfèrent à **Richardson** et **Tyler** (1929)[1], ils ont mis en évidence l’existence d’un effet annulaire sur les profils de vitesse et de température par des mesures expérimentales. Cet effet est caractérisé par la présence d’un maximum de vitesse prés des parois et non pas au centre de l’écoulement. Les travaux de **Womersley** (1955) [2] et **Uchida** (1956) [3] ont validé les résultats de Richardson et al, par l’analyse du mouvement sinusoïdale et non-sinusoïdale d’un écoulement oscillatoire d’un fluide incompressible dans une conduite horizontale. **Atabek** et **Chang** (1961) [4] ont développé une solution analytique pour les profils de vitesse en écoulement laminaire pulsé dans un tube cylindrique. Ils ont considéré que l’écoulement est établi avec une vitesse débitante sous forme d’une somme algébrique des pulsations en sinus et en cosinus. **Zhao** et **Cheng** (1995) [5] ont effectué, en parallèle des études expérimentales et numériques sur un écoulement laminaire d’air oscillant à l'intérieur d’un tube cylindrique et chauffé par un flux de chaleur uniforme. A partir des mesures de températures, au centre du tube à plusieurs positions axiales et au niveau de la paroi intérieure du réchauffeur, ils ont déterminé la corrélation suivante du nombre de Nusselt moyen à partir de la définition classique



Cette corrélation montre que le nombre de Nusselt augmente avec l’amplitude adimensionnelle A0 et le nombre de Reynolds cinétique.

# Formulation du Probléme

## Position du problème:

On considère l'écoulement oscillatoire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite cylindrique à paroi adiabatique de rayon Rt et de longueur L, dans laquelle se trouve une autre conduite cylindrique de rayon r et de longueur L, disposé horizontalement à l'axe de symétrie et chauffé à une température constante Tpr, le fluide qui circule dans l'espace annulaire entre les deux conduites est initialement au repos et se trouve à la température ambiante Tamb .



*r*

*z*

*L*

o



*R*

Figure 1. Géométrie de l’étude

A l'instant t=0, le fluide est pulsé à l'entrée de la conduite suivant l'axe de cette dernière avec un gradient de pression axiale périodique, de pulsation  et d'amplitude A0. On impose des conditions aux limites en vitesse et température sur les parois latérales des deux conduites ainsi qu'a l'entrée et a la sortie.

## Hypotheses simplyficatrices:

On suppose que:

- l'écoulement est oscillant, laminaire, incompressible, complètement développé, parallèle à l'axe du tube et axisymétrique;

- le fluide est newtonien et ses propriétés physique supposées constantes;

- les forces volumiques sont négligées;

- la dissipation visqueuse est négligée;

- les parois de la conduite extérieure sont adiabatiques.

L'équation de conservation de quantité de mouvement en cordonnées cylindrique s’écrit alors comme suit:

Et l’équation de conservation d'énergie se réduit comme suit:

(2)

Avec:  =1, =f, comme fluide, si 0< r < Rt

En introduit les variables adimensionnelles suivantes:

r\*= r/Rt, le rayon adimensionnel;

x\*= x/Rt, l'abscisse adimensionnelle;

t\* =t, le temps adimensionnel;

u\* = u/(Rt ), la vitesse adimensionnelle;

Tf\*=(T-Tfluide)/(Tparoi-Tfluide), la température adimensionnelles;

p\*= p/( Rt2, la pression adimensionnelle .

On obtient les équations adimensionnelles suivantes:



(3)

(4)



# etude analytique

A cause de la symétrie axiale du problème, le domaine d'étude se réduit au domaine compris entre la conduite adiabatique et le solide chauffé, prenant l'équation (3). Sachant que le fluide est soumis à un gradient de pression oscillatoire de forme:

(5)

Le profil de vitesse peut se mettre alors sous la forme suivante:

(6)



En introduisant cette expression dans l’équation(3) on obtient une équation différentielle de deuxième ordre non homogène, qui a pour solution:

(7)



On appliquant la condition d'adhérence à la paroi des deux tubes, on aura:

(8)



(9)





(10)

(11)

D’où les constantes C1 et C2 sont égales à:

(12)

Et: (13)

La valeur de A n’étant pas connue, on utilise la formule de la vitesse débitante:

(14)

En posant : (15)

Et après intégration on trouve que:

(16)

Le profil de vitesse dans l'espace annulaire s’écrit donc comme suit:

(17)

Afin de résoudre analytiquement l’équation (4) on suppose que le profil de température peut s'écrire sous la forme:

(18)

Avec :

Il vient que:

C’est une équation différentielle de deuxième ordre non homogène, qui a pour solution:

(19)

Telle que:

En tenant compte des conditions aux limites:

(20)

Et pour: (21)

En utilisant les conditions aux limites, on obtient ce système d’équation algébrique suivant:

(22)

Et

(23)

Tel que:   
 (24)

Et (25)

Finalement on trouve que le profil de température dans l'espace annulaire en écoulement oscillant s'écrit comme suit:

(26)

# etude numerique

Les écoulements instationnaires des fluides incompressibles dans une géométrie quelconque sont gouvernés par les équations aux dérivées partielles de **Navier-Stokes**. Ces équations sont non linéaires et pour lesquelles une solution analytique reste difficile à obtenir. Cela impose le recours aux méthodes de résolutions numériques.

Le choix d’une méthode appropriée pour la résolution d’un problème numérique, fait intervenir de multiples paramètres. Les critères de sélections sont d’une part, le temps nécessaire pour le calcul de la solution, qui doit être le plus court possible, et d’autre part l’exactitude de la solution qui doit être la plus grande possible.

La méthode de résolution choisie est basée sur le remplacement du domaine de variation des paramètres r, x par un ensemble de valeurs discrètes de points, appelés nœuds du système, correspondant aux nœuds du maillage ainsi constitué. Les mailles sont carrées. Chaque cellule est repérée par l’indice «i» qui indique la position sur l’axe (or). Par raison de symétrie du problème, l’étude a été limitée au domaine [Robs/Rt , 1]. Les nœuds du maillage ne coïncident pas avec le bord horizontal de l’obstacle cylindrique R=Robs.



Figure 2. Représentation géométrique du domaine de l’étude.

## Schéma de discrétisation

La méthode retenue pour implémenter ce problème est une méthode aux différences finies suivant le schéma purement implicite. Ce schéma propose donc un produit entre une matrice tridiagonale et un vecteur ce qui nous conduit à utiliser des subroutines tridag afin de résoudre le système algébrique.

L’équation (3) discrétisé suivant le schéma implicite pure s’écrit donc comme:

Et l’équation (4) s’écrit comme:

## Conditions aux limites



Figure 3**.** Les frontières du domaine étudié.

1. *Sur la paroi S1:*

Au voisinage de cette paroi, on distingue deux conditions aux limites à savoir; la condition d’adhérence de la vitesse et la condition d’adiabaticité de la paroi, ce qui est traduit par les relations suivante:

1. *Sur la paroi S2:*

Les conditions aux limites au voisinage de cette paroi se résument par l'adhérence de la vitesse à la paroi, et l'imposition de la température, ces conditions s'écrivent alors comme suit:

# résultats et discussion

Dans le cas des faibles fréquences (Re=1), les profils de vitesse ont une forme parabolique caractérisée par un maximum au centre, c’est le cas de l’écoulement de **Poiseuille**, quand le nombre de Reynolds cinétique augmente (Re=100) on remarque le début de l’existence du phénomène annulaire, il est à noter qu’on a trouvé dans l’étude analytique que le nombre de Reynolds cinétique correspondant à la même configuration est égale à (Re=64) pour le cas d’une conduite simple. Pour les nombres de Reynolds très importants (Re=900, 2500) on constate la présence de l’effet annulaire sur toutes les phases, cet effet est caractérisé par la présence du maximum de vitesse prés des parois latérales des deux tubes et un plateau au cœur de l’écoulement.

Les profils de température montrent l’existence du phénomène annulaire, ce qui confirme les résultats numérique de **Zhao et Cheng [5]**. On remarque la présence d’un extremum prés de la paroi chaude qui est du essentiellement à la présence du phénomène annulaire dans les profils de la vitesse. Les résultats obtenus sont pour Pr=0.7, Remax=12000, Robs/Rt=0.3.

##### conclusion

On a présenté dans ce travail une étude analytique et numérique de l’influence du mécanisme du transfert de chaleur dans un écoulement de type oscillatoire, d’un fluide réel confiné dans un espace annulaire.

L’étude analytique a permis d’établir deux expressions qui traduisent l’évolution radiale de la vitesse et de la température du fluide oscillant dans un espace annulaire. Elle a permis aussi de déterminer l’influence de la géométrie sur les profils de la vitesse, et la position du maximum de la vitesse en fonction de la fréquence et de la phase.

Les résultats montrent, d’une part, que la présence de l’effet annulaire sur les profils de vitesse est proportionnelle a la fréquence et inversement proportionnelle à la phase, et d’autre part que le développement de cet effet se fait pour des valeurs de fréquences plus élevées dans le cas de l’espace annulaire que pour le cas d’un tube.

Concernant les perspectives a donné à ce travail. On propose d’étudier l’écoulement en bidimensionnel en utilisant la méthode des directions alternées (ADI), afin de s’approcher plus à la réalité et mieux valider l’expression de température développée dans cette étude. Ou bien faire un montage expérimental optimisé qui permet de déterminer le champ thermique, et pour cela on recommande d’utiliser l’Anémométrie Laser à effet Doppler (ALD) qui à l’avantage de mesurer la température du fluide sans perturber l’écoulement.

##### References

1. E. Richardson, E. Tyler, and I. N. Sneddon, “The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established,” Proc. Phys. Soc. London.42, pp.1\_15 (1929).
2. J. R. Wommersley. Method for the calculation of velocity, rate of the flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. J.Physiol,127, pp.553\_563 (1955).
3. S. Uchida, “The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of an incompressible fluid in a circular pipe.’’ZAMP **7**, pp. 403\_422 (1956).
4. H. B. Atabek and C. Chang. Oscillatory Flow Near the Entry of Circular tube. ZAMP Vol. 12, pp. 185\_201 (1961).
5. T. Zhao and P.Cheng,A numerical study of a hydrodynamically developing laminar oscillatory and reversing flow in a pipe.





Figures 5. Le profil radial de la vitesse adimensionnel pour Re=1.



Figures 6. Le profil radial de la vitesse adimensionnel pour Re=100.





Figures 7. Le profil radial de la vitesse adimensionnel pour

Re=900.

Figures 8. Le profil radial de la température adimensionnel pour Remax=30, Pr=0.7, x\*=1.5.

Figures 9. Le profil radial de la température adimensionnel pour =30, Remax=300, Pr=0.7, =0.5, x\*=1.5.

Figures 10. Le profil radial de la température adimensionnel pour Remax=850, Pr=0.7, x\*=1.5.