FRACTIONS RATIONNELLES
Applications de la factorisation.

Définition

Une fraction rationnelle (ou algébrique) est une fraction dont les deux termes sont des polynômes.

Exemples : $\frac{2x^2 + 4x - 5}{x + 3}$; $\frac{a + b}{c - d}$; $\frac{3x + 1}{x - 2}$

Pour énoncer les conditions d'existence d'une fraction rationnelle

Puisqu'il est impossible de diviser par 0, une fraction algébrique n'existe que si son **dénominateur** est **non nul**.

Soit la fraction $\frac{3x^2+2}{x^2-9}$.

Pour que $\frac{3x^2+2}{x^2-9}$ existe, il faut que $x^2 - 9 \neq 0$

Trouver les valeurs de x pour lesquelles ce polynôme serait nul revient à résoudre l'équation $x^2 - 9 = 0$. Comme il s'agit d'une équation d'un degré supérieur à 1, on rassemble tous les termes dans le premier membre, on le factorise (si cela est possible) et on applique la règle du produit nul.

$x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x+3)=0$

$x-3=0 \qquad x+3=0$

$x=3 \qquad x=-3$

Les réels à écarter sont 3 et -3

On écrit : CE : $x \neq -3 et 3$

<u>Pour simplifier une fraction rationnelle</u>

Simplifier une fraction, c'est diviser ses deux termes par leurs facteurs communs (supposés non nuls).

- Pour simplifier la fraction $\frac{72}{60}$,

1) je factorise les deux termes,	$\frac{72}{60}=\frac{2^3\cdot 3^2}{2^2\cdot 3\cdot 5}$
2) je recherche leurs facteurs communs,	P.G.C.D. de 72 et 60 = $2^2 \cdot 3 = 12$
3) je divise les deux termes par leur PGCD.	$\frac{\cancel{2^3}\cdot\cancel{3^2}}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3}\cdot 5}=\frac{2\cdot 3}{5}=\frac{6}{5}$

Attention !!!

$\frac{2+5}{4}$ ne se simplifie pas parce que le numérateur n'est pas écrit sous la forme de produit.

- Pour simplifier une fraction algébrique, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.

  Pour simplifier la fraction $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$,

1) je factorise les deux termes,	$\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}=\frac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)^2}$
2) j'énonce les conditions d'existence,	$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ CE : $x \neq 5$
3) je "supprime" les facteurs communs; ce qui revient à diviser les deux termes par leur PGCD.	$\frac{(x+5)\cdot\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{x+5}{x-5}$

❖ Donne les conditions d'existence et simplifie les fractions suivantes :

1) $\frac{6x^3+18x^2}{2x^3-18x} = \frac{6x^2(x+3)}{2x(x^2-9)} = \frac{6x^2(x+3)}{2x(x-3)(x+3)}$ CE $x \neq 0; x \neq 3; x \neq -3$ $= \frac{3x}{x-3}$	2) $\frac{x^2-16}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x+4} = x-4$ $CE : x \neq -4$
3) $\frac{2a^2-2b^2}{3b+3a} = \frac{2(a^2-b^2)}{3(a+b)} = \frac{2(a+b)(a-b)}{3(a+b)} = \frac{2(a-b)}{3}$ $CE : a \neq -b$	4) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}$ $CE : x \neq 3$
5) $\frac{5a-5b}{ab-b^2} = \frac{5(a-b)}{b(a-b)} = \frac{5}{b}$ $CE : b \neq 0 et a \neq b$	6) $\frac{3a+3}{1-a^2} = \frac{3(a+1)}{-(a^2-1)} = \frac{3(a+1)}{-(a+1)(a-1)} = \frac{-3}{a-1}$ $\frac{3}{1-a}$ CE $a \neq 1 et de -1$
7) $\frac{6b-9a}{4b^2-9a^2} = \frac{3(2b-3a)}{(2b+3a)(2b-3a)} = \frac{3}{2b+3a}$	8) $\frac{x^2-25}{2x^2-10x} = \frac{(x+5)(x-5)}{2x(x-5)} = \frac{x+5}{2x}$ CE $x \neq 5 et de 0$

9) $\frac{x^2-9}{15x-5x^2}=\frac{(x-3)(x+3)}{5x(3-x)}=\frac{(x-3)(x+3)}{-5x(x-3)}=\frac{-(x+3)}{5x}$ CE $x \neq 0 et de 3$	10) $\frac{2x+14}{x^2+14x+49}=\frac{2(x+7)}{(x+7)^2}=\frac{2}{x+7}$ $x \neq -7$
11) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8}=\frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)}=\frac{x+3}{x+4}$ HORNER CE $x \neq -2 et de -4$	12) $\frac{x+2}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{x+2}{x^2(x+2)-(x+2)}=\frac{x+2}{(x+2)(x^2-1)}$ $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$ CE $x \neq -2 et de -1 et 1$

1. Addition et soustraction de fractions rationnelles

Rappel : Pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut qu'elles aient obligatoirement le même…………………………

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$	$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$

- Pour calculer $\frac{6}{9}+\frac{4}{5}$,

1) je simplifie chaque fraction, $\frac{6}{9}+\frac{4}{5}=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$
2) je cherche un dénominateur commun, P.P.C.M. de 3 et 5 = 15
3) je réduis les fractions au même dénominateur, $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+4\cdot 3}{15}=\frac{10+12}{15}$
4) j'additionne (ou je soustrais) les numérateurs en conservant le dénominateur commun et je simplifie, si possible, la fraction obtenue. $\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$

- Pour additionner ou soustraire deux fractions algébriques, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.

Pour effectuer $\dfrac{3x+6}{3x+15}+\dfrac{3}{x+4}$,

1) je factorise, si possible, les numérateurs et dénominateurs,

$$\frac{3x+6}{3x+15}+\frac{3}{x+4} = \frac{3(x+2)}{3(x+5)}+\frac{3}{x+4}$$

2) j'énonce les conditions d'existence,

$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$
$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

CE : $x \neq -5$ et $x \neq -4$

3) je simplifie (si possible),

$$\frac{\cancel{3}(x+2)}{\cancel{3}(x+5)}+\frac{3}{x+4}=\frac{x+2}{x+5}+\frac{3}{x+4}$$

4) je cherche un dénominateur commun,

P.P.C.M. de (x + 5) et (x + 4) = $(x+5)\cdot(x+4)$

5) je réduis les fractions au même dénominateur,

$$\frac{x+2}{x+5}+\frac{3}{x+4}=\frac{(x+2)\cdot(x+4)+3\cdot(x+5)}{(x+5)\cdot(x+4)}$$

6) j'effectue les opérations au numérateur en conservant le dénominateur commun et je simplifie, si possible, la fraction obtenue.

$$\frac{x^2+4x+2x+8+3x+15}{(x+5)\cdot(x+4)}=\frac{x^2+9x+23}{(x+5)\cdot(x+4)}$$

A toi ! Effectue :

1) $\dfrac{2x^2}{x^2-1}-\dfrac{2x^2}{x^2+x}=\dfrac{2x^2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2x^2}{x(x+1)}$

$$\frac{2x^3-2x^2(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{2x^3-2x^3+2x^2}{DC}=\frac{2x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

CE x différent de 0 de1 et-1

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

2) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}=\dfrac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}$

$$\frac{a^2-ab+ab+b^2}{DC}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}$$

3) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{[(a+b)+(a-b)).[(a+b)-(a-b)}{DC}$

$$\frac{2a+2b}{Dc}=\frac{2(a+b)}{(a-b).(a+b)}=\frac{2}{a-b}$$

4) $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{6}{3-x}$

$=\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{6}{x-3}$

$=\dfrac{9}{x-3}$

CE x différent de 3

5) $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}$ $=\frac{a^2-b^2}{a-b}$ $\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}$ $a+b$	6) $\frac{a}{a-b}-\frac{ab}{a^2-b^2}=$ $\frac{a}{a-b}-\frac{ab}{(a+b)(a-b)}$ $\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{ab}{(a-b)(a+b)}$ $\frac{a^2+ab-ab}{DC}$ $\frac{a^2}{(a+b)(a-b)}$
7) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x^2+8}{x^2-4}=$ $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x^2+8}{(x+2)(x-2)}$ $\frac{(x-1)(x-2)-(x^2+8)}{(x+2)(x-2)}$ $\frac{x^2-2x-x+2-x^2-8}{(x+2)(x-2)}$ **(x+2) ; (x+2) ;(x-** $\frac{-3x-6}{(x+2)(x-2)}$ $\frac{-3(x+2)}{(x+2)(x-2)}$ $\frac{-3}{x-2}$ **2)** **CE différent de 2 et de -2**	8) $\frac{4x}{2x+1}+\frac{12x^2+1}{1-4x^2}=$ $\frac{4x}{2x+1}+\frac{12x^2+1}{(1-2x)(1+2x)}$ $\frac{4x(1-2x)+12x^2+1}{(1+2x)(1-2x)}$ $\frac{4x-8x^2+12x^2+1}{DC}$ $\frac{4x^2+4x+1}{DC}$ $\frac{(2x+1)^2}{(2x+1)(1-2x)}$ $\frac{2x+1}{1-2x}$ $CE: x\neq\frac{-1}{2} et x\neq\frac{1}{2}$

9) $\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2+xy}=\frac{1}{(x+y)(x-y)}-\frac{1}{x(x+y)}$ $=\frac{x-(x-y)}{x(x+y)(x-y)}=\frac{x-x+y}{DC}=\frac{y}{x(x+y)(x-y)}$	10) $\frac{2x-1}{x^2-10x+25}-\frac{3x}{x^2-5x}=$ $\frac{2x-1}{(x-5)^2}-\frac{3x}{x(x-5)}=$ $\frac{x(2x-1)-3x(x-5)}{x(x-5)^2}$ $\frac{2x^2-x-3x^2+15x}{x(x-5)^2}$ $\frac{-x^2+14x}{DC}$ $\frac{x(14-x)}{x(x-5)^2}$ $\frac{14-x}{(x-5)^2}$

2. Multiplication de fractions rationnelles

Rappel : Pour multiplier deux fractions, elles n'ont pas besoin d'avoir le même ....

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d}$	$a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{1}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{d}$	$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{a\,c}{b}$

- Pour calculer $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{8}$,

  1) je multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, $\quad \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5\cdot 4}{12\cdot 8}$
  2) je simplifie, si possible, la fraction obtenue avant de calculer les produits. $\quad \frac{5\cdot 1}{12\cdot 2}=\frac{5}{24}$

- Pour multiplier deux fractions algébriques, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.

  Pour effectuer $\frac{x^2-4}{3}\cdot\frac{5}{4x+8}$,

  1) je factorise, si possible, les numérateurs et dénominateurs, $\quad \frac{x^2-4}{3}\cdot\frac{5}{4x+8}=\frac{(x+2)(x-2)}{3}\cdot\frac{5}{4(x+2)}$
  2) j'énonce les conditions d'existence, $\quad x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

     CE : $x \neq -2$
  3) je multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux et je simplifie, si possible, la fraction obtenue. $\quad \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)\cdot 5}{3\cdot 4\cdot\cancel{(x+2)}}=\frac{5(x-2)}{12}$

A toi ! Effectue :

1) $\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{a^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b).a^2}{a(a+b)}=a(a-b)$
2) $\frac{a-b}{x}\cdot\frac{3x^2}{2a-2b}=\frac{(a-b).3x^2}{2x(a-b)}=\frac{3x}{2}$
3) $\frac{a+2}{b-4}\cdot\frac{b^2-4b}{4-a^2}=\frac{(a+2).b(b-4)}{(b-4)(2-a)(2+a)}=\frac{b}{2-a}$

4)	$\frac{a^2-4a+4}{a+3}\cdot\frac{a+3}{a^2-4}=\frac{(a-2)^2.(a+3)}{(a+3).(a+2)(a-2)}=\frac{a-2}{a+2}$
5)	$\left(a-\frac{a-2}{3}\right)\cdot\frac{6}{a^2-1}=\left(\frac{3a}{3}-\frac{a-2}{3}\right).\frac{6}{(a+1)(a-1)}=\frac{2(a+1)}{3}.\frac{6}{(a+1)(a-1)}=\frac{4}{a-1}$

3. Division de fractions rationnelles

Rappel : Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la première par l'inverse de la deuxième fraction.

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\,d}{b\,c}$	$a:\frac{c}{d}=a\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\,d}{c}$	$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b\,c}$

- Pour calculer $\frac{7}{11}:\frac{2}{5}$,

  1) je multiplie la première fraction par l'inverse de la seconde, $\frac{7}{11}:\frac{2}{5}=\frac{7}{11}\cdot\frac{5}{2}$

  2) je simplifie, si possible, la fraction obtenue avant de calculer les produits. $\frac{7\cdot5}{11\cdot2}=\frac{35}{22}$

- Pour diviser deux fractions algébriques, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.
  Pour effectuer $\frac{x^2-4}{x}:\frac{5x+10}{3x}$**,**

  1) je factorise, si possible, les numérateurs et dénominateurs, $\frac{x^2-4}{x}:\frac{5x+10}{3x}=\frac{(x+2)(x-2)}{x}:\frac{5(x+2)}{3x}$

  2) j'énonce les conditions d'existence sur le dénominateur des deux fractions ***et sur le*** $x = 0$
     $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

numérateur de la fraction « diviseur »,	CE : $x \neq 0$ et $x \neq -2$
3) je multiplie la première fraction par l'inverse de la seconde,	$\frac{(x+2)(x-2)}{x} : \frac{5(x+2)}{3x} =$ $\frac{(x+2)(x-2)}{x} \cdot \frac{3x}{5(x+2)}$
4) je multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux et je simplifie, si possible, la fraction obtenue.	$\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)\cdot 3\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot 5\cancel{(x+2)}} = \frac{3(x-2)}{5}$

A toi ! Effectue :

1)	$\frac{-3x}{4t} : \frac{9x^2}{16t^2} = \frac{-3x}{4t} . \frac{16t^2}{9x^2} = \frac{-4t}{3x}$ $CEt \neq 0 etx \neq 0$
2)	$\frac{x^2-9}{2x+6} : \frac{x-3}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x+3)} . \frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{2}$ $CEx \neq -3; x \neq 3$
3)	$\frac{x^2-1}{2x+1} : (x-1) = \frac{(x+1)(x-1).1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{2x+1}$ $cE : x \neq 1; x \neq \frac{-1}{2}$

4)	$\frac{ab-5b}{9a^2-6a+1}:\frac{a^2-25}{3a^2-a}=\frac{b(a-5)}{(3a-1)^2}.\frac{a(3a-1)}{(a-5)(a+5)}=\frac{ab}{(3a-1)(a+5)}$ $CE: a\neq\frac{1}{3}; a\neq 5; a\neq -5; a\neq 0$
5)	$\frac{4a^2-28ab+49b^2}{a^2b-ab^2}:\frac{4a^2-49b^2}{4a^2b^3}=\frac{(2a-7b)^2}{ab(a-b)}.\frac{4a^2b^3}{(2a-7b)(2a+7b)}=\frac{4ab^2(2a-7b)}{2a+7b}$

4. Equations fractionnaires

Définition

Une équation fractionnaire est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur.

Résolution

Pour résoudre une équation fractionnaire, il suffit…

- ✓ de déterminer la condition d'existence de chaque fraction,
- ✓ de réduire les deux membres au même dénominateur,
- ✓ de multiplier les deux membres par le dénominateur commun,
- ✓ de résoudre l'équation ainsi obtenue et
- ✓ de **rejeter** les **solutions** qui ne satisfont pas aux conditions d'existences.

Exemple :

Pour résoudre l'équation $\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}$,

1) je factorise, si possible, les dénominateurs,

$$\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{18}{(x+3)(x-3)}$$

2) j'énonce les conditions d'existence,

CE : $x \neq -3$ et $x \neq 3$

3) je cherche un dénominateur commun,

P.P.C.M. de $(x + 3)$, $(x - 3)$ et $(x + 3)(x - 3) = (x+3)\cdot(x-3)$

4) je réduis les fractions au même dénominateur,

$$\frac{x.(x-3)-x.(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{18}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

5) je chasse les dénominateurs en multipliant chaque terme par le dénominateur commun,

$x \,.\, (x - 3) - x \,.\, (x + 3) = 18$

6) je résous l'équation ainsi obtenue,

$x^2 - 3x - x^2 - 3x = 18$

$-6x = 18$

$x = \frac{18}{-6}$

$\cancel{x = -3}$

Cette solution est à rejeter car elle ne satisfait pas aux conditions d'existence.

7) j'écris la solution de l'équation.

$S = \varnothing$

A toi ! Résous les équations suivantes :

1) $\frac{5}{x} = \frac{3}{2}$

$CE x \neq 0$

$3x = 5.2$

$3x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

2) $\frac{x - 3}{x + 2} = \frac{- 3}{5}$

$CE : x \neq -2$

$5(x-3) = -3(x+2)$

$5x - 15 = -3x - 6$

$8x = 9$

$x = \frac{9}{8}$

3) $\frac{2}{x - 3} = \frac{3}{x + 2}$

$CE: x \neq 3; x \neq -2$

$2(x+2) = 3(x-3)$

$2x + 4 = 3x - 9$

$-x = -13$

$x = 13$

4) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x} =$

$\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x(x-2)}$

$CE: x \neq 2; x \neq 0$

$\frac{(x-2)^2 + 4x}{x(x-2)} = \frac{8}{x(x-2)}$

$x^2 - 4x + 4 + 4x = 8$

$x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2) = 0$

Egaler chacun des facteurs à 0

$x + 2 = 0; x - 2 = 0$

$x = -2; x = 2$

2 *est à rejeter*

$S\{-2\}$

5) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+1}$

$\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{x+1}$

$CE: x \neq -2; x \neq -1; x \neq 2$

$\frac{x-2}{x+2} = \frac{x-2}{x+1}$