

# LIMITES, ASYMPTOTES et CONTINUITE :

## Réponses des exercices récapitulatifs

### **Exercice 1 :**

1)  $\text{dom } f_1 = \mathbb{R} \setminus \{0, 7, 35\}$

Le zéro est  $-9$ . La valeur  $7$  est à rejeter.

2)  $\text{dom } f_2 = [-4, 5[ \cup ]5, 11[ \cup ]11, 12]$

Les zéros sont  $-4$  et  $12$ .

3)  $\text{dom } f_3 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Le zéro est  $-\frac{1}{2}$ . La valeur  $-7$  est à rejeter.

4)  $\text{dom } f_4 = \mathbb{R} \setminus \{0, 8, 45\}$

Le zéro est  $-9$ . La valeur  $8$  est à rejeter.

5)  $\text{dom } f_5 = [-16, -13[ \cup ]-13, 4[ \cup ]4, 6]$

Les zéros sont  $-16$  et  $6$ .

6)  $\text{dom } f_6 = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Le zéro est  $-\frac{1}{2}$ . La valeur  $-7$  est à rejeter.

7)  $\text{dom } f_7 = [-20, -10[ \cup ]-10, 45]$

Les zéros sont  $-20$  et  $45$ .

8)  $\text{dom } f_8 = ]-\infty, 2[$

Les zéros sont  $-5$  et  $-4$ . La valeur  $4$  est à rejeter.

9)  $\text{dom } f_9 = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$

Le zéro est  $12$ .

10)  $\text{dom } f_{10} = [-25, 30[ \cup ]30, 40]$

Les zéros sont  $-25$  et  $40$ .

11)  $\text{dom } f_{11} = ]-\infty, -3[$

Les zéros sont  $-5$  et  $-4$ . La valeur  $5$  est à rejeter.

$$12) \operatorname{dom} f_{12} = \left] \frac{5}{4}, +\infty \right[$$

Les valeurs  $-\frac{1}{5}$  et  $-33$  sont à rejeter. Il n'y a pas de zéro.

$$13) \operatorname{dom} f_{13} = \left[ \frac{1}{4}, 5 \right[$$

Les zéros sont  $\frac{1}{4}$  et  $3$ . La valeur  $7$  est à rejeter.

$$14) \operatorname{dom} f_{14} = \left] -6, \frac{1}{3} \right]$$

Les zéros sont  $\frac{1}{3}$  et  $-2$ . La valeur  $-9$  est à rejeter.

## Exercice 2 :

$$1. \quad a) \left( \frac{f}{g} \right)(x) = -x - 6 \text{ et } (f - g)(x) = 2x^2 + 13x - 7$$

$$\operatorname{dom} \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ et } \operatorname{dom} f - g = \mathbb{R}$$

$$b) (f \circ g)(x) = \sqrt{x-1} \text{ et } (g \circ f)(x) = \sqrt{x+2} - 3$$

$$\operatorname{dom} f \circ g = [1, +\infty[ \text{ et } \operatorname{dom} g \circ f = [-2, +\infty[$$

$$2. \quad a) \left( \frac{f}{g} \right)(x) = -x^2 - 26x - 120$$

$$\operatorname{dom} \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -6, -\frac{2}{3}, 6 \right\}$$

$$b) (f \cdot g)(x) = 15x$$

$$\operatorname{dom} f \cdot g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

$$c) (f - g)(x) = x - 1$$

$$\operatorname{dom} f - g = \mathbb{R}_0$$

$$d) (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 9} \text{ et } (g \circ f)(x) = x - 9$$

$$\operatorname{dom} f \circ g = ]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[ \text{ et } \operatorname{dom} g \circ f = [4, +\infty[$$

$$3. \quad a) \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{-3x+5}{4(x-6)} \text{ et } \operatorname{dom} \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}$$

$$b) (g \circ f)(x) = -\frac{64}{x^6} \text{ et } \operatorname{dom} g \circ f = \mathbb{R}_0$$

**Exercise 3 :**

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^{20} + x^{350}}{-x^{100} + 3x^{10}} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \sqrt{-x + 29} - \frac{7}{\sqrt{x}} \right) = \frac{3}{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{41x^{42} - 43x^{44}}{x^{48} + x^{49}} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5 - x} + x^2) = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - \sqrt{x^2 + 3x + 25}}{2x + 6} = -\frac{3}{20}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{12x + 6}{3x + 4}} = 2$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{100}{10x^2 + 50x}} = 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}} = -4$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{25x - 125x^2}{5x^2 + 9x - 2} = -\frac{25}{11}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 1}{24x + 3} = -\frac{1}{3}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -45} \frac{-x^2 + 90x - 1125}{(x + 45)^2} = -\infty$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 20} - \sqrt{x^2 + 4x + 36}}{3x + 12} = -\frac{1}{9}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (8x - \sqrt{64x^2 + 16}) = \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (9x + \sqrt{81x^2 - 27}) = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = 2$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{\sin x} \nexists$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + 3x + 2}{\cos x} \nexists$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{tg} 3x}{\sin 2x} = 6$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 7x}) = +\infty$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 4x + 5}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^4 + 6x^3} - \sqrt{x^4 + x^2}}{x + 1} \right) = 3$$

### **Exercice 4 :**

$$1) f_1(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2}$$

$$\text{dom } f_1 = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Le zéro est 0.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = -4 \Rightarrow AH \equiv y = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f_1(x) = \mp\infty \Rightarrow AV_1 \equiv x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^\pm} f_1(x) = \pm\infty \Rightarrow AV_2 \equiv x = -3$$

$$2) f_2(x) = \frac{5}{(x - 8)^2}$$

$$\text{dom } f_2 = \mathbb{R} \setminus \{8\}$$

Il n'y a pas de zéro.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = 0 \Rightarrow AH \equiv y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^\pm} f_2(x) = +\infty \Rightarrow AV \equiv x = 8$$

$$3) f_3(x) = \frac{x^2 + 11x + 28}{8x - 72}$$

$$\text{dom } f_3 = \mathbb{R} \setminus \{9\}$$

Les zéros sont  $-7$  et  $-4$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_3(x) = \pm\infty \Rightarrow AO \equiv y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^\pm} f_3(x) = \pm\infty \Rightarrow AV \equiv x = 9$$

$$4) f_4(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{dom } f_4 = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

Les zéros sont  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  et  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_4(x) = 3 \Rightarrow AH \equiv y = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f_4(x) = \mp\infty \Rightarrow AV_1 \equiv x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f_4(x) = \pm\infty \Rightarrow AV_2 \equiv x = 3$$

$$5) f_5(x) = \frac{8x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 2x}$$

$$\text{dom } f_5 = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, 0 \right\}$$

Le zéro est  $\frac{1}{4}$ . La valeur  $-\frac{1}{2}$  est à rejeter.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_5(x) = 2 \Rightarrow AH \equiv y = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f_5(x) = 3 \Rightarrow \text{pas d}'AV$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f_5(x) = \mp\infty \Rightarrow AV \equiv x = 0$$

$$6) f_6(x) = \frac{x^3 + 2x}{-x^2 - 3}$$

$$\text{dom } f_6 = \mathbb{R} \Rightarrow \text{pas d}'AV$$

Le zéro est 0.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_6(x) = \mp\infty \Rightarrow AO \equiv y = -x$$

$$7) f_7(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - x - 2}$$

$$\text{dom } f_7 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

Les zéros sont  $-2$ ,  $0$  et  $3$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_7(x) = \pm\infty \Rightarrow AO \equiv y = x$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f_7(x) = \mp\infty \Rightarrow AV_1 \equiv x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f_7(x) = \mp\infty \Rightarrow AV_2 \equiv x = 2$$

$$8) f_8(x) = \frac{-2}{\sqrt{3-x}}$$

$$\text{dom } f_8 = ]-\infty, 3[$$

Il n'y a pas de zéro.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_8(x) = 0 \Rightarrow AH \equiv y = 0 \text{ en } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f_8(x) = -\infty \Rightarrow AV \equiv x = 3 \text{ en } 3^-$$

$$9) f_9(x) = \frac{x+5}{\sqrt{81-x^2}}$$

$$\text{dom } f_9 = ]-9, 9[ \Rightarrow \text{pas d}'AH$$

Le zéro est  $-5$ .

$$\lim_{x \rightarrow -9^+} f_9(x) = -\infty \Rightarrow AV_1 \equiv x = -9 \text{ en } -9^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} f_9(x) = +\infty \Rightarrow AV_2 \equiv x = 9 \text{ en } 9^-$$

$$10) f_{10}(x) = \frac{1-4x}{\sqrt{16x^2-1}}$$

$$\text{dom } f_{10} = \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[ \cup \left] \frac{1}{4}, +\infty \right[$$

Il n'y a pas de zéro. La valeur  $\frac{1}{4}$  est à rejeter.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{10}(x) = -1 \Rightarrow AH_1 \equiv y = -1 \text{ en } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{10}(x) = 1 \Rightarrow AH_2 \equiv y = 1 \text{ en } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}^-} f_{10}(x) = +\infty \Rightarrow AV \equiv x = -\frac{1}{4} \text{ en } -\frac{1}{4}^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} f_{10}(x) = 0 \Rightarrow \text{pas d}'AV$$

$$11) f_{11}(x) = \sqrt{9x^2 - 25}$$

$$\text{dom } f_{11} = \left] -\infty, -\frac{5}{3} \right] \cup \left[ \frac{5}{3}, +\infty \right[ \Rightarrow \text{pas d}'AV$$

Les zéros sont  $-\frac{5}{3}$  et  $\frac{5}{3}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{11}(x) = +\infty \Rightarrow AO_1 \equiv y = 3x \text{ en } +\infty \text{ et } AO_2 \equiv y = -3x \text{ en } -\infty$$

$$12) f_{12}(x) = \frac{x-7}{\sqrt{x^2-8x+12}}$$

$$\text{dom } f_{12} = \left] -\infty, 2 \right[ \cup \left] 6, +\infty \right[$$

Le zéro est 7.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{12}(x) = 1 \Rightarrow AH_1 \equiv y = 1 \text{ en } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{12}(x) = -1 \Rightarrow AH_2 \equiv y = -1 \text{ en } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_{12}(x) = -\infty \Rightarrow AV_1 \equiv x = 2 \text{ en } 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f_{12}(x) = -\infty \Rightarrow AV_2 \equiv x = 6 \text{ en } 6^+$$