FRACTIONS RATIONNELLES
Applications de la factorisation.

Définition

Une fraction rationnelle (ou algébrique) est une fraction dont les deux termes sont des polynômes.

Exemples : $\frac{2x^2 + 4x - 5}{x + 3}$; $\frac{a + b}{c - d}$; $\frac{3x + 1}{x - 2}$

Pour énoncer les conditions d'existence d'une fraction rationnelle

Puisqu'il est impossible de diviser par 0, une fraction algébrique n'existe que si son **dénominateur** est **non nul**.

Soit la fraction $\frac{3x^2+2}{x^2-9}$.

Pour que $\frac{3x^2+2}{x^2-9}$ existe, il faut que $x^2 - 9 \neq 0$

Trouver les valeurs de x pour lesquelles ce polynôme serait nul revient à résoudre l'équation $x^2 - 9 = 0$. Comme il s'agit d'une équation d'un degré supérieur à 1, on rassemble tous les termes dans le premier membre, on le factorise (si cela est possible) et on applique la règle du produit nul.

$x^2 - 9 = 0$ $\Leftrightarrow$ ………………………………………………………….

………………………………………………………….

………………………………………………………….

Les réels à écarter sont ………………………………….

On écrit : ………………………………….

Pour simplifier une fraction rationnelle

Simplifier une fraction, c'est diviser ses deux termes par leurs facteurs communs (supposés non nuls).

- Pour simplifier la fraction $\frac{72}{60}$,

1) je factorise les deux termes, $\frac{72}{60} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$

2) je recherche leurs facteurs communs, P.G.C.D. de 72 et 60 = $2^2 . 3 = 12$

3) je divise les deux termes par leur PGCD. $\frac{\cancel{2^3}\cdot\cancel{3^2}}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3}\cdot 5} = \frac{2\cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$

Attention !!!

$\frac{2+5}{4}$ ne se simplifie pas parce que le numérateur n'est pas écrit sous la forme de produit.

- Pour simplifier une fraction algébrique, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.

Pour simplifier la fraction $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$,

1) je factorise les deux termes, $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25} = \frac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)^2}$

2) j'énonce les conditions d'existence, $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ CE : $x \neq 5$

3) je "supprime" les facteurs communs; ce qui revient à diviser les deux termes par leur PGCD. $\frac{(x+5)\cdot\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}} = \frac{x+5}{x-5}$

❖ Donne les conditions d'existence et simplifie les fractions suivantes :

1) $\frac{6x^3+18x^2}{2x^3-18x} =$	2) $\frac{x^2-16}{x+4} =$
3) $\frac{2a^2-2b^2}{3b+3a} =$	4) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} =$
5) $\frac{5a-5b}{ab-b^2} =$	6) $\frac{3a+3}{1-a^2} =$
7) $\frac{6b-9a}{4b^2-9a^2} =$	8) $\frac{x^2-25}{2x^2-10x} =$
9) $\frac{x^2-9}{15x-5x^2} =$	10) $\frac{2x+14}{x^2+14x+49} =$
11) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8} =$	12) $\frac{x+2}{x^3+2x^2-x-2} =$

1. Addition et soustraction de fractions rationnelles

Rappel : Pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut qu'elles aient obligatoirement le même…………………………

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$	$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$

- Pour calculer $\frac{6}{9}+\frac{4}{5}$,

1) je simplifie chaque fraction,	$\frac{6}{9}+\frac{4}{5}=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$
2) je cherche un dénominateur commun,	P.P.C.M. de 3 et 5 = 15
3) je réduis les fractions au même dénominateur,	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+4\cdot 3}{15}=\frac{10+12}{15}$
4) j'additionne (ou je soustrais) les numérateurs en conservant le dénominateur commun et je simplifie, si possible, la fraction obtenue.	$\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$

- Pour additionner ou soustraire deux fractions algébriques, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.
  Pour effectuer $\frac{3x+6}{3x+15}+\frac{3}{x+4}$,

1) je factorise, si possible, les numérateurs et dénominateurs,	$\frac{3x+6}{3x+15}+\frac{3}{x+4}=\frac{3(x+2)}{3(x+5)}+\frac{3}{x+4}$
2) j'énonce les conditions d'existence,	$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$ $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ CE : $x\neq -5$ et $x\neq -4$
3) je simplifie (si possible),	$\frac{\cancel{3}(x+2)}{\cancel{3}(x+5)}+\frac{3}{x+4}=\frac{x+2}{x+5}+\frac{3}{x+4}$
4) je cherche un dénominateur commun,	P.P.C.M. de (x + 5) et (x + 4) = $(x+5)\cdot(x+4)$
5) je réduis les fractions au même dénominateur,	$\frac{x+2}{x+5}+\frac{3}{x+4}=\frac{(x+2)\cdot(x+4)+3\cdot(x+5)}{(x+5)\cdot(x+4)}$

6) j'effectue les opérations au numérateur en conservant le dénominateur commun et je simplifie, si possible, la fraction obtenue.	$\dfrac{x^2+4x+2x+8+3x+15}{(x+5)\cdot(x+4)}=\dfrac{x^2+9x+23}{(x+5)\cdot(x+4)}$

A toi ! Effectue :

1) $\dfrac{2x^2}{x^2-1}-\dfrac{2x^2}{x^2+x}=$	2) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}=$
3) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}=$	4) $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{6}{3-x}=$
5) $\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-a}=$	6) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}=$
7) $\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x^2+8}{x^2-4}=$	8) $\dfrac{4x}{2x+1}+\dfrac{12x^2+1}{1-4x^2}=$
9) $\dfrac{1}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x^2+xy}=$	10) $\dfrac{2x-1}{x^2-10x+25}-\dfrac{3x}{x^2-5x}=$

2. Multiplication de fractions rationnelles

Rappel : Pour multiplier deux fractions, elles n'ont pas besoin d'avoir le même ....

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d}$	$a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{1}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{d}$	$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{a\,c}{b}$

- Pour calculer $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{8}$,

  1) je multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux,
  $$\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5\cdot 4}{12\cdot 8}$$
  2) je simplifie, si possible, la fraction obtenue avant de calculer les produits.
  $$\frac{5\cdot 1}{12\cdot 2}=\frac{5}{24}$$

- Pour multiplier deux fractions algébriques, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.
  Pour effectuer $\frac{x^2-4}{3}\cdot\frac{5}{4x+8}$,

  1) je factorise, si possible, les numérateurs et dénominateurs,
  $$\frac{x^2-4}{3}\cdot\frac{5}{4x+8}=\frac{(x+2)(x-2)}{3}\cdot\frac{5}{4(x+2)}$$
  2) j'énonce les conditions d'existence,
  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

  CE : $x \neq -2$
  3) je multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux et je simplifie, si possible, la fraction obtenue.
  $$\frac{(\cancel{x+2})(x-2)\cdot 5}{3\cdot 4\cdot(\cancel{x+2})}=\frac{5(x-2)}{12}$$

A toi ! Effectue :

1)	$\frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{a^2}{a + b} =$
2)	$\frac{a - b}{x} \cdot \frac{3x^2}{2a - 2b} =$
3)	$\frac{a + 2}{b - 4} \cdot \frac{b^2 - 4b}{4 - a^2} =$
4)	$\frac{a^2 - 4a + 4}{a + 3} \cdot \frac{a + 3}{a^2 - 4} =$
5)	$\left(a - \frac{a - 2}{3}\right) \cdot \frac{6}{a^2 - 1} =$

3. Division de fractions rationnelles

Rappel : Pour diviser une fraction par une fraction, on …………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\,d}{b\,c}$	$a:\frac{c}{d}=a\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\,d}{c}$	$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b\,c}$

- Pour calculer $\frac{7}{11}:\frac{2}{5}$,

  1) je multiplie la première fraction par l'inverse de la seconde, $\qquad \frac{7}{11}:\frac{2}{5}=\frac{7}{11}\cdot\frac{5}{2}$

  2) je simplifie, si possible, la fraction obtenue avant de calculer les produits. $\qquad \frac{7\cdot 5}{11\cdot 2}=\frac{35}{22}$

- Pour diviser deux fractions algébriques, on procède de la même façon sans oublier les éventuelles conditions d'existence.

  Pour effectuer $\frac{x^2-4}{x}:\frac{5x+10}{3x}$,

  1) je factorise, si possible, les numérateurs et dénominateurs,

  $$\frac{x^2-4}{x}:\frac{5x+10}{3x}=\frac{(x+2)(x-2)}{x}:\frac{5(x+2)}{3x}$$

  2) j'énonce les conditions d'existence sur le dénominateur des deux fractions ***et sur le numérateur de la fraction « diviseur »,***

  $x = 0$

  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

  CE : $x \neq 0$ et $x \neq -2$

  3) je multiplie la première fraction par l'inverse de la seconde,

  $$\frac{(x+2)(x-2)}{x}:\frac{5(x+2)}{3x}=$$
  $$\frac{(x+2)(x-2)}{x}\cdot\frac{3x}{5(x+2)}$$

  4) je multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux et je simplifie, si possible, la fraction obtenue.

  $$\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)\cdot 3\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot 5\cancel{(x+2)}}=\frac{3(x-2)}{5}$$

A toi ! Effectue :

1)	$\frac{-3x}{4t} : \frac{9x^2}{16t^2} =$
2)	$\frac{x^2-9}{2x+6} : \frac{x-3}{x+3} =$
3)	$\frac{x^2-1}{2x+1} : (x-1) =$
4)	$\frac{ab-5b}{9a^2-6a+1} : \frac{a^2-25}{3a^2-a} =$
5)	$\frac{4a^2-28ab+49b^2}{a^2b-ab^2} : \frac{4a^2-49b^2}{4a^2b^3} =$

4. Equations fractionnaires

Définition

Une équation fractionnaire est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur.

Résolution

Pour résoudre une équation fractionnaire, il suffit…

- ✓ de déterminer la condition d'existence de chaque fraction,
- ✓ de réduire les deux membres au même dénominateur,
- ✓ de multiplier les deux membres par le dénominateur commun,
- ✓ de résoudre l'équation ainsi obtenue et
- ✓ de **rejeter** les **solutions** qui ne satisfont pas aux conditions d'existences.

Exemple :

Pour résoudre l'équation $\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$,

1) je factorise, si possible, les dénominateurs,

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{18}{(x+3)(x-3)}$$

2) j'énonce les conditions d'existence,

CE : $x \neq -3$ et $x \neq 3$

3) je cherche un dénominateur commun,

P.P.C.M. de (x + 3), (x – 3) et (x + 3)(x – 3) = $(x+3)\cdot(x-3)$

4) je réduis les fractions au même dénominateur,

$$\frac{x.(x-3) - x.(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{18}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

5) je chasse les dénominateurs en multipliant chaque terme par le dénominateur commun,

$x \,.\, (x - 3) - x \,.\, (x + 3) = 18$

6) je résous l'équation ainsi obtenue,

$x^2 - 3x - x^2 - 3x = 18$

$-6x = 18$

$x = \frac{18}{-6}$

$\cancel{x = -3}$

Cette solution est à rejeter car elle ne satisfait pas aux conditions d'existence.

7) j'écris la solution de l'équation.

$S = \varnothing$

A toi ! Résous les équations suivantes :

1) $\frac{5}{x} = \frac{3}{2}$

2) $\frac{x - 3}{x + 2} = \frac{-3}{5}$

3) $\frac{2}{x - 3} = \frac{3}{x + 2}$

4) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x} =$

5) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+1}$