

Travaux Dirigés n6

2 mai 2020

Epreuve de mathématiques

Situation d'évaluation

Texte : Les Elections Communales 2020 aux Bénin

Au Bénin, les prochaines élections communales se tiendront le dimanche 17 mai 2020, a annoncé mercredi le conseil des ministres. C'est le code électoral modifié et promulgué le 15 novembre qui va regir le scrutin et, attention, l'introduction du système de parrainages oblige à gagner au moins 16 villes. Les Conseillers communaux qui seront élus, ce sont eux qui choisiront les 77 Maires.

Par ailleurs, la Commission Electorale Nationale Autonome (CENA), institution chargée d'organiser les élections aux Bénin a dévoilé, il y a environ deux semaines la liste définitive des partis politiques prendront à ces élections communales parmi lesquels figurent le Bloc Républicain (BR), l'Union Progressiste (UP) et la Force Cauris pour un Bénin Emergent (FCBE). C'est ainsi pour élire leur conseiller d'arrondissement, les habitants de Kokohoue, un arrondissement de la commune de Djakotomey ont à choisir parmi trois candidats X, Y et Z respectivement de **BR**, **UP** et **FCBE**.

On suppose que ces élections auront lieu le 17 mai 2020 là malgré la propagation de la pandémie du COVID-19 et qu'un électeur qui veut voter, vote une et une seule fois pour un seul candidat et pas de vote nul (bulletin nul).

Et à la fin du vote, on aurait constaté que 60% des habitants de Kokohoue ont effectivement voté. Gildas, un habitant dudit arrondissement, élève de la classe de Tle scientifique et passionné par les probabilités veut savoir d'avance si leur conseiller d'arrondissement proviendra du Bloc Républicain (BR).

Tâche : Tu es invité à jouer le rôle de Gildas en résolvant chacun des problèmes suivants :

Problème I

On suppose que la probabilité pour qu'un électeur choisisse le candidat X est égale à $\frac{3}{8}$, celle de Y est égale à $\frac{1}{2}$ et celle de Z est égale à $\frac{1}{8}$, et ceci est indépendamment des autres lecteurs.

1. On prend au hasard et successivement 5 habitants de Kokohoue.
Quelle est la probabilité pour que ces 5 habitants aient effectivement voté ?
2. Calculer la probabilité pour qu'un candidat quelconque dudit arrondissement choisisse le Candidat Y ?
3. On prend au hasard 5 habitants de Kokohoue et on note R la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par le candidat Y.
- Déterminer la loi de probabilité de R.
- Calculer son espérance mathématique $E(R)$ et sa variance $V(R)$.
4. Calculer la probabilité pour qu'un habitant choisisse le candidat Z
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que parmi les n habitants qui votent, aucun ne choisisse le candidat Z.
Calculer P_n .
6. Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que le candidat Z obtienne au moins une voix avec la probabilité supérieure ou égale à $\frac{15}{16}$?
7. Prononcez-vous alors sur la provenance du nouveau **Chef d'Arrondissement** de Kokohoue en répondant à la préoccupation de Gildas.

Problème II

Dans cette partie , on s'intéresse aux différents itinéraires émanant chaque électeur de sa contrée au point de vote.

Dans tout ce qui suit m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

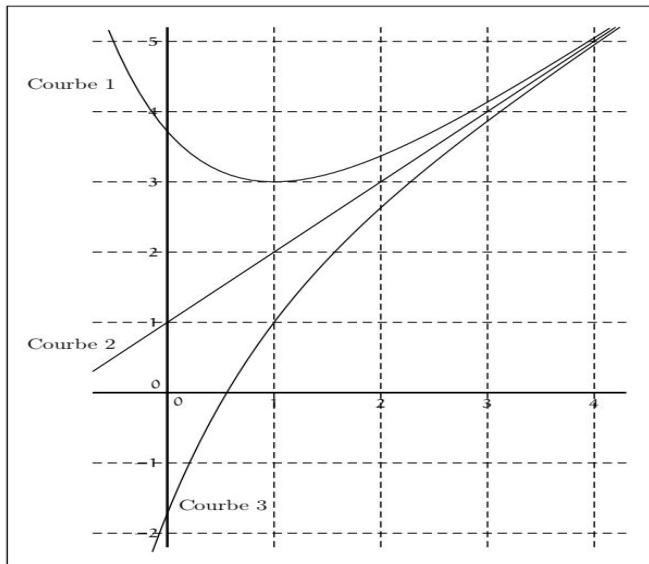
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = (x+1)e^x$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x+2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par $g_m(x) = x+1 - me^{-x}$, et on note $(\mathcal{C}_m)$ la courbe de la fonction g_m dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. (a) Démontrer que l'équation $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
(b) Déduire de la **Partie A**, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_m)$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
2. L'annexe 2 représente les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_{-e}$ obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs $0, e, -e$.



-Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant .

3. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C}_m)$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .
4. (a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
Hachurer D_2 sur l'annexe 2.
(b) Dans cette question, α désigne un réel positif, D_α la partie du plan comprise entre l'axe des ordonnées, la droite (Δ_α) d'équation $x = \alpha$ et les courbes $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$

On désigne l'aire de cette partie du plan ,exprimée en unité d'aire par $\mathcal{A}(\alpha)$

Démontre que pour tout réel α positif : $\mathcal{A}(\alpha)$

$$= 2e - 2e^{1-\alpha}$$

En déduire la limite quand α tend vers $+\infty$ de $\mathcal{A}(\alpha)$

Problème III

Dans cette partie ,on s'intéresse à l'emplacement de chaque bureau de vote dans ledit arrondissement.

Dans tout ce qui suit n désigne un nombre réel quelconque.

Désigne par f_n la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f_n(x) = \ln(x^2 - n)$ ($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien)

1. (a) Déterminer suivant les valeurs de n , l'ensemble de définition de f_n et les limites de f_n aux bornes de l'ensemble de définition.
- (b) Etudier la parité de f_n .
- (c) Etudier les variations de f_n .Donner les différents tableaux de variations de f_n selon les valeurs de n
- (d) Donner la nature des branches infinies des courbes représentatives C_n des fonctions f_n lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$
- (e) Tracer dans meme repère orthonormé (unité :2cm) les courbes (C_{-1}) , (C_{-0}) , (C_1) .
Préciser les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.
2. Dans cette question,on pose $n = -\frac{3}{4}$
 - (a) On se propose d'étudier la position de la courbe $(C_{-\frac{3}{4}})$ par rapport à demi-droite (D) dont une équation est $y = x$, pour tout x positif seulement. Pour cela, on considère la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = x - \ln(x^2 + \frac{3}{4})$.
 - Etudier le sens de variation de cette fonction,
 - Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(0)$ et $g(\frac{3}{4})$.
 - En déduire que $g(x)$ est positif et la position de $(C_{-\frac{3}{4}})$ par rapport à (D).
On rappelle que $\ln 2 = 0.69$ et $\ln 3 = 1.03$.
 - (b) Montrer que la fonction $f_{-\frac{3}{4}}$ définie une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un ensemble que l'on précisera.
-Déterminer la fonction réciproque tout en indiquant son ensemble de définition et son sens de variation.
 - (c) Tracer dans meme repère, la représentation graphique de $f_{-\frac{3}{4}}$ pour tout x positif et celle de sa fonction réciproque.
3. Dans cette question,on pose $n = 0$.
 - Calculer l'aire de l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifiant : $\alpha \leq x \leq 1$ et $f_0(x) \leq y \leq 0$, $\alpha \in]0, 1[$
 - Quelle est la limite de cette aire lorsque α tend vers 0 par valeur supérieure?

Joyeuse fête de travail !!!