الدوال الأصلية و حساب التكامل

Fonctions primitives et Calcul intégral

طرائق الإجابة عن مختلف الأسئلة

تاريخ:

يعتقد البعض أن الرومان هم أول من استعملوا علم التكامل و البعض يعتقد أن المصريين كذلك استعملوه. لكن أول من وضع أساسيات هذا العلم هما العالمان نيوتن Newton و ليبنتز Leibniz في القرن السابع عشر الميلادي. أما مفهوم الدوال الأصلية فهو مرتبط أساسا بالتكامل لأن حساب التكامل لدالة متصلة يتطلب معرفة دالة أصلية لها و كذا تحديد دالة أصلية لدالة متصلة يأتي باستعمال التكامل، و يرجع الفضل الكبير للعالم الفرنسي كوشي Cauchy الذي عرف التكامل والدوال الأصلية بشكل جدي لأول مرة في القرن التاسع العشر الميلادي، و قد برهن على المبرهنة الأساسية لحساب التكامل. و اشتغل العالم الألماني رايمان Rieman على أعمال كوشي ليعممها على دوال أخرى، و في القرن العشرين عمم العالم الفرنسي لوبيغ Lebesgue أعمال رايمان.

استعمال:

يستعمل التكامل أساسا في حساب المساحات و الحجوم و خاصة تلك الأشكال الهندسية غير المنتظمة، و التي يصعب حسابها بالطرق المعروفة. فالحساب التكاملي يستعمل مثلا في:

- حساب مساحة مسبح غريب الشكل أو ملعب عملاق لكرة القدم أو بناية شاهقة و ذلك من أجل تحديد الخامات اللازمة لتصميمها و كيفية بناءها و إتمام بناء المنحنيات و المنحدرات المعقدة لتبدو هذه الأشكال في النهاية غاية في الروعة و الإبداع.
- تحديد مركز كتلة سيارة معينة و ثقلها و محورها المركزي لتحديد عوامل الأمن و السلامة على مختلف الطرق.
- تصميم الأشكال ثلاثية الأبعاد.
- الفيزياء و الطب و البيولوجيا و الكيمياء و الفلك و غيرها..

أما الدوال الأصلية فهي تستعمل مثلا في الميكانيك عندما نبحث عن معادلة زمنية لقذيفة معينة و في مجالات أخرى، و على العموم فلها أهمية و استعمال بالغين لارتباطها الوثيق بالاشتقاق و التكامل. لحساب مساحة معينة نستعمل التكامل و لحساب التكامل نستعمل الدوال الأصلية.

نظرة:

يُعتمد في تحديد دالة أصلية لدالة متصلة على الاشتقاق بالأساس، لتحديد F دالة أصلية لدالة f على مجال I نحاول كتابة $f(x)$ على شكل $f(x)=F'(x)$ لكل x من I. البحث عن دالة أصلية ليس بالأمر السهل على العموم، لذا يجب التعامل الجيد مع تعبير $f(x)$ حتى الوصول إلى $F'(x)$.

أما في الحساب التكامل فنقتصر على طريقتي الدوال الأصلية و المكاملة بالأجزاء، لذا وجب الاهتمام بشكل حازم بجدول المشتقات و جدول الدوال الأصلية.

نطبق حساب التكامل على حساب مساحة الحيز المحصور بين منحنى دالة و محور الأفاصيل أو مستقيم آخر و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$، و كذلك على حجم مجسّم دوران منحنى دالة حول محور الأفاصيل دورة كاملة على مجال $[a,b]$.

I- الدوال الأصلية

1 . كيف نبين أن دالة F هي دالة أصلية لدالة f على مجال I ؟

طريقة

- نبين أن F قابلة للاشتقاق على I
- نبين أن $F'(x)=f(x)$ لكل x من I
- نستنتج أن F دالة أصلية للدالة f على I.

2 . كيف نبين أن دالة f تقبل دوالا أصلية على مجال I ؟

طريقة

- نبين أن الدالة f متصلة على I
- نستنتج أن الدالة f تقبل دوالا أصلية على المجال I.

3 . كيف نحدد دالة أصلية لدالة f على مجال I ؟

طريقة

- نتأكد أن f تقبل دالة أصلية على I
- إذا كانت الدالة f عبارة عن مشتقة دالة اعتيادية أو مشتقة لمجموع دوال اعتيادية، نحدد مباشرة دالة أصلية للدالة f باستعمال الجدول التالي:

الدالة f معرفة ب $f(x)=$	$D_f =$	F دالة أصلية للدالة f، معرفة ب $F(x)=$	$D_F =$
a ثابتة	IR	ax	IR
x	IR	$\frac{1}{2}x^2$	IR
ax	IR	$\frac{a}{2}x^2$	IR
$ax+b$	IR	$\frac{a}{2}x^2+bx$	IR
$-\frac{1}{x^2}$	IR^*	$\frac{1}{x}$	IR^*
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$	$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$
e^x	IR	e^x	IR
$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$
$x^n;n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{-1\}$	IR^*	$\frac{1}{n+1}x^{n+1};n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{-1\}$	IR^*
$x^r;r\in Q^*\setminus\{-1\}$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1};r\in Q^*\setminus\{-1\}$	$]0,+\infty[$
$\cos x$	IR	$\sin x$	IR
$\sin x$	IR	$-\cos x$	IR

- إذا كانت الدالة f ليست مشتقة دالة اعتيادية، أي عبارة عن مشتقة لمجموع أو لجداء أو لخارج دوال أو مشتقة لجذر من رتبة.
- نستعمل الجدول التالي مع u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على I:

الدالة f معرفة ب $f =$	دالة أصلية للدالة f ، معرفة ب $F =$	الشروط
$u'+v'$	$u+v$	…
$u'v+uv'$	uv	…

$u>0$	$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$u>0$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$v\neq 0$	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\cdots$	e^u	$u'e^u$
$u\neq 0$	$\ln(\lvert u\rvert)$	$\frac{u'}{u}$
$v\neq 0$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{-1\}$ و $u\neq 0$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u'\times u^n$
$r\in Q^*\setminus\{-1\}$ و $u>0$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$u'\times u^r$
$u>0$	$\frac{n}{n+1}\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n+1}$	$u'\sqrt[n]{u}$
$a\neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$a\neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

- نقوم بصياغة الدالة F ثم نبسطها.

مثال

حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I في الحالات التالية :

-1 $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ و $I=IR$

-2 $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$ و $I=]0,+\infty[$

جواب

-1 لدينا الدالة f متصلة على المجال I ، فهي تقبل دالة أصلية على I .

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I .

ليكن x من I .

لدينا : $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}$

إذن $F(x)=\ln(e^x+1)$

-2 لدينا الدالة f متصلة على المجال I ، فهي تقبل دالة أصلية على I .

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I.

ليكن x من I.

لدينا : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}$

إذن $F(x)=\dfrac{1}{3}\times\ln\left(x^3+1\right)$.

4 . كيف نحدد الدوال الأصلية لدالة f على مجال I ؟

طريقة

- نحدد دالة أصلية F للدالة f على I
- نستنتج أن الدوال $F+k$ ، حيث k من IR ، هي الدوال الأصلية للدالة f على I.

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x-6}{(x-1)^2}$

1- حدد a و b من IR بحيث $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ لكل x من $]1,+\infty[$.

2- حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

جواب

1- ليكن x من $]1,+\infty[$.

لدينا $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}=\dfrac{a(x-1)}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$

$$=\frac{a(x-1)+b}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax-a+b}{(x-1)^2}$$

إذن $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}\Leftrightarrow\dfrac{x-6}{(x-1)^2}=\dfrac{ax-a+b}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow x-6=ax-a+b$

$\Leftrightarrow x-6=ax-(a-b)$

$\Leftrightarrow a=1$ و $a-b=6$

$\Leftrightarrow a=1$ و $1-b=6$

$\Leftrightarrow a=1$ و $1-6=b$

$\Leftrightarrow a=1$ و $b=-5$

و منه $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5}{(x-1)^2}$

-2 لتكن F دالة أصلية للدالة f على $]1,+\infty[$

ليكن x من $]1,+\infty[$.

لدينا $f(x)=\dfrac{(x-1)'}{x-1}-\dfrac{5(x-1)'}{(x-1)^2}$

إذن $F(x)=\ln(x-1)+\dfrac{5}{x-1}$

و بالتالي فإن الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1,+\infty[$ هي الدوال F_α المعرفة على

$]1,+\infty[$ بما يلي: $F_\alpha(x)=\ln(x-1)+\dfrac{5}{x-1}+\alpha$ حيث α من IR .

5 . كيف نحدد F الدالة الأصلية الوحيدة لدالة f على مجال I التي

تحقق $F(x_0)=y_0$ ؟

طريقة

- نحدد $F+k$ الصيغة العامة للدوال الأصلية للدالة f على I
- نحدد العدد الحقيقي k باستعمال الشرط البدئي الذي تحققه الدالة الأصلية المراد تحديدها
- نستنتج الدالة الأصلية المطلوبة $F+k$ حيث k هو العدد الحقيقي المحدد سابقا.

II-الحساب التكاملي

1 . كيف نحسب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ ؟

طريقة

- قبل حساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ ، نتأكد أن الدالة f متصلة على المجال $[a,b]$
- لدينا $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$
- نستعمل الخاصيات التالية:
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ملاحظات

- بخصوص F ، يمكن اختيار أي دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$، سنحصل على نفس النتيجة.
- عمليا نستعمل المعقوفات في الحساب كالتالي: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.
- عمليا أكثر: $[-F(x)]_a^b = [F(x)]_b^a$.

مثال

احسب التكاملات التالية : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ و $\int_0^1 e^{-3x}dx$ و $\int_0^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}}dx$ و $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx$

جواب

- لدينا $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)dx = \int_1^e \ln'(x)\ln(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(\ln^2(x)\right)'dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln^2(x)\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln^2(e)-\ln^2(1)) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

- لدينا $\int_0^1 e^{-3x}dx=\int_0^1 -\frac{1}{3}\times\left(-3e^{-3x}\right)dx=-\frac{1}{3}\int_0^1\left(e^{-3x}\right)'dx=-\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^1$

$$=-\frac{1}{3}\left(e^{-3}-e^{0}\right)=-\frac{1}{3}\left(e^{-3}-1\right)$$

- لدينا $\int_0^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_0^4 \frac{3(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}dx=3\int_0^4\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)'dx$

$$=3\left[\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right]_0^4=3\left(\frac{1}{\sqrt{2\times4+1}}-\frac{1}{\sqrt{2\times0+1}}\right)=3\left(\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=3\left(\frac{1}{3}-1\right)=3\times\frac{-2}{3}=-2$$

- لدينا $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx=\int_1^{\sqrt{e}}-\frac{(1-\ln x)'}{1-\ln x}dx$

$$=-\int_1^{\sqrt{e}}\left(\ln\left(1-\ln(x)\right)\right)'dx=-\left[\ln\left(1-\ln(x)\right)\right]_1^{\sqrt{e}}=-\left(\ln\left(1-\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)-\ln\left(1-\ln(1)\right)\right)$$

$$=-\left(\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln(1)\right)=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$$

نذكر أن: $\ln(1)=0$ و $\ln(e)=1$ و $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$ لكل $a>0$.

2 . كيف نحدد إشارة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ ؟

طريقة

- إذا كانت f متصلة و موجبة على $[a,b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)dx\geq0$.
- إذا كانت f متصلة و سالبة على $[a,b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)dx\leq0$.

3 . كيف نؤطر التكامل $\int_a^b f(x)dx$ ؟

طريقة

- إذا كانت f و g و h دوال متصلة و كان $h\leq f\leq g$ على $[a,b]$
- فإن $\int_a^b h(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

4 . كيف نحسب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء؟

طريقة

- نتأكد في البداية أنه ليس من السهل تحديد دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$
- نضع $f(x)=u'(x)v(x)$ لكل x من $[a,b]$
- نستعمل المتساوية التالية: $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$.

مثال

احسب باستعمال المكاملة بالأجزاء التكاملات التالية : $\int_0^1 xe^{-x}dx$ و $\int_1^e (1+\ln x)^2\,dx$ و $\int_0^1 x^2e^x dx$.

جواب

- نضع $\begin{cases} u'(x)=e^{-x} \\ v(x)=x \end{cases}$ حيث u و v دالتان متصلتان و قابلتان للاشتقاق على المجال $[0,1]$

إذن $\begin{cases} u(x)=-e^{-x} \\ v'(x)=1 \end{cases}$

و منه $\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[u(x)v(x)\right]_0^1-\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx$$

$$=-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{e}-\left(e^{-1}-1\right)$$

$$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1$$

$$=1-\frac{2}{e}$$

$$=\frac{e-2}{e}$$

- نضع $\begin{cases} u'(x)=1+\ln x \\ v(x)=1+\ln x \end{cases}$ حيث u و v دالتان متصلتان و قابلتان للاشتقاق على المجال $[1,e]$.

إذن $\begin{cases} u(x) = x\ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

و منه $\int_1^e (1+\ln x)^2\, dx = \left[u(x)v(x)\right]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,dx$

$$= \left[x\ln(x)(1+\ln x)\right]_1^e - \int_1^e x\ln(x)\times\frac{1}{x}\,dx = e\ln(e)(1+\ln e) - \int_1^e \ln(x)\,dx = 2e - \left[x\ln(x)-x\right]_1^e$$

$$= 2e - \left[x\ln(x)-x\right]_1^e = 2e - \left(e\ln(e) - e - \ln(1) + 1\right) = 2e - (e-e+1) = 2e-1$$

- نضع $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ حيث u و v دالتان متصلتان و قابلتان للاشتقاق على المجال $[0,1]$

إذن $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

و منه $\int_0^1 x^2e^x dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx$

$$= e^1 - 2\int_0^1 xe^x dx$$

لنحسب التكامل $\int_0^1 xe^x dx$.

نضع $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ حيث u و v دالتان متصلتان و قابلتان للاشتقاق على المجال $[0,1]$

إذن $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

و منه $\int_0^1 xe^x dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$$= e^1 - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

و بالتالي $\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx$

$$= e-2$$

نذكر أن الدالة $x \to x\ln(x) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \ln(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

و الدالة $x \to e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \to -e^{-x}$ على IR .

5 . كيف نحسب $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى دالة f

و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=a$ و $x=b$ ؟

وحدة قياس المساحة هي: $\mu=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

طريقة

- إذا كانت f متصلة و موجبة على $[a,b]$، فإن $\mathcal{A}=\int_a^b f(x)dx\times\mu$
- إذا كانت f متصلة و سالبة على $[a,b]$، فإن $\mathcal{A}=-\int_a^b f(x)dx\times\mu$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$.

ليكن C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: 1cm).

1- بين أن $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx=1$

2- علما أن $f(x)\geq 0$ لكل x من $[1,e]$، أحسب، ب cm^2، مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى C و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

جواب

1- لدينا $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx=\int_1^e 2\times\frac{1}{x}\times\ln x dx=\int_1^e 2(\ln x)'\ln x dx$

$$=\int_1^e\left((\ln x)^2\right)'dx=\left[(\ln x)^2\right]_1^e=(\ln e)^2-(\ln 1)^2=1$$

2- لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى C و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

إذن $\mathcal{A}=\int_1^e|f(x)|dx\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=\int_1^e\left|3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}\right|dx\,cm^2$

$$=\int_1^e\left(3-\frac{1}{x^2}-\frac{2lnx}{x}\right)dx\,cm^2=\left(\int_1^e\left(3-\frac{1}{x^2}\right)dx-\int_1^e\frac{2lnx}{x}dx\right)cm^2$$

$$= \left(3e+\frac{1}{e}-3-1-1\right)cm^2 = \left(\frac{3e^2+1}{e}-5\right)cm^2 = \left(\frac{3e^2+1-5e}{e}\right)cm^2$$

$$= \left(\left[3x+\frac{1}{x}\right]_1^e - 1\right)cm^2$$

ملاحظات

- f موجبة على $[a,b]$، تعني أن C يوجد فوق محور الأفاصيل على المجال $[a,b]$.
- f سالبة على $[a,b]$، تعني أن C يوجد تحت محور الأفاصيل على المجال $[a,b]$.
- لا ننسى أن نضرب التكامل في وحدة قياس المساحة، و ننتبه للوحدة كم تساوي.

6 . كيف نحسب $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيي دالتين f و g والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ ؟

طريقة

- إذا كانت f و g متصلتين على $[a,b]$ و $f(x) \geq g(x)$ لكل x من $[a,b]$،
  فإن $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)-g(x)dx \times \mu$
- إذا كانت f و g متصلتين على $[a,b]$ و $f(x) \leq g(x)$ لكل x من $[a,b]$،
  فإن $\mathcal{A} = \int_a^b g(x)-f(x)dx \times \mu$

7 . كيف نحسب $\mathcal{V}$ حجم المجسم المولد بدوران منحنى دالة f على محور الأفاصيل دورة كاملة على مجال $[a,b]$ ؟

طريقة

- وحدة قياس الحجوم هي: $\mu = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$
- إذا كانت f متصلة على $[a,b]$، فإن $\mathcal{V} = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx \times \mu$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln x$

ليكن C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: 1cm).

احسب، ب cm^3 ، حجم المجسم المولد بدوران المنحنى C على محور الأفاصيل دورة كاملة على المجال $[1,e]$

جواب

ليكن $\mathcal{V}$ حجم المجسم المولد بدوران المنحنى C على محور الأفاصيل دورة كاملة على المجال $[1,e]$.

إذن
$$\mathcal{V}=\int_1^e \pi\left(f(x)\right)^2 dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$$
$$=\int_1^e \pi(\ln x)^2\,dx\,cm^3$$
$$=\pi\int_1^e(\ln x)^2\,dx\,cm^3$$

لنحسب التكامل $\int_1^e(\ln x)^2\,dx$.

نضع $\begin{cases}u'(x)=\ln x\\ v(x)=\ln x\end{cases}$ حيث u و v دالتان متصلتان و قابلتان للاشتقاق على المجال $[1,e]$.

إذن $\begin{cases}u(x)=xln(x)-x\\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$

و منه
$$\int_1^e(\ln x)^2\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_1^e-\int_1^e u(x)v'(x)\,dx$$
$$=\left[\ln(x)\left(x\ln(x)-x\right)\right]_1^e-\int_1^e\left(x\ln(x)-x\right)\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\ln(e)\left(e\ln(e)-e\right)-\int_1^e\left(\ln(x)-1\right)dx$$
$$=e-e-\left[x\ln(x)-x-x\right]_1^e$$
$$=-\left(e\ln(e)-2e+2\right)$$
$$=-(-e+2)$$
$$=e-2$$

و بالتالي $\mathcal{V}=\pi\int_1^e (lnx)^2 dx\, cm^3$

$$=\pi(e-2)cm^3$$

أخطاء معتادة

خطأ 1: □

عند تحديد دالة أو دوالا أصلية لدالة f، لا يذكر التلميذ اتصال ومجال اتصال الدالة f.

خطأ 2: □

عند تحديد دالة أو دوالا أصلية لدالة f، يخلط التلميذ بين المشتقة والدالة الأصلية.

خطأ 3: □

إذا كانت f دالة معرفة بما يلي $f(x)=u(x)v(x)$، يكتب العديد من التلاميذ أن دالة أصلية ل f هي F بحيث $F(x)=U(x)V(x)$ مع U دالة أصلية للدالة u و V دالة أصلية للدالة v. □

خطأ 4:

في حساب المساحة بالتكامل، ينسى التلميذ ضرب المساحة في وحدة قياس المساحات وهي $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$.

خطأ 5:

في حساب المساحة بالتكامل، لا يأخذ التلميذ بعين الاعتبار القيمة المطلقة لما داخل التكامل، يجب أن يكتب:
$\int_a^b |f(x)|dx\,\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ ثم يدرس إشارة $f(x)$ على $[a,b]$ أو $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\,\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ ثم ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $[a,b]$.

خطأ 6:

في حساب الحجم بالتكامل، ينسى التلميذ ضرب الحجم في وحدة قياس الحجوم وهي $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$.

ردود أفعال

الوضعية	رد الفعل المناسب
1. لحساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$	في هذا الترتيب: - نستعمل دالة أصلية للدالة f من خلال جدول الدوال الأصلية - نستعمل مكاملة بالأجزاء في حالة إذا كانت الدالة الأصلية غير مباشرة
2. لحساب التكامل $\int_a^b P(x)\ln(u(x))dx$ حيث $P(x)$ حدودية	نستعمل مكاملة بالأجزاء باشتقاق الدالة المعرفة ب $\ln(u(x))$
3. لحساب التكامل $\int_a^b P(x)e^{u(x)}dx$ حيث $P(x)$ حدودية	نستعمل مكاملة بالأجزاء باشتقاق الدالة المعرفة ب $P(x)$
4. لحساب مساحة ب cm^2	في هذا الترتيب: - تحديد مساحة الحيز المطلوبة، إذا كان الحيز محصورا بين (C_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ نستعمل التكامل $\int_a^b \|f(x)\|dx$ وإذا كان محصورا بين (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ نستعمل التكامل $\int_a^b \|f(x)-(ax+b)\|dx$ - نضرب هذا التكامل في وحدة قياس المساحات

لابد لنا أن نسلم أنه رغم ظهور الإنسان بميزاته و صفاته النبيلة، ما زال يحمل في هيكل جسمه ختما و طابعا من أصله المتواضع لا ينمحي.

العالم البيولوجي: داروين