## I) Intégrale d'une fonction.

**Définition**

On appelle intégrale de $f$ sur $[a\,;b]$ le nombre réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de $f$ sur I. Il est noté :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Exemple 1**

$Calcul\ de\ l'intégrale \int_2^3 x\,dx$ :

Une primitive de $f(x) = x$ est $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc

$$\int_2^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3$$

$$= \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{4}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

**Remarque**

- L'intégrale d'une fonction f sur [a ;b] est indépendante du choix de la primitive F.
- Le $dx$ ou $dt$ détermine la variable par rapport à laquelle on intégre la fonction : $x$, ou $t$.

**Exemple 2**

$Calcul\ de\ l'intégrale$ :

$$\int_1^3 (x^3 + 2x - 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - x\right]_1^3$$

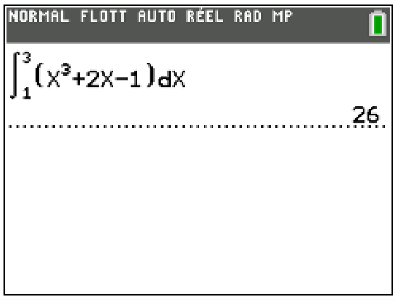
$$= \left(\frac{81}{4} + 9 - 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - 1\right)$$

$$= \frac{81}{4} + 6 - \frac{1}{4}$$

$$= 26$$

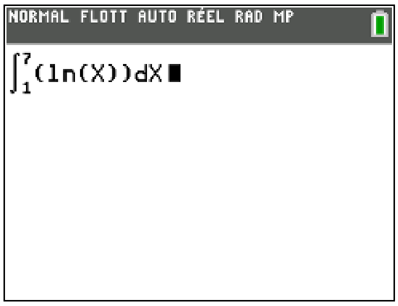
## Exemple de calcul approché d'une intégrale avec la TI83 ET TI82

$$\int_1^3 (x^3 + 2x - 1)dx = 26$$




---

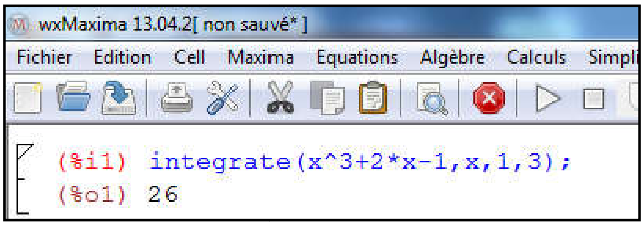
$$\int_1^7 \ln x dx \approx 7,62$$



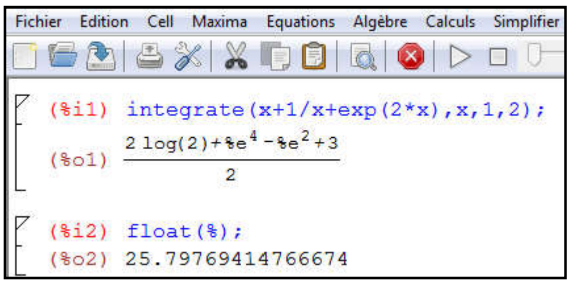

$$\int_2^4 e^x dx \approx 47,2$$


## Exemple de calcul approché d'une intégrale avec le logiciel Maxima.

$$\int_1^3 (x^3 + 2x - 1)dx = 26$$



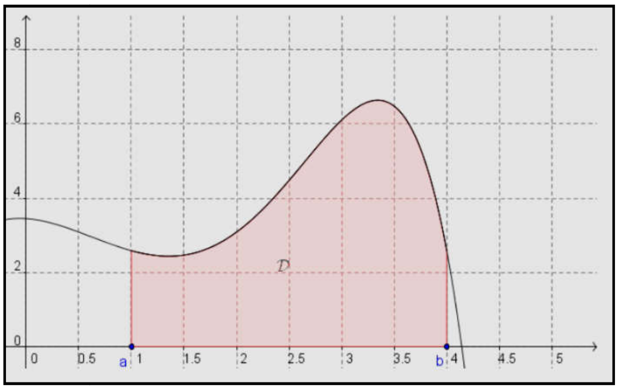

$$\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} + e^{2x}\right) dx \approx 25,8$$



## II) Interprétation graphique : calcul d'aire.

**Propriété**

Si $f$ est une fonction positive sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.




***l'aire du domaine D***:

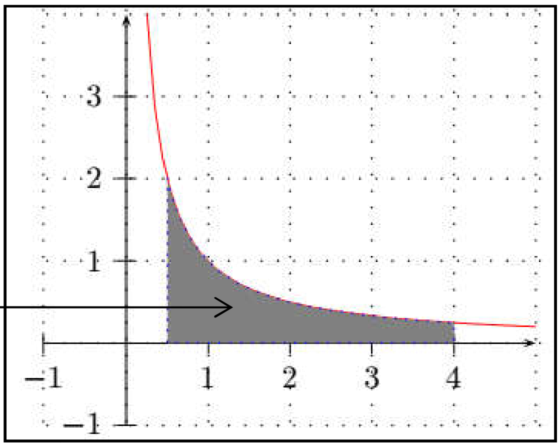
$$\boldsymbol{D = \int_a^b f(x)dx}$$

---

*Exemple : soit* $f(x) = \frac{1}{x}$ *définie sur* $]\frac{1}{2}\,;4\,]$ *et* $C$ *sa courbe représentative*

On note A l'aire du domaine, exprimée en cm², limité par la courbe C, l'axe des abscisses la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ et la droite d'équation $x = 4$

L'aire du domaine A




Calculer A.

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}dx = [lnx]_{\frac{1}{2}}^{4} = ln4 - ln\frac{1}{2} = 2{,}08$$

L'aire du domaine A est de 2,08 cm².

## III) Propriétés de l'intégrale.

### 1) Positivité

Soit $f$ une fonction continue et **positive** sur un intervalle [a ; b].
Alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

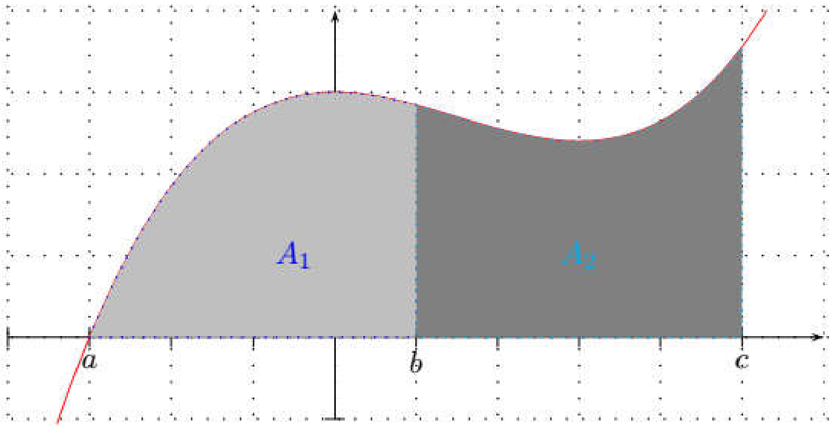
### 2) Relation de Chasles

**Propriété :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $b \in [a\,;c]$, alors

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

**Interprétation graphique**




### 3) Linéarité

**Propriété**

Soient $f, g : [a\,;b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $\lambda$ un nombre réel, alors :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

**Exemple**

$$\boldsymbol{I = \int_1^2 \left(6x + \frac{5}{x}\right) dx}$$

$$\boldsymbol{I = \int_1^2 6x dx + \int_1^2 \frac{5}{x} dx}$$

$$\boldsymbol{I = 3\int_1^2 2x dx + 5\int_1^2 \frac{1}{x} dx}$$

$$\boldsymbol{I = 3[x^2]_1^2 + 5[lnx]_1^2}$$

$$\boldsymbol{I = 3(2^2 - 1^2) + 5(ln2 - ln1)}$$

$$\boldsymbol{I = 3 \times (4 - 1) + 5(ln2 - ln1)}$$

$$\boldsymbol{I = 9 + 5ln2}$$

## 4) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit $f$ une fonction dérivable et positive sur $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative.

On appelle valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[a\,;b]$, le nombre réel :

$$\boldsymbol{V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

**Exemple**

Calculer la valeur moyenne sur [0 ; 1] de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$$V_m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2 dx$$

$$V_m = \frac{1}{1}[\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

## 5) Intégration par partie.

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I. a et b sont deux éléments de I. on a alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

**Exemple**

$$On\ désire\ calculer : I = \int_0^1 xe^x dx$$

On pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = 1 \end{cases}$

$Donc \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= (1e^1 - 0e^0) - [e^x]_0^1$

$= e - e + 1$

$= 1$

## Exercices d'applications

### Exercice 1

En utilisant le tableau des primitives, calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

$a)\ I = \int_2^3 (x-2)dx \qquad b)\ I = \int_0^3 (2x^2 - x + 3)dx \qquad c)\ I = \int_2^3 (x^3 + x^2 + x)dx$

| | | |
|---|---|---|
| $I = \int_2^3 (x-2)dx$<br>$I = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3$<br>$I = \left(\frac{3^2}{2} - 2\times 3\right) - \left(\frac{2^2}{2} - 2\times 2\right)$<br>$I = \frac{9}{2} - 6 - \frac{4}{2} + 4$<br>$I = \frac{1}{2}$ | $I = \int_0^3 (2x^2 - x + 3)dx$<br>$I = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^3$<br>$I = \left(\frac{2\times 3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3\times 3\right) - \left(\frac{2\times 0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 3\times 0\right)$<br>$I = 18 - \frac{9}{2} + 9$<br>$I = 22{,}5$ | $I = \int_2^3 (x^3 + x^2 + x)dx$<br>$I = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_2^3$<br>$I = \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right)$<br>$I = \frac{81}{4} + 9 + \frac{9}{2} + 3 - 4 - \frac{8}{3} - 2 - 2$<br>$I = \frac{313}{12}$ |

## Exercice 2

$$I = \int_2^3 (2x+1)^3 dx$$

Soit $f(x) = (2x+1)^3$ on recherche la primitive

| fonction $f$ | Primitive F |
|---|---|
| $u' \times u^n$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ |

On a donc ici

$u = 2x+1$ on calcule $u' = 2$ $n = 3$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2x+1)^3$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+1)^4}{4}$$

$$F(x) = \frac{(2x+1)^4}{8}$$

$$I = \int_2^3 (2x+1)^3 dx$$

$$I = \left[\frac{(2x+1)^4}{8}\right]_2^3$$

$$I = \left(\frac{(2\times 3+1)^4}{8}\right) - \left(\frac{(2\times 2+1)^4}{8}\right)$$

$$I = \frac{7^4}{8} - \frac{5^4}{8}$$

$$I = 222$$

## Exercice 3

a) $I = \displaystyle\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$ b) $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{2t-1} dt$ c) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+5} dx$

**Exercice 5**

$I = \int_0^1 e^{2t} dt$

**Exercice 6**

On considère une retenue d'eau qui peut être assimilée à un parallélépipède rectangle dont les dimensions en mètres sont $1000 \times 1000 \times 100$. On admet que l'énergie totale, en joules, stockée dans la retenue d'eau est :

$$E = \int_0^{100} (1000 \times 1000 \times 9{,}81 \times h) dh$$

Calculer E.

**Exercice 7**

On étudie dans cet exercice une fonction définie par une intégrale modélisant les probabilités de vitesse du vent dans le cadre d'implantation d'éoliennes. Suite à une étude statistique, on suppose que, sur le site considéré, la probabilité qu'une journée donnée choisie au hasard la vitesse du vent soit inférieure à a mètres par seconde est :

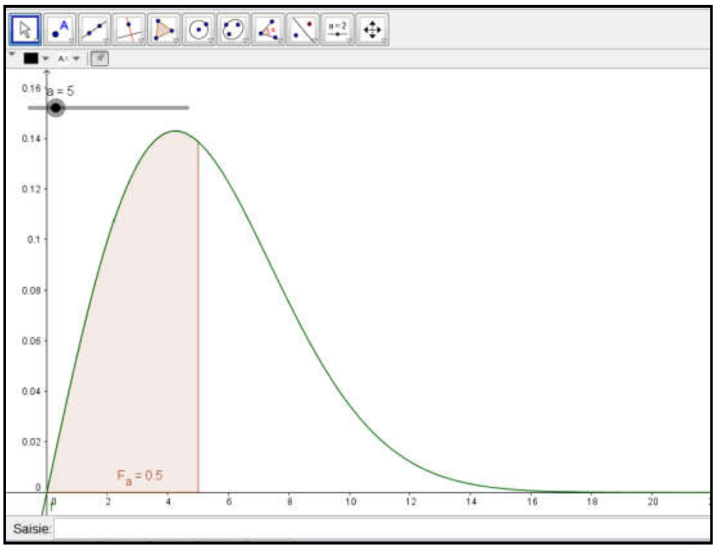
$$F(a) = \int_0^a f(x)dx \text{ où } f \text{ est la fonction définie pour tout nombre réel } x \text{ de l'intervalle} [0; +\infty[ \text{ par:}$$

$$f(x) = \frac{1}{18} x e^{-\frac{x^2}{36}}$$

1) **Utilisation de Geogebra**

Représenter la fonction f à l'aide de GeoGebra. Créer un curseur a allant de 0 à 30 avec un incrément de 0,1 puis représenter l'intégrale F(a)

( on pourra pour cela entrer F_a=Intégrale[f,0,a] dans la barre de saisie)




Utiliser le fichier GeoGebra, pour répondre aux trois questions suivantes :

1) Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 4m/s ? Arrondir à $10^{-3}$
2) Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 14 m/s. Arrondir à $10^{-3}$.
3) Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit comprise entre 4m/s et 14m/s ? Arrondir à $10^{-3}$.

## 2) Utilisation de Maxima

Utiliser un logiciel de calcul formel pour répondre aux trois questions suivantes :

1) Déterminer une expression simple de F(a) en fonction du nombre positif a.
2) Calculer la valeur exacte de F(14)-F(4) et retrouver le résultat de la question 1.b)
3) Calculer :

$$\lim_{a \to \infty} F(a)$$

Le résultat est-il surprenant en terme de probabilité ?

## Intégration par parties

### Exercice 8

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale :

$I = \int_1^e x^2 lnxdx.$

2. Donner une valeur approchée de I arrondie à $10^{-2}$.

### Exercice 9

Justifier, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} lnxdx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} ln2$$

$$\int_{ln2}^{ln3} te^{2t} dt = \frac{1}{4}(18ln3 - 8ln2 - 5)$$

### Exercice 10

a) Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, on a :

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$$

b) En déduire le calcul de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+x} dx$$

c) Soit $f$ la fonction définie pour tout nombre réel $x$ par :

$$f(x) = \ln(1+e^x)$$

- Calculer $f'(x)$
- Calculer à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^x)\, dx$$