السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	نهاية دالة عددية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 :

$$\lim_{x\mapsto 1} 3x^2 - x + 3 = 3 - 1 + 3 = 5$$

$$\lim_{x\mapsto \sqrt{2}} 2x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 = 2\times 2 + \sqrt{2}\times\sqrt{2} + 1 = 7$$

$$\lim_{x\mapsto -1} (x+1)(x^2 + 4x - 3) = 0\times(-6) = 0$$

$$\lim_{x\mapsto 1} \frac{5x+1}{x^2 + 2x} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{1}{x} + 5x = +\infty$$

$$+\infty + 0 \to +\infty$$

تمرين 2 :

$$\lim_{x\mapsto +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} x^3 + 100 = -\infty$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{1}{x^2 + 13} = 0$$

$$\left(\frac{1}{+\infty} \to 0\right)$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{x-1}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\left(\frac{1}{-\infty} \to 0\ ;\ +\infty + 0 \to +\infty\right)$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} 6x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} -3x^7 = +\infty$$

$$(-3\times(-\infty) \to +\infty)$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} 3\sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{5}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} (2x+1)^2 = +\infty \quad (+\infty\times+\infty \to +\infty)$$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x-1} = \lim_{x\mapsto 1} \frac{(x-1)(3x+1)}{x-1} = \lim_{x\mapsto 1} 3x+1 = 4$$

بعد التعويض حصلنا على شكل غير محدد لذلك أجرينا القسمة الإقليدية لـ $3x^2 - 2x - 1$ على $x-1$ فحصلنا على $3x+1$

$$\lim_{x\mapsto -1} \sqrt{2x^2 + 3} = \sqrt{5}$$

$$\lim_{x\mapsto 2} \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

$$\lim_{x\mapsto 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\mapsto 2} \frac{x^2(x-2) + x - 2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\mapsto 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\mapsto 2} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{5}{4}$$

عندما نحص على شكل غير محدد نبحث عن التعميل و قد ننجز قسمة إقليدية من أجل ذلك

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{\left(\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}\right)}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}\right)} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{(4-x)-(4+x)}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\mapsto 0} \frac{4-x-4-x}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}\right)} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{-2x}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}\right)}$$

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{-2}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}} = \frac{-2}{2+2} = \frac{-1}{2}$$

استعملنا المرافق للتخلص من الشكل غير المحدد

$$\lim_{x\mapsto 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1}\sqrt{x}+1=2$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{x}{x\sqrt{x}}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\mapsto -3}\frac{3x+1}{(x+2)^2}=\frac{-9+1}{(-1)^2}=-8$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x<2}}\frac{x-3}{x-2}=+\infty\ \left(\frac{-1}{0^-}\to+\infty\right)\quad،\quad\lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}}\frac{x-3}{x-2}=-\infty\ \left(\frac{-1}{0^+}\to-\infty\right)$$

في هذا السؤال وجب علينا فصل النهاية إلى نهايتين لأننا نحتاج إشارة المقام حتى نحدد النهاية الصحيحة

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{3x}{1-x^2}=+\infty\ \left(\frac{3}{0^+}\to+\infty\right)\quad،\quad\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{3x}{1-x^2}=-\infty\ \left(\frac{3}{0^-}\to-\infty\right)$$

رغم أننا في النهاية $\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{3x}{1-x^2}$ نحسب النهاية على اليمين، فذلك لا يعني أن $\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}1-x^2=0^+$ بل العكس

$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}1-x^2=0^-$ لأن من يحدد الإشارة هو التأطير، بمعنى: $x>1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow 1-x^2<0$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{7}{1-x}+\frac{2}{x+1}=+\infty\ (+\infty+1\to+\infty)\quad،\quad\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{7}{1-x}+\frac{2}{x+1}=-\infty\ (-\infty+1\to-\infty)$$

تمرين 4 :

$$\lim_{x\mapsto -\infty}(1-x+3x^2)=\lim_{x\mapsto -\infty}3x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty}(5x^2-2x+3)=\lim_{x\mapsto +\infty}5x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty}|x^3|+x=\lim_{x\mapsto -\infty}-x^3+x=\lim_{x\mapsto -\infty}-x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty}(1-x)(3x^2+3)=\lim_{x\mapsto +\infty}3x^2+3-3x^3-3x$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty}(1-x)(3x^2+3)=\lim_{x\mapsto +\infty}-3x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{4x+2x^3}{3x^3+2x^2+1}=\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty}\frac{5x^2+x+1}{x+2}=\lim_{x\mapsto -\infty}\frac{5x^2}{x}\lim_{x\mapsto -\infty}5x=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty}\frac{2x^2+x}{7x^3+x+1}=\lim_{x\mapsto -\infty}\frac{2x^2}{7x^3}=\lim_{x\mapsto -\infty}\frac{2}{7x}=0$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{-x^3+5x^2}{x^2+1}+\frac{x^2-1}{x}=\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{x(-x^3+5x^2)+(x^2-1)(x^2+1)}{x(x^2+1)}=\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{-x^4+5x^3+x^4-1}{x(x^2+1)}=\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{5x^3-1}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{-x^3+5x^2}{x^2+1}+\frac{x^2-1}{x}=\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{5x^3}{x^3}=\lim_{x\mapsto +\infty}5=5$$

للتذكير: $\lim_{x\mapsto\pm\infty}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=\lim_{x\mapsto\pm\infty}a_nx^n$ و $\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$