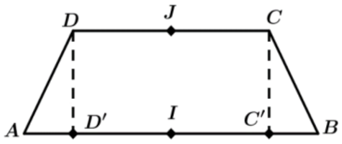
Lycée Errazi TAZNAKHTE TCSF	❀❀ Le produit scalaire ❀❀	Pr. LATRACH abdelkbir 2017-2018

Exercice ①

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle tel que: $AB=6$ et $CD=5$ et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. (voir la figure).



Calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC'}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{ID}$

Exercice ②

ABC un triangle isocèle en A tel que $AB=3$ et $BC=3\sqrt{3}$.

1) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2) En déduire $A\widehat{C}B$ et $C\widehat{A}B$.

Exercice ③

1) Calculer le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$ dans les cas suivants :

- $\|\vec{U}\|=2\sqrt{2},\ \|\vec{V}\|=\sqrt{2},\ et\ (\overline{\vec{U};\vec{V}})\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$.
- $\|\vec{U}\|=4,\ \|\vec{V}\|=2,\ et\ (\overline{\vec{U};\vec{V}})\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$.
- $\|\vec{U}\|=1,\ \|\vec{V}\|=\sqrt{2},\ et\ (\overline{\vec{U};\vec{V}})\equiv\frac{500\pi}{4}[2\pi]$.

2) Déterminer les valeurs possibles de l'angle $(\vec{U};\vec{V})$ dans les cas suivants :

- $\|\vec{U}\|=3,\ \|\vec{V}\|=4,\ et\ \vec{U}.\vec{V}=6\sqrt{2}$.
- $\|\vec{U}\|=1,\ \|\vec{V}\|=2\sqrt{3},\ et\ \vec{U}.\vec{V}=-3$.

Exercice ④

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan telles que

$$\|\vec{U}\|=2,\ \|\vec{V}\|=3,\ et\ (\overline{\vec{U};\vec{V}})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi].$$

1) Déterminer le réel m dans les cas suivants :

$1)\ (m\vec{U}-\vec{V}).\vec{V}=0$ $\quad 2)\ (2\vec{U}+3\vec{V}).(\vec{U}-m\vec{V})=-2$

$3)\ (2\vec{U}+m\vec{V}).(3\vec{U}-\vec{V})=5$ $\quad 4)\ (m\vec{U}-\vec{V})^2=9$

2) Déterminer les réels a et b sachant que :

$$\begin{cases}(a\vec{U}+b\vec{V}).\vec{U}=0\\(a\vec{U}+b\vec{V}).\vec{V}=0\end{cases}$$

Exercice ⑤

ABC est un triangle tel que $AB=1,\ AC=\sqrt{2}$ et $\cos(\hat{A})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

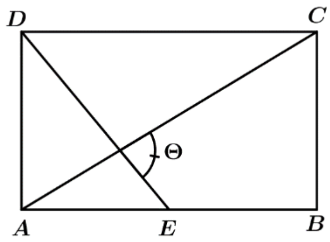
2) Considérons D un point du plan défini par :

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. Conclure.

Exercice ⑥

$ABCD$ un rectangle tel que : $AD=3$ et $AB=5$ et E le milieu du segment $[AB]$.



1) Calculer les distances AC et DE.

2) a)- Ecrire $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b)- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.

3) En déduire la mesure de l'angle θ en degré.

Exercice ⑦

ABC est un triangle $AB=6, AC=5\ et\ BC=7$.

1) En utilisant le théorème d'***Al-Kashi*** montrer que : $\cos(\hat{A})=\frac{1}{5}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis déduire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$.

3) Soit H le projeté de A sur (BC).

Calculer la distance BH .

Exercice ⑧

ABC est un triangle $AB=4, AC=3\ et\ \cos(A)=\frac{5}{6}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Calculer la distance BC.

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

Montrer que : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)$.

4) En déduire que : $(BI)\perp(CJ)$.

Exercice ⑨

ABC est un triangle tel que $AB=3$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$ et $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$.

Soient I le milieu du segment $[AB]$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1) Montrer que $AH=2$.

2) Calculer la distance AC.

3) Calculer la distance BC puis déduire la distance CI.

4) Soit J un point du plan tel que : $8\overrightarrow{AJ}+k\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de k pour que $\overrightarrow{BJ}\perp\overrightarrow{AC}$.

Exercice ⑩

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\widehat{BAD}=\frac{\pi}{3}$ et $AD=4$ et $CD=6$ et soit O le milieu du segment $[AB]$.

1) Calculer les distances BD et AC.

2) Montrer que pour tout point M du plan que $MA^2+MB^2=2MO^2+18$.

3) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2=24$.

Exercice ①①

ABC est un triangle $AB=4, BC=4\sqrt{7}\ et\ \hat{A}=\frac{\pi}{3}$.

1) Montrer que : $AC=12$.

2) Soit D un point du plan tel que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

a)- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b)- En déduire $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD}$.

3) Soit E le milieu du segment $[AB]$. Montrer que: $DE=2\sqrt{13}$.

Exercice ①②

ABC est un triangle $BC=2, AC=\sqrt{3}\ et\ \hat{C}=\frac{\pi}{6}$.

1) Calculer la distance AB puis déterminer la mesure de l'angle $\hat{A}$.

2) On considère H le projeté de A sur (BC). Montrer que : $AH^2+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CH}=0$.

3) a)- Calculer les distances CH et BH.

b)- En déduire que : $3\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

c)- Montrer que pour tout point M du plan (P) on a : $3MB^2+MC^2=4HM^2+3$.

4) Trouver l'ensemble du points M du plan (P) tels que : $3MB^2+MC^2=6$.

Exercice ①③

ABC un triangle tel que $AB=3$, $AC=1$ et $\cos(A)=\frac{-1}{3}$

1) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1$.

2) Calculer la distance BC.

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

a/- Calculer AI et BJ.

b/- Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

4) Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.

a/- Ecrire le vecteur $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b/- Montrer que les droites (AB) et (IE) sont perpendiculaires.

Exercice ①④

$ABCD$ est un carré de coté 1 et de centre O et I le milieu du segment $[BC]$.

On construit à l'intérieur du carré $ABCD$ le point E de telle sorte que le triangle BCE soit équilatéral.

1) Montrer que $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OE}=-OI\times OE$.

2) En déduire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OE}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$.

3) Montrer que : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BE}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

4) En déduire la valeur de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice ① ⑤ : Théorème de Héron

Soit ABC un triangle. On note $AB=c, AC=b, BC=a$ et $p=\frac{a+b+c}{2}$ et S son aire.

1) En utilisant le théorème d'***Al-Kashi***, exprimer $1-\cos^2(A)$ en fonction de $a, b, et\ c$.

2) Déduire que:

$$4b^2c^2\sin^2(A)=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$$

3) Justifier l'égalité $\sin^2(A)=\frac{4}{b^2c^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$

4) En déduire sur $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Application: Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté 6.