2.1.5. Les oscillations électriques :

Etude théorique des oscillations libres dans un circuit électrique *L-C*

Un circuit est constitué d'un condensateur de capacité C, initialement chargé et d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

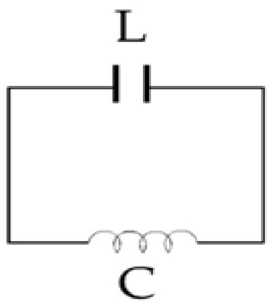


Figure 12: Circuit électrique LC

La résistance est négligeable ; cela signifie qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie par effet Joule. L'énergie présentée dans le circuit demeure donc constante ; à l'instant *t*, elle est sous forme d'énergie électrostatique Ec emmagasinée dans le condensateur

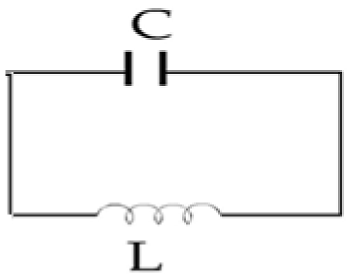
Ec = $\frac{1}{2} cu^2 = \frac{1}{2} cU^2 cos^2(w_0 t)$ et sous forme d'énergie magnétique E_L dans la bobine

$E_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} LI^2 sin^2 (w_0 t)$

Si l'énergie électrostatique diminue, l'énergie magnétique augmente, à somme constante, et inversement. Cela signifie qu'au cours des oscillations d'un circuit (*L*, *C*) non résistant, l'énergie totale se conserve, car il y a transfère d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement.

Exercice

Soit un circuit constitué d'un condensateur de capacité *C*, initialement chargé et d'une bobine d'inductance *L* et de résistance négligeable.



1). Représenter les tensions aux bornes de la bobine et aux bornes du condensateur.

2) En appliquant la loi des mailles, établir l'équation différentielle du circuit donnant la variation de la charge q du condensateur en fonction du temps.

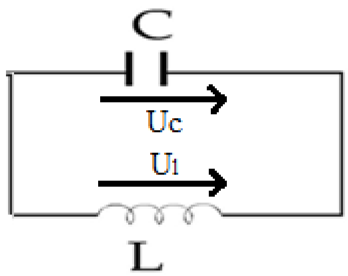
3) Ecrire l'équation horaire.

4) Déterminer les expressions de la pulsation propre, la période propre et la fréquence propre.

5) Montrer que l'équation horaire est une solution de l'équation différentielle.

Solution

1)



2) Equation différentielle

D'après la loi des mailles

$U_c + U_L = 0$ / $U_C = \frac{q}{C}$ et $U_L = L\frac{di}{dt}$

$\dot{q} = i = \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \; L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$

$\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$

3) Equation horaire

$q = q_0 \cos(w_0 t + \varphi)$

4) Les expressions de la pulsation propre, la période propre et de la fréquence propre.

$\dot{q} = -q_0 w_0 \sin(w_0 t + \varphi)$

$\ddot{q} = -q_0 w_0^2 \cos(w_0 t + \varphi)$

$-q_0 w_0^2 \cos(w_0 t + \varphi) + \frac{1}{LC} q_0 \cos(w_0 t + \varphi) = 0$

$q_0 \cos(w_0 t + \varphi)(-w_0^2 + \frac{1}{LC}) = 0$

$q_0 \cos(w_0 t + \varphi) \neq 0$ donc $(-w_0^2 + \frac{1}{LC}) = 0$

$w_0^2 = \frac{1}{LC}$

La pulsation propre

$w_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

La période propre

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

La fréquence propre

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{lc}}$

6) Montrons que q = q_0 cos (w_0 t +φ) est solution de l'équation différentielle

$q = q_0 \cos(w_0 t + \varphi)$

$\dot{q} = -q_0 w_0 \sin(w_0 t + \varphi)$

$\ddot{q} = -q_0 w_0^2 \cos(w_0 t + \varphi)$

$\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$

$-q_0 w_0^2 \cos(w_0 t + \varphi) + \frac{1}{LC} q_0 \cos(w_0 t + \varphi) = 0$

avec $w_0^2 = \frac{1}{LC}$

$-q_0 w_0^2 \cos(w_0 t + \varphi) + w_0^2 q_0 \cos(w_0 t + \varphi) = 0$

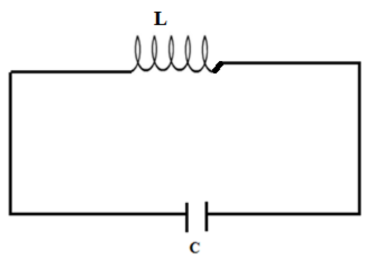
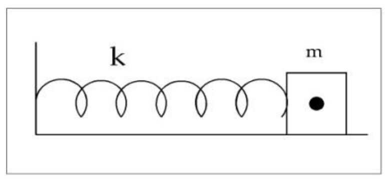
$0 = 0$

Conclusion :

Un circuit LC possède deux réservoirs d'énergie, le condensateur et la bobine, entre les quels des échanges d'énergie provoquent des oscillations électriques.

Lorsqu'un condensateur initialement chargé est connecté aux bornes d'une bobine parfaite, les oscillations qui prennent naissance sont sinusoïdales.

Analogie entre le système mécanique Masse-ressort et le système électrique *L-C*

Système électrique	**Système mécanique**
	
Equation différentielle : m$\ddot{x}$ + kx = 0	Equation différentielle : L$\ddot{q}$ + $\frac{q}{c}$ = 0
Déplacement : x	Charge : q

Vitesse : $\dot{x}$	Courant électrique : $\dot{q}$ = i
Accélération : $\ddot{x}$	Variation du courant : $\ddot{q}$
Masse : m	Inductance : L
Constante de raideur : k	Inverse de la capacité : $\frac{1}{C}$
Energie potentielle : $\frac{1}{2}kx^2$	Energie électrique : $\frac{1}{2}$ C q^2
Energie cinétique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2}$ L $\dot{q}^2$

Tableau 3: Analogie système mécanique - système électrique

Ressorts en parallèle

On considère deux ressorts en parallèle de raideur K_1 et K_2 et on recherche la raideur équivalente à ces deux ressorts sachant que le déplacement imposé x est le même.

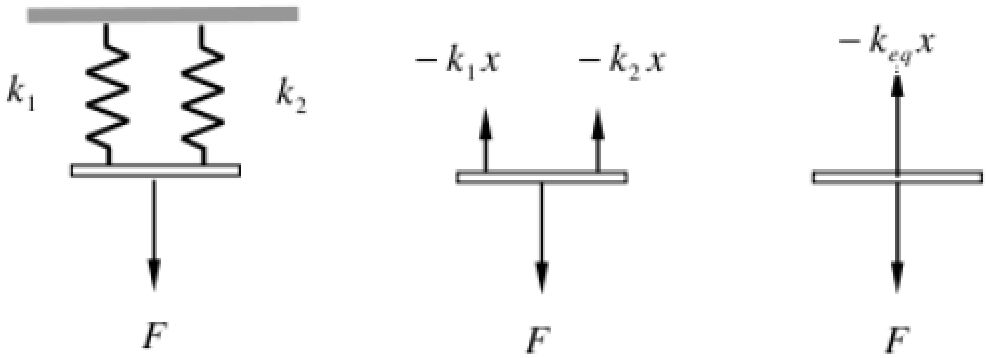


Figure 13 : Raideurs en parallèle

$F = F_1 + F_2 = K_1 x + K_2 x = Kéq. x$

On en déduit: $Kéq = K_1 + K_2$

Ressorts en série

On considère deux ressorts en série de raideur K_1 et K_2 et on recherche la raideur équivalente à ces deux ressorts sachant que la force imposée F est la même.

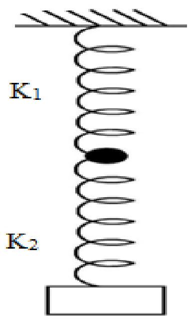


Figure 14 : Raideurs en série

$F = k_1 x_1$

$x_1 = \frac{F}{k_1}$

$x_2 = x_1 + \frac{F}{k_2} \rightarrow x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \rightarrow x_2 = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{F}{k_{eq}}$

Donc, $\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ d'où $k_{eq} = \frac{k_1\ k_2}{k_1+k_2}$

Chapitre II

2.2. Oscillations libres des systèmes amortis

2.2.1. Equation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=Fq$$

Fq est la force de frottement généralisée suivant q.

La fonction de dissipation

$Fq = \vec{f}\,\frac{d\vec{r}}{dq} \quad / \quad \vec{f} = -\alpha\vec{v}$

$Fq = -\alpha\vec{v}\,\frac{d\vec{r}}{dq} \quad / \, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$Fq = -\alpha \,\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dq} \, / \, \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dq}\frac{dq}{dt}$

$Fq = -\alpha \,\frac{d\vec{r}}{dq}\frac{dq}{dt}\frac{d\vec{r}}{dq} = -\alpha \left(\frac{d\vec{r}}{dq}\right)^2\frac{dq}{dt}$

$Fq = -\alpha \left(\frac{d\vec{r}}{dq}\right)^2\dot{q}$

$Fq = -\beta\dot{q} \ \ / \, \beta = \alpha \left(\frac{d\vec{r}}{dq}\right)^2$

α : coefficient de frottement.

Exemple :

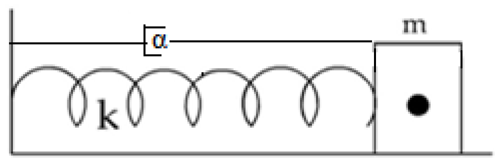


Figure 15 : Système masse-ressort-amortisseur

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

Equation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$Avec\ D = \frac{1}{2}\alpha v^2 \rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\,\dot{x}$

$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose $\frac{\alpha}{m} = 2\lambda \ \ et\ \frac{k}{m} = w_0^2$

λ: coefficient d’amortissement

w_0 : pulsation propre

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \dot{w}_0^2 x = 0 \qquad (7)$

Equation différentielle de 2ee ordre linéaire homogène.

La solution :

$x(t) = A\,e^{\delta t}$

$\dot{x}(t) = A\,\delta\,e^{\delta t}$

$\ddot{x}(t) = A\,\delta^2 e^{\delta t}$

En intégrant $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans *(7)*

$A\,\delta^2 e^{\delta t} + 2\lambda\,A\delta e^{\delta t} + w_0^2 A\,e^{\delta t} = 0$

$A\,e^{\delta t}\,(\delta^2 + 2\lambda\delta + w_0^2) = 0$

$A\,e^{\delta t} \neq 0 \rightarrow (\delta^2 + 2\lambda\delta + w_0^2) = 0$

Equation du *2ee* degré en δ

$\bar{\Delta} = \lambda^2 - w_0^2$

1er cas : $\lambda > w_0 \rightarrow \quad \bar{\Delta} > 0$ Régime fortement amorti, il accepte deux solutions réelles et négatives :

$\delta_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$

$\delta_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$

La solution :

$X(t) = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2\,e^{\delta_2 t}$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales.

$X(t) = A_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w_0^2})\,t} + A_2\,e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w_0^2})\,t}$

$X(t) = \quad e^{-\lambda t}\,(A_1 e^{(-\sqrt{\lambda^2 - w_0^2})\,t} + A_2\,e^{(+\sqrt{\lambda^2 - w_0^2})\,t})$

X(t) décroit sans osciller vers zéro avec le temps.

La variation de x en fonction de t :

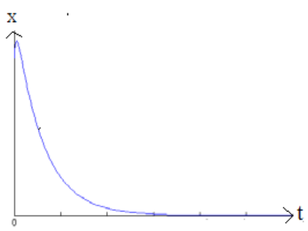


Figure 16 : Réponse libre d'un système fortement amorti

2^{ee} cas $(\lambda = w_0)$ Régime critique

Racine double $\delta_1 = \delta_2 = -\lambda$

La solution :

$X(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\lambda t}$

$x(t)$ décroit sans osciller vers zéro avec le temps. Le système revient à sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

3^{ee} cas $(\lambda < w_0)$ Régime pseudo périodique

$\bar{\Delta} < 0$

Dans ce cas δ_1 et δ_2 sont des complexes,

$\delta_1 = -\lambda + i\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$

$\delta_2 = -\lambda - i\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$ $\quad / \; w_p = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$

La solution générale :

$x(t) = A_1 e^{(-\lambda - i\sqrt{w_0^2-\lambda^2})\,t} + A_2\, e^{(-\lambda + i\sqrt{w_0^2-\lambda^2})\,t}$

$x(t) = e^{-\lambda t}\,(A_1 e^{(-i\sqrt{w_0^2-\lambda^2})\,t} + A_2\, e^{(+i\sqrt{w_0^2-\lambda^2})\,t})$

$x(t) = e^{-\lambda t}[A_1\,(\cos\sqrt{(w_0^2-\lambda^2)}t - i\sin\sqrt{(w_0^2-\lambda^2)}t)] + [A_2\,(\cos\sqrt{(w_0^2-\lambda^2)}t + i\sin\sqrt{(w_0^2-\lambda^2)}t)\,]$

Sachant que

$e^{i\omega t} = \cos wt + i \sin wt$

$e^{-i\omega t} = \cos wt - i \sin wt$

$x(t) = e^{-\lambda t}\;[(A_1 + A_2)\cos w_p t \; + i\,(A_2 - A_1)\sin w_p t\,)\,] \;/\; A_1 + A_2 = B_1$ et $A_2 - A_1 = B_2$

$x(t) = e^{-\lambda t}\;[B_1 \cos w_p t \; + \; B_2 \sin w_p t\,)\,]$

$x(t) = C e^{-\lambda t}(\cos w_p t \; + \varphi)$

C et φ peuvent être déduits à partir des conditions initiales.

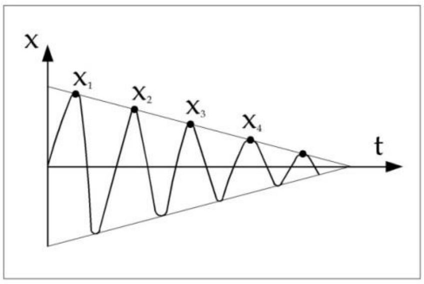


Figure 17 : Réponse libre amortie

L'amortisseur diminue la pulsation et augmente la période des oscillations.

2.2.2. Le décrément logarithmique

Le décrément logarithmique peut être définit comme le logarithme népérien du rapport de l'amplitude du maximum de l'ordre n à l'amplitude du maximum de l'ordre $n + k$. Ce paramètre caractérise la décroissance des élongations maximales à chaque période. Il est utile en particulier dans l'exploitation des mesures, d'utiliser la notion de décrément logarithmique, ainsi défini:

Décrément logarithmique d'un mouvement pseudopériodique dans le cas de Δ < 0:

$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \qquad / \, t_2 = t_1 + T_p$$

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_p)} \, / \, x(t) = C \; e^{-\lambda t} \, (\cos w_p t + \varphi)$$

$$\delta = \ln \frac{c\, e^{-\lambda t} \cos\,(w_p t + \varphi)}{c\, e^{-\lambda\,(t + T_p)} \cos\,(w_p(t+T_p) + \varphi)}$$

$$\delta = \ln \frac{1}{e^{-\lambda T_p}} \rightarrow \delta = \lambda\, T_p$$

Pour plusieurs oscillations, *on a* $T = n\, T_p$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t + nT_p)} = \lambda\, T_p$$

2.2.3. Facteur de qualité

C'est une grandeur qui mesure la diminution de l'énergie, elle est définie par:

$$Q = 2\pi \frac{Energie\ maximale\ stockée}{Energie\ perdue\ par\ cycle}$$

$$Q = \frac{\pi}{\delta}$$

Exercice I

Sur un plan incliné d'un angle β est attaché un ressort de masse négligeable et de raideur $k = 100\ N/m$ portant à son extrémité un disque de masse $M = 100\ g$ et de rayon R. Ce dernier roule sans glisser sur le plan (figure 1)

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2) Trouver la pulsation propre.
3) Trouver la solution générale sachant qu'à $t = 0$, $x = 3\ cm$, $\dot{x} = 0$
4) En réalité, le système est soumis à des forces de frottement α (figure 2).
a) Etablir l'équation différentielle.
b) Trouver le coefficient d'amortissement λ et la pseudo-pulsation.

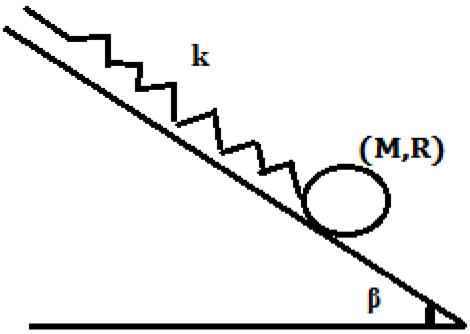


Figure 1

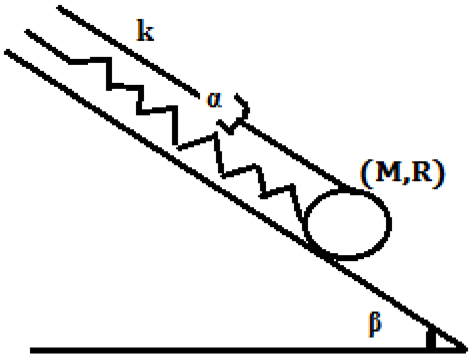


Figure 2

Solution

Première méthode

1) **Equation différentielle**

La condition d'équilibre : $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{X=0} = 0$

$U = \frac{1}{2} k (x + x_0)^2 - m g x \sin\beta$

La condition d'équilibre:

$\frac{\partial U}{\partial x} = k (x + x_0) - m g \sin\beta = 0 / x = 0$

$k x_0 - m g \sin\beta = 0$

$M \rightarrow rot \rightarrow \theta$

$n = N - L$

$N = 1$ et $L = 0 \rightarrow n = 1ddl$

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} mR^2 \frac{\dot{x}^2}{R^2}$

$T = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m\dot{x}^2$

$U = \frac{1}{2} k(x + x_0)^2 - m\, g\, x \sin\beta$

$L = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k(x + x_0)^2 + m\, g\, x \sin\beta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

$\frac{3}{2} m\ddot{x} + k\,(x + x_0) - mg \sin\beta = 0$

$\frac{3}{2} m\ddot{x} + k\,x + k\,x_0 - m\,g \sin\beta = 0$ / $k\,x_0 - m\,g \sin\beta = 0$ (condition d'équilibre).

On aura *donc* $\frac{3}{2} m\ddot{x} + k\,x = 0$

$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0$

Deuxième méthode

2) **Equation différentielle**

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} mR^2 \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m\dot{x}^2$

$U = \frac{1}{2} kx^2$

$L = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

$\frac{3}{2} m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0$

3) **La pulsation propre**

$\ddot{x} + w_0^2\, x = 0$

$w_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

$w_0 = \sqrt{\frac{2 \times 100}{3 \times 0.1}} = 25.8 \text{ rad/s} \approx 26 \text{ rad/s}$

4) **La solution générale**

$x(t) = A \cos(w_0 t + \varphi)$

$t = 0, \dot{x} = 0 \rightarrow -A\, w_0 \sin\varphi = 0$

$\sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$

$t = 0, x = 3\ cm \rightarrow A = 3\ cm$

$x(t) = 3 \cos 26\, t\ (cm).$

5) **Equation différentielle du système amorti**

$L = \frac{3}{4} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k\, x^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = F_x$$

$F_x = -\beta\dot{x}\ /\ = \alpha \Longrightarrow\ F_\theta = -\alpha\dot{x}$

$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Longrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{2\alpha}{3m}\dot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$

$\ddot{x} + 2\lambda + w_0^2\, x = 0$

$2\lambda = \frac{2\alpha}{3m} \rightarrow \lambda = \frac{\alpha}{3m}$

$w_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

La solution

$x(t) = C\, e^{-\lambda t} \cos\,(w_p t + \varphi)$

Exercice II

On considère le pendule constitué d'une tige de masse négligeable de longueur *L* portant à son extrémité une masse m considérée ponctuelle et un ressort soudé à la masse (figure *1*). Le système peut osciller librement autour du point O.

1) Trouver l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

2) Quelle est la condition d'oscillation

3) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations et sa solution $\theta(t)$.

4) En déduire la pulsation et la période propre pour $m = 1kg$, $L = 1m$, $k = 36\ N/m$ et $g = l0\ N / kg$.

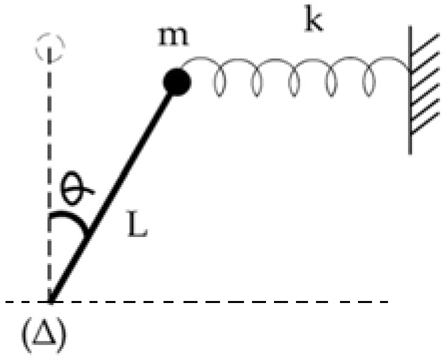
5) En réalité, le système est constitué d'un amortisseur α comme montré sur la figure (2).

a- Etablir l'équation différentielle.

b- Trouver le coefficient d'amortissement λ et la pulsation propre w_0.

c- Trouver la pseudo-pulsation w_p.

d- Trouver la solution générale.



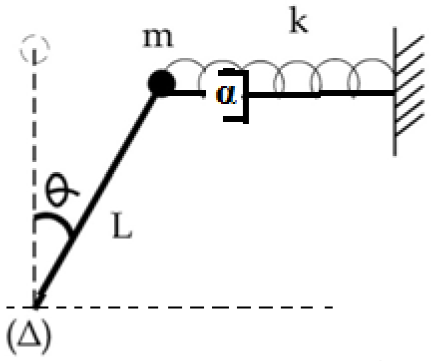


Figure 1 **Figure 2**

Solution:

m→rot→θ

$n = N\text{-}L$ / $N = 1$ et $L = 0 \Rightarrow n = 1ddl$

1) **l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :**

$T = \frac{1}{2}J_{(\Delta)}\dot{\theta}^2$ / $J(\Delta) = mL^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$

$U = U_k + U_m = \frac{1}{2}kx^2 + mgh$ / $x = l\theta$ et $h = L\cos\theta$

$U = \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgL\cos\theta$

2) **la condition d'oscillation**

$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}/_{\theta = 0} > 0$

$U = = \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgL\cos\theta$

$\frac{\partial u}{\partial \theta} = kL^2\theta - mgl\sin\theta = (kL^2 - mgl)\theta$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = kL^2 - mgL > 0 \Rightarrow kL - mg > 0$

3) **l'équation différentielle du mouvement**

$L = T - U$

$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kL^2 - mgL)\theta^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$mL^2\ddot{\theta} + (kL^2 - mgl)\theta = 0 \Rightarrow mL\ddot{\theta} + (kL - mg)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{kl - mg}{ml}\theta = 0$$

4) **La pulsation et la période propre**

$$w_0 = \sqrt{\frac{kl-mg}{ml}}$$

pour *m = 1kg, L= 1m, k = 36 N/m et g = l0 N / kg, on aura* $w_0 = 5.09$ *rad/s.*

$T = \frac{2\pi}{w_0} = 1{,}23\ s$

5) Présence d'amortisseur

a- L'équation différentielle

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\,(kL^2 - mgL)\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = F_\theta$$

$$F_\theta = -\beta\dot{\theta}\ /\ \beta = \alpha\left(\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right)^2 et\ \ r = L\theta \Longrightarrow \frac{dr}{d\theta} = L\ \ donc\ \beta = \alpha\, L^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\alpha\, L^2\dot{\theta}$$

$$mL^2\ddot{\theta} + (kL^2 - mgl)\theta = -\alpha\, L^2\dot{\theta}$$

$$mL\ddot{\theta} + (kL - mg)\theta = -\alpha\, L\,\dot{\theta}$$

$$mL\ddot{\theta} + \alpha\, L\,\dot{\theta} + (kL - mg)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{kl-mg}{ml}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$$

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \rightarrow \lambda = \frac{\alpha}{2m}$$

$$w_0^2 = \frac{kl-mg}{ml}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{kl-mg}{ml}}$$

b- La pseudo-pulsation

$$w_p = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

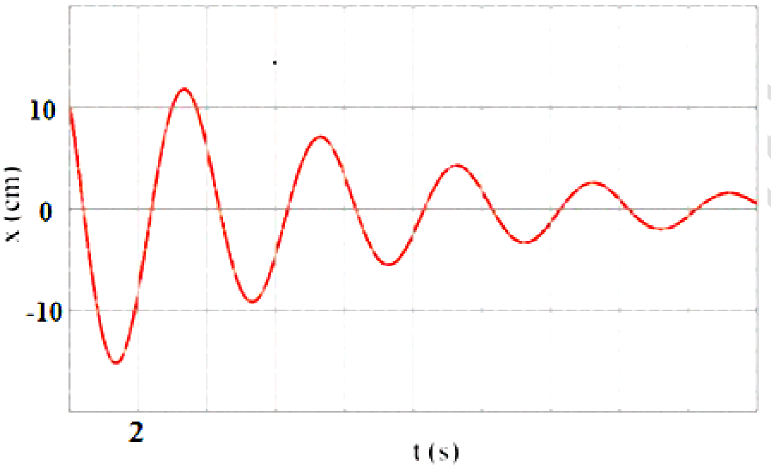
c- La solution générale

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(w_p t + \varphi)$$

Exercice III

Soit un oscillateur mécanique amorti constitué d'une masse m attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur k, l'autre extrémité étant fixe. Le système oscille autour du point d'équilibre et on mesure à chaque fois la position instantanée de la masse. L'évolution du mouvement est décrite dans le graphe montré ci-dessous.

1. Quel est le régime d'évolution de l'oscillateur.
2. Etablir l'équation différentielle et trouver le coefficient d'amortissement λ et la pulsation propre ω_0.
3. Donner l'expression générale de $x(t)$.
4. Déterminez le décrément logarithmique graphiquement, puis exprimez-le littéralement en fonction du coefficient d'amortissement et de la pseudo-période.



5. En déduire les valeurs du coefficient d'amortissement, de la période propre et du facteur de qualité.

6) En déduire les valeurs du coefficient d'amortissement, de la période propre et du facteur de qualité.

Solution

1) Le régime est pseudo périodique.
2) L'équation différentielle

$L = T - U$

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

3) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = F_X$

$Fx = -\beta\dot{x} \,/\, \beta = \alpha$

$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\ddot{x} + 2\lambda\,\dot{x} + w_0^2 x = 0$

$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \rightarrow \lambda = \frac{\alpha}{2\,m}$

$w_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

***3)* La solution générale**

$x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(w_0 t + \varphi)$

$T_p = 4s$

4) Le décrément logarithmique

$\delta = ln\frac{x(t_1)}{x(t_1+Tp)}$ / $x(t_1) = 12$ cm et $x(t_1 + Tp) = 7$ cm

$\delta = ln\,\frac{12}{7} = 0{,}54$

5) Le décrément logarithmique en fonction du coefficient d'amortissement et de la pseudo-période.

$\delta = ln\,\frac{x(t_1)}{x(t_1+Tp)}$

$\delta = ln\,\frac{C\,e^{-\lambda t}\cos\,(wpt+\varphi)}{C\,e^{-\lambda(t+Tp)}\cos\,(wp(t+Tp)+\varphi)}$

$\delta = ln\,\frac{1}{e^{-\lambda Tp}} \rightarrow \delta = \lambda T_p$

6) Les valeurs du coefficient d'amortissement, de la période propre et du facteur de qualité.

On a $\delta = \lambda T_p \rightarrow \lambda = \frac{\delta}{T_p} = \frac{0{,}54}{4} = 0{,}135\ S^{-1}$

$w_p^2 = w_0^2 - \lambda^2 \rightarrow \ w_0^2 = \lambda^2 + w_p^2$

$w_0 = \sqrt{\lambda^2 + w_p^2}$ / $w_p = \frac{2\pi}{T_p} = 1.57$ rad/s

$w_0 = \sqrt{(0{,}135)^2 + (1{,}57)^2}$

$w_0 = 1{,}57$ rad/s et $T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 4$ s

$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{3{,}14}{0{,}54} = 5.8$

Exercice III

Soit le pendule de la figure montrée ci-dessous:

La masse m est ponctuelle. La tige OB de longueur 2L sans masse pivote autour du point O d’un angle θ par rapport à sa position d’équilibre verticale. Au repos (θ = 0) le ressort est non déformé.

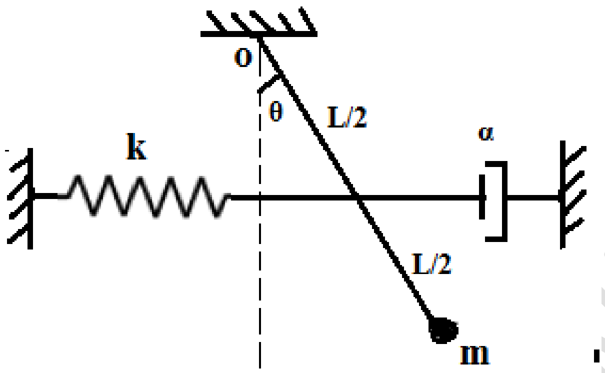
Un dispositif amortisseur exerce en A une force de frottement fluide.

1) Trouver l’équation du mouvement de ce système.

Dans le cas des petites oscillations, donner l'équation différentielle correspondante.

2) On donne: $m = 0,5$ kg, $k = 4$ N/m, $\alpha = 6$ kg/s, $L = 0,5$ m, $g = 10$ m/s^2

Calculer le coefficient d'amortissement λ, la pulsation propre ω_0 et donner la solution du régime transitoire correspondante.



Solution

1) **l'équation du mouvement**

$L = T - U \quad T = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 \quad /J = m\,(2L)^2 = 4\,ML^2$

$T = 2ML^2\dot{\theta}^2$

$U = U_k + U_p$

$U = \frac{1}{2}\,kx^2 - mg\,(2L\cos\theta)\ U = \frac{1}{2}\,KL^2\theta^2 - 2mgL\cos\theta$

$L = 2ML^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\,KL^2\theta^2 + 2mgL\cos\theta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = F_\theta \ /F_\theta = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \quad /D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

On aura donc $Fq = -\alpha\dot{x}$

L'équation différentielle:

$4mL^2\ddot{\theta} - [-kL^2\theta - 2mgl\sin\theta) = -\alpha\dot{x}$

$4mL^2\ddot{\theta} + \alpha\dot{x} + kL^2\theta + 2mgl\sin\theta = 0$

$4mL^2\ddot{\theta} + \alpha L\dot{\theta} + (Kl + 2mg)l\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4mL}\dot{\theta} + \frac{(kl+2mg)}{4mL}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$$

$$2\lambda = \frac{\alpha}{4mL} \quad , w_0^2 = \frac{(kl+2mg)}{4mL}$$

$m = 0,5$ kg, $k = 4$ N/m, $\alpha = 6$ kg/s, $L = 0,5$ m, $g = 10$ m/s^2

2) $\lambda = \frac{\alpha}{8mL}$ $\lambda = 3\ s^{-1}$

$w_0 = \sqrt{\frac{(kl+2mg)}{4ml}} = 3.46\ rad/s$

$\lambda < w_0 \rightarrow$ amortissement faible, régime oscillatoire amorti

3) La solution

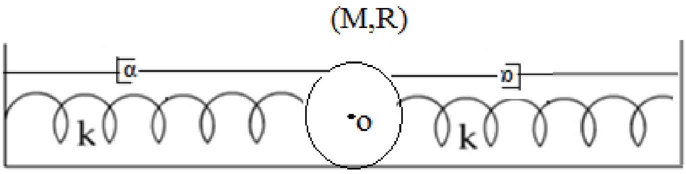
$\theta(t) = C\, e^{-\lambda t} \cos(w_p t + \varphi)$ $/w_p^2 = w_0^2 - \lambda^2$

$w_p = 1.72\ rad/s$

Exercice IV

Le système montré ci-dessous est constitué d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R, deux ressorts de masses négligeables et de raideur k et de deux amortisseurs de coefficient de viscosité α.

1) Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du système.
2) Trouver le coefficient d'amortissement λ et la pulsation propre w_0.
3) Trouver la pseudo-pulsation w_p.



Solution

$M \rightarrow rot \rightarrow \theta$

$N = 1$ et $L = 0 \Longrightarrow n = 1 - 0 = 1 \Longrightarrow n = 1ddl$

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} j\dot{\theta}^2$ $x = R\theta \rightarrow \theta = \frac{x}{R}$

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m\dot{x}^2$

$U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} kx^2 = kx^2$

$L = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m\dot{x}^2 - kx^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 2F_x$$

$F_x = -\beta\dot{x}\ /\beta = \alpha$

$\frac{3}{2} m\ddot{x} + 2kx = -2\alpha\dot{x}$

$\frac{3}{2} m\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + 2kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{4\alpha}{3m}\dot{x} + \frac{4k}{3m}x = 0$

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + w_0^2 x = 0$

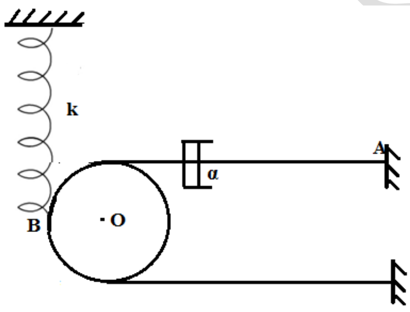
$2\lambda = \frac{4\alpha}{3m} \rightarrow \lambda = \frac{4\alpha}{3m}$

$w_0^2 = \frac{4k}{3m} \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$

4) $w_p = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$

Exercice V

Un disque circulaire homogène, de masse *M*, de rayon *R*, peut osciller sans frottement autour de son axe horizontal *O*. Un ressort vertical, de constante de raideur *K* a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point *B*. Après *10* cycles de vibrations, l'amplitude du mouvement diminue de *20%* par rapport à l'amplitude initiale.



Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point *A*

$M = 3kg$, $R = 10cm$, $Tp = 20s$.

1) Trouver la valeur de la pseudo pulsation w_p.
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
3) Trouver les valeurs de *k et α.*

Solution

1) La valeur de la pseudo pulsation *wp.*

$w_p = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}314\ rad/s$

2) L'équation différentielle du mouvement.

$M \rightarrow$ rotation $\rightarrow \theta$

On a *1* degré de liberté

$T = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2$ avec $J_m = \frac{1}{2} MR^2$

$T = \frac{1}{4} MR^2\dot{\theta}^2$

$U = \frac{1}{2} kx^2 \, / \, x = R\theta$

$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$

$L = T - U \quad \leftrightarrow L = \frac{1}{4} MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = F_\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\alpha R\dot{\theta}$

$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = -\alpha R\dot{\theta} \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R\dot{\theta} + kR^2\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{MR}\dot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = 0$

De la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + W_0^2\theta = 0$

$\frac{2\alpha}{MR} = 2\lambda \rightarrow \alpha = \lambda MR$

$w_p^2 = w_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow w_0^2 = w_p^2 + \lambda^2$

$\delta = ln\, \frac{x(t)}{x(t+Tp)} = \lambda\, Tp$

$ln\frac{A_0}{\frac{20}{100}A_0} = \lambda Tp \Rightarrow ln\, 5 = \lambda Tp \Rightarrow \lambda = \frac{ln\, 5}{Tp} \Rightarrow \lambda = \frac{1{,}61}{20}$

$\lambda = 0{,}08\ S^{-1}$

$w_0^2 = w_p^2 + \lambda^2 \Rightarrow w_0^2 = (0{,}314)^2 + (0{,}8)^2$

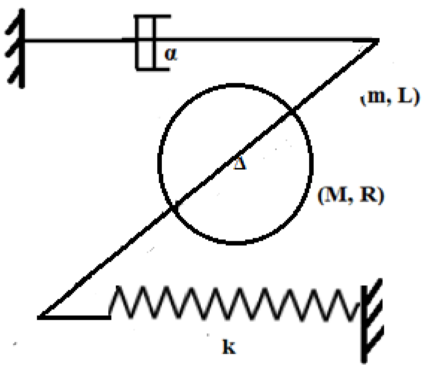
$w_0 = 0{,}86\ rad/s$

$w_0^2 = \frac{2k}{M} \Rightarrow k = \frac{w_0^2}{2}M = \frac{0{,}86^2}{2}\, 3 \Rightarrow k = 1{,}1\quad N/m$

Exercice VI

Un disque circulaire homogène, de masse M, de rayon R, peut osciller sans frottement autour de son axe horizontal O. Un ressort horizontal, de constante de raideur K a une extrémité fixe et l'autre est reliée à une tige homogène de masse $m = 2M = 200\ g$ et de longueur $l = 4R$ en un point A. La tige subit un frottement visqueux de coefficient α au point A

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2) Trouver la solution sachant qu'à $t = 0$, $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = -w_0$.



Solution

$m \rightarrow rot \rightarrow \theta$ et $M \rightarrow$ rot$\rightarrow \theta$ donc $n = 1$ddl

$L = T - U$

$T = \frac{1}{2}J_M\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\ MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}^2 \quad /M = \frac{m}{2}\ ,\ L = 4R$

$T = \frac{7}{12}\ MR^2\dot{\theta}^2$

$U = \frac{1}{2}kx^2 /\ x = 2R\theta$ *donc* $U = \frac{1}{2}k4R^2\theta^2$

$L = \frac{7}{12}\ MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k4R^2\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial\ L}{\partial\ \theta}\right) = F_\theta$

$F_\theta = -\beta\dot{\theta}\ /\ \beta = \alpha\ (\frac{dr}{d\theta})^2$ on a $r = 2R\theta \qquad \frac{dr}{d\theta} = 2R$

$\beta = -\ 4\alpha R^2 \Longrightarrow F_\theta = -\ 4\alpha R^2\dot{\theta}$

$\frac{7}{6}\ MR^2\ddot{\theta} + 4kR^2\theta = -\ 4\alpha R^2\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{7}{6}\ MR^2\ddot{\theta} + 4\alpha R^2\dot{\theta} + 4kR^2\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha R^2}{\frac{7}{6}MR^2}\dot{\theta} + \frac{4kR^2}{\frac{7}{6}MR^2}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{24\ \alpha}{7\ M}\dot{\theta} + \frac{24k}{7\ M}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + 2\lambda\ \dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$2\lambda = \frac{24\ \alpha}{7\ M} \rightarrow \lambda = \frac{12\ \alpha}{7\ M}$

$w_0^2 = \frac{24k}{7M} \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{24k}{7M}}$

La solution

$\theta(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(w_0 t + \varphi)$

$t = 0,\ \theta = 0 \Longrightarrow\ 0 = C\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$t = 0,\ \dot{\theta} = -w_0$

$\dot{\theta} = -w_0\ Ce^{-\lambda t}\sin(w_0 t + \varphi) - \lambda Ce^{-\lambda t}\cos(w_0 t + \varphi)$

$t = 0 \rightarrow \dot{\theta} = -w_0\ C\sin\varphi - \lambda\ C\cos\varphi\ /\ \varphi = \frac{\pi}{2}$

$-w_0 = -w_0\ C \Longrightarrow\ C = 1\ rad$

$\theta(t) = e^{-\lambda t}\cos(w_0 t + \frac{\pi}{2}).$