MATHÉMATIQUES - Edhec E 2005

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrons tout d'abord que f est une application linéaire ; soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et λ un réel, quelconque lui aussi :

   Alors $\lambda.M + N = \begin{pmatrix} \lambda.a + x & \lambda.b + y \\ \lambda.c + z & \lambda.d + t \end{pmatrix}$, et :

$$\begin{aligned} f(\lambda.M + N) &= (\lambda.M + N) + (\lambda.a + x + \lambda.d + t).I \\ &= \lambda.M + N + \lambda.(a+d).I + (x+t).I \\ &= \lambda.\big(M + (a+d).I\big) + \big(N + (x+t).I\big) \\ &= \lambda.f(M) + f(N) \end{aligned}$$

   Il est par ailleurs clair que pour tout élément $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = M + (a+d).I$ appartient encore à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, comme combinaison linéaire de deux matrices carrées d'ordre 2.
   Ainsi, f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. a) Les calculs donnent :

$$\begin{aligned} f(J_1) &= J_1 + (1+0).I = 2J_1 + J_4 \quad \text{puisque } I = J_1 + J_4 \\ f(J_2) &= J_2 + (0+0).I = J_2 \\ f(J_3) &= J_3 + (0+0).I = J_3 \\ f(J_4) &= J_4 + (0+1).I = J_1 + 2.J_4 \end{aligned}$$

   b) La matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) (qui est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(J_1) & f(J_2) & f(J_3) & f(J_4) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{array} \end{array}$$

c) La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable d'après le théorème admis du cours.

3. a) Montrons tout d'abord que la famille $\mathcal{B}' = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une famille libre ; soient a, b, c, d quatre réels tels que :

$$a.(J_1 - J_4) + b.J_2 + c.J_3 + d.I = 0_2 \iff \begin{pmatrix} a+d & b \\ c & -a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+d & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \\ -a+d & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ 2d = 0 \ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \iff b = c = 0 = d = a$$

La famille $\mathcal{B}'$ est bien **libre** ; comme c'est une famille de **quatre** vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel de **dimension quatre**, cela suffit pour pouvoir conclure que $\mathcal{B}'$ est une **base** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) On sait déjà que $f(J_2) = J_2$ et $f(J_3) = J_3$; ensuite, par linéarité de f et au vu des calculs effectués en 2.b) :

$f(J_1 - J_4) = f(J_1) - f(J_4) = 2J_1 + J_4 - J_1 - 2J_4 = J_1 - J_4$

et $f(J_1 + J_4) = f(J_1) + f(J_4) = 2J_1 + J_4 + J_1 + 2J_4 = 3(J_1 + J_4)$.

On réalise alors que $\mathcal{B}'$ est une base de vecteurs propres pour f : la matrice de f dans cette base est diagonale, c'est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) La formule de changement de base donne directement : $A = PDP^{-1}$, où P est la *matrice de passage* de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à la base $\mathcal{B}'$, c'est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle qu'il s'agit ici d'écrire en colonne les coefficients des vecteurs de la *nouvelle base* $\mathcal{B}'$ en fonction de ceux de la base canonique.

4. a) On calcule P^{-1} en résolvant le système $PX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et de second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$:

$$PX = Y \iff \begin{cases} x+t & = a \\ y & = b \\ z & = c \\ -x+t & = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - t = a - \frac{1}{2}(a+d) = \frac{1}{2}(a-d) \\ y = b \\ z = c \\ 2t = a+d \iff t = \frac{1}{2}(a+d) \ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{cases}$$

$$\iff X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0-1/2 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

b) On rédige la récurrence habituelle pour montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{\text{I.}}$ $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

On admet : $A^n = PD^nP^{-1}$, donc
$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

c) La matrice D étant diagonale, ses puissances sont immédiates : il suffit d'appliquer la puissance n-ième à ses éléments diagonaux. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+3^n) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(3^n-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(3^n+1) \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x.e^{x(y^2+1)}$.

1. Prenons le temps de détailler la rédaction rigoureuse de cette question :
   On sait que les *fonctions coordonnées* $e_1 : (x,y) \mapsto x$ et $e_2 : (x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ (car polynômiales !) sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction exp étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on obtient la fonction f par produit, et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$:
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = e_1(x,y).\exp\Big(e_1(x,y) \times \big(e_2(x,y)^2 + 1\big)\Big)$$
   ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. a) Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
   $$\partial_1(f)(x,y) = 1.e^{x(y^2+1)} + x.(y^2+1).e^{x(y^2+1)} = \big(1 + x(y^2+1)\big).e^{x(y^2+1)}$$
   $$\partial_2(f)(x,y) = x.2xy.e^{x(y^2+1)} = 2x^2y.e^{x(y^2+1)}$$

b) Rappelons tout d'abord ici (il faut toujours le faire !) que : puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, les extrémums éventuels de f sont forcément atteints en des points critiques de f.
Ceux-ci sont solution du système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(f)(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+x(y^2+1)=0 \\ 2x^2y=0 \end{cases} \quad \text{puisque } e^{x(y^2+1)} \text{ ne s'annule jamais}$$

$$\iff \begin{cases} 1+0(y^2+1)=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1+x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{d'après la règle du produit nul dans } L_2$$

Le premier cas donne $1=0$ en première ligne, ce qui est absurde : il n' a pas de solutions lorsque $x=0$.

Le deuxième cas donne le point critique $A(-1,0)$, qui est finalement le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. a) Calcul des dérivées partielles seconde de f ; pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = (y^2+1).e^{x(y^2+1)} + \big(1+x(y^2+1)\big).(y^2+1).e^{x(y^2+1)} = \big(2+x(y^2+1)\big).(y^2+1).e^{x(y^2+1)}$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2x^2.e^{x(y^2+1)} + 2x^2y.2xy.e^{x(y^2+1)} = 2x^2(1+2xy^2).e^{x(y^2+1)}$$

$$\partial^2_{2,1}((f)(x,y) = 4xy.e^{x(y^2+1)} + 2x^2y.(y^2+1).e^{x(y^2+1)} = 2xy.\big(2+x(y^2+1)\big).e^{x(y^2+1)} = \partial^2_{1,2}(f)(x,y)$$

d'après le théorème de Schwarz, puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

b) Au seul point critique $A=(-1,0)$ de f, la matrice hessienne s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice diagonale dont les valeurs propres sont donc les éléments diagonaux :
$\mathrm{Sp}(H)=\{e^{-1},2e^{-1}\}$. Comme les valeurs propres de la hessienne sont toutes les deux strictement positives, on en déduit que f admet bien un extrémum local en A, et que c'est un minimum local.

4. a) On compare classiquement $f(x,y)$ et $x.e^x$ en étudiant le signe de la différence de ces deux expressions :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)-x.e^x = x.e^{xy^2+x} - x.e^x = x.e^x.\big(e^{xy^2}-1\big)$$

Pour tout réel x, $e^x>0$, il reste donc à distinguer deux cas suivant que $x\geqslant 0$ ou $x<0$:

Si $x\geqslant 0$:	**Si $x<0$:**
Alors pour tout réel y $$x.y^2\geqslant 0 \implies e^{x.y^2}\geqslant 1 \implies e^{x.y^2}-1\geqslant 0$$ et donc : $x.e^x.\big(e^{xy^2}-1\big)\geqslant 0$ par produit de trois réels positifs.	Alors pour tout réel y $$x.y^2\leqslant 0 \implies e^{x.y^2}\leqslant 1 \implies e^{x.y^2}-1\leqslant 0$$ et donc : $x.e^x.\big(e^{xy^2}-1\big)\geqslant 0$ par produit de deux réels négatifs et d'un réel positif.

Ainsi dans tous les cas, la différence des deux expressions est bien positive, et on peut donc écrire :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)\geqslant x.e^x$$

b) La fonction $g: x \mapsto x.e^x$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x + x.e^x = (x+1).e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}: \ g'(x) \geqslant 0 \iff (x+1).e^x \geqslant 0 \iff x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$, puisque $e^x > 0$ pour tout réel x.
La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$, puis strictement croissante sur $[-1; +\infty[$. Elle admet donc un minimum global sur $\mathbb{R}$, atteint en -1 et qui vaut : $g(-1) = -e^{-1}$.
On est donc amené à écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x,y) \geqslant x.e^x \geqslant -e^{-1}$$

Il reste alors à remarquer que : $\quad f(A) = f(-1,0) = -e^{-1}$, et l'inégalité précédente s'écrit alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geqslant x.e^x \geqslant f(A) \quad \Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) \geqslant f(A)$$

La dernière inégalité signifie qu'au point A, la fonction f atteint en fait un minimum **global** sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \notin [0,1[\end{cases}$.

a) Pour tout réel x de $[0,1[$: $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \Big[-(1-t)^a\Big]_0^x = 1-(1-x)^a$.

On a en effet reconnu une expression de la forme $a.u'.u^{a-1}$ avec $u: \ t \mapsto 1-t$, où il ne manque que le facteur $u'(t) = -1$.

b) Il suffit alors de calculer la limite de l'intégrale précédente lorsque x tend vers 1 ; comme $a > 0$:

$$\lim_{x \to 1^-} 1-(1-x)^a = 1-0 = 1, \quad \text{donc} \quad \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } 1$$

c) On vérifie les trois hypothèses nécessaires :

- La fonction f est continue sur $]0,1[$ comme composée de fonctions continues, $t \mapsto 1-t$ étant strictement positive sur cet intervalle.
  Cette fonction est par ailleurs continue sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction constante nulle, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points (ici 0 et 1).
- Pour tout $t \in [0,1[$: $f(t) = a.(1-t)^{a-1}$ est positif comme produit de deux réels positifs.
  La fonction f est aussi positive car nulle, sur $]-\infty, 0[$ et $[1, +\infty[$, donc finalement positive sur tout $\mathbb{R}$.
- Enfin : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 0 \ \mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} 0 \ \mathrm{d}t = 0+1+0 = 1.$

La fonction f peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité.

On considère alors une variable aléatoire X admettant f comme densité ; soit F sa fonction de répartition.

2. Dans ce cas, on a alors $X(\Omega) = [0,1[$ et on peut déjà dire que :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [1,+\infty[,\ F(x) = 1$$

Pour tout $x \in [0,1[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} a(1-t)^{a-1}\mathrm{d}t = 1-(1-t)^a$$

d'après les calculs déjà réalisés à la question 1.a).

Bilan : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x < 0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} x \geqslant 1 \end{cases}.$

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3. a) Soit x un réel positif :

$$\begin{aligned} G(x) = P(Y \leqslant x) &= P(-\ln(1-X) \leqslant x) \\ &= P(\ln(1-X) \geqslant -x) \\ &= P(1-X \geqslant e^{-x} && \text{car exp est bijective strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= P(X \leqslant 1-e^{-x}) && \text{or : } \forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant 1-e^{-x} < 1 \\ &= 1-(1-(1-e^{-x}))^a && \text{selon l'expression de } F \text{ sur } [0,1[\\ &= 1-e^{-ax} \end{aligned}$$

Chacune des étapes du calcul doit être soigneusement justifiée !

b) Pour tout réel x négatif, on obtient selon les mêmes premières étapes : $G(x) = P(X \leqslant 1-e^{-x} = 0$ car alors $1-e^{-x} \leqslant 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui caractérise bien Y comme suivant la loi exponentielle de paramètre a.

4. a) Pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda A}-1) = \frac{1}{\lambda}$$

b) La fonction $h :\ x \mapsto e^{-x}$ étant continue sur $\mathbb{R}$: d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire e^{-Y} admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x).f_Y(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, où f_Y est une densité de Y.

Une telle densité est définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et h est positive sur $\mathbb{R}$, on est donc ramené à étudier la convergence simple de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}.a.e^{-ax}\mathrm{d}x = a\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x}\mathrm{d}x$$

D'après la question précédente (avec $\lambda = a+1 > 0$) : cette intégrale converge et vaut $a \times \dfrac{1}{a+1}$, donc :

$$E(e^{-Y}) \text{ existe et vaut } E(e^{-Y}) = \frac{a}{a+1}.$$

c) On sait que : $Y = -\ln(1-X) \iff 1 - X = e^{-Y} \iff X = 1 - e^{-Y}$. Ainsi, d'après la question précédente, et par linéarité de l'espérance :

$$X \text{ admet une espérance qui vaut : } E(X) = 1 - E(e^{-Y}) = 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1}$$

d) Toujours d'après le théorème de transfert : $E(e^{-2Y})$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}.f_Y(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, ce qui revient comme précédemment, à prouver la convergence simple de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}.a.e^{-ax}\mathrm{d}x = a\int_0^{+\infty} e^{-(a+2)x}\mathrm{d}x = \frac{a}{a+2}$$

La convergence de l'intégrale et sa valeur viennent encore de la question 4.a), cette fois avec $\lambda = a+2 > 0$.

Or : $e^{-2Y} = \left(e^{-Y}\right)^2$, on vient donc de prouver que la variable aléatoire e^{-Y} admet un moment d'ordre 2, donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(e^{-Y}) = E(e^{-2Y}) - E(e^{-Y})^2 = \frac{a}{a+2} - \frac{a^2}{(a+1)^2} = \frac{a(a+1)^2 - a^2(a+2)}{(a+2)(a+1)^2} = \frac{1}{(a+2)(a+1)^2}$$

Et comme : $e^{-Y} = 1 - X \iff X = 1 - e^{-Y}$, alors d'après les propriétés de la variance :

$$V(X) = (-1)^2.V(e^{-Y}) = \frac{1}{(a+2)(a+1)^2}$$

PROBLÈME

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abcisse $k+1$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on appelle X_n l'abscisse de ce point à l'instant n, et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: l'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile n'a cessé d'avancer pendant les $(k-1)$ premières étapes, pour revenir pour la première fois en 0 à l'instant k :

$$[T=1] = [X_1 = 0] \quad \text{et } \forall k \geqslant 2,\ [T=k] = [X_1 = 1] \cap \ldots \cap [X_{k-1} = k-1] \cap [X_k = 0] = \bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \cap [X_k = 0]$$

b) À l'instant 1, le mobile est soit au point d'abscisse 1 avec la probabilité p, soit au point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Donc $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et X_1 suit la *loi de Bernoulli* de paramètre p.

c) La formule des probabilités composées donne, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P(T=k) &= P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) \times \ldots \times P_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}(X_k = 0) \\ &= p^{k-1}(1-p) \end{aligned}$$

Et comme $P(T=1) = P(X_1 = 0) = 1-p$, la formule précédente est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que T **suit la loi géométrique de paramètre** $(1-p)$.

2. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $\boxed{\text{I.}}$ La propriété est vraie au rang 0 (et au rang 1).

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

   Soit $k \in [\![0;n]\!]$ quelconque : par hypothèse de récurrence, $k \in X_n(\Omega)$.
   On sait que si $X_n = k$, alors X_{n+1} pourra prendre la valeur 0 ou $k+1$; on peut donc affirmer que :
   $0 \in X_{n+1}(\Omega)$ et $\forall k \in X_n(\Omega),\ k+1 \in X_{n+1}(\Omega)$, donc :
   $\forall k \in [\![0;n]\!],\ k+1 \in X_{n+1}(\Omega) \iff \forall j \in [\![1;n+1]\!],\ j \in X_{n+1}(\Omega)$ (en posant $j = k+1$).
   Conclusion : on a bien $X_{n+1}(\Omega) = [\![0;n+1]\!]$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

   b) Utilisons le système complet d'événements $\{X_{n-1} = k\}_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ de probabilités toutes non nulles et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0) \times P(X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p).P(X_{n-1} = k) = (1-p).\sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) \end{aligned}$$

$$P(X_n = 0) = 1 - p \qquad \text{car } \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = 1.$$

3. a) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$: la seule façon d'avoir $[X_{n+1} = k]$ réalisé, est qu'à l'instant précédent, le mobile soit à l'abscisse précédente $k-1$, et ait avancé à l'instant n :

$$[X_{n+1} = k] = [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$$

   et la formule des probabilités composées donne bien :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k-1) \times P_{[X_n = k-1]}(X_{n+1} = k) = p.P(X_n = k-1)$$

   b) Montrons par une nouvelle récurrence, que $\mathcal{P}'(n)$: "$\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ P(X_n = k) = p^k(1-p)$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$ on a : $P(X_1 = 0) = 1 - p = p^0(1-p)$. Donc $\mathcal{P}'(1)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}'(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$: $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ P(X_n = k) = p^k(1-p)$, et considérons le rang $n+1$.

   On sait d'après la question précédente que : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$.
   Or $k-1 \in [\![0;n-1]\!]$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a alors :

$$P(X_{n+1} = k) = p.p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p)$$

   et pour $k = 0$: $P(X_{n+1} = 0) = 1 - p = p^0(1-p)$ (q. 2b)).
   Donc : $\forall k \in [\![0;n+1]\!],\ P(X_{n+1} = k) = p^k(1-p)$,
   et $\mathcal{P}'(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}'(n)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n-1]\!], \quad P(X_n = k) = p^k(1-p)$$

Pour $P(X_n = n)$: la relation de récurrence déjà utilisée ci-dessus nous donne,
pour $k = n$: $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_{n+1} = n+1) = pP(X_n = n)$.
Une récurrence rapide nous donne alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = n) = p^n$.
Interprétation probabiliste de ce résultat : pour que $X_n = n$, il faut qu'à chaque pas, l'abscisse du mobile ait augmenté d'une unité. Or chacun de ces pas “à droite” se fait avec la probabilité p.
D'où $P(X_n = n) = p^n$.

c) Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + P(X_n = n) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n \\ &= (1-p).\frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1 - p^n + p^n = 1\end{aligned}$$

4. Simulation informatique : dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
L'appel `rand()` qui renvoie au hasard un réel de $]0,1[$, permet de simuler n'importe quelle épreuve de Bernoulli de paramiètre $p \in]0,1[$, puisque : $P\big(\texttt{rand()} < p\big) = p$, c'est-à-dire que l'événement $[\texttt{rand()} < p]$ simule le succès.
Les deux lignes manquantes du code sont complètement évidentes :

```
n = input('Donner la valeur de n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = rand()
    if (u < 1/3) then
        X = X + 1
    else
        X = 0
    end
disp(X)
```

5. a) La méthode la plus efficace qui permet d'obtenir cette somme partielle d'une série géométrique dérivée, est de considérer la fonction $f : p \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{n} p^k$, qui est en fait polynômiale ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0,1[$, et par linéarité de la dérivation :

$$\forall p \in]0,1[, \quad f'(p) = \sum_{\emptyset 1}^{n} kp^{k-1}$$

Mais par ailleurs, $f(p)$ peut être vue comme la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de paramètre $p \neq 1$, qui admet l'expression explicite : $f(p) = \dfrac{1-p^n}{1-p}$.
Cette expression est également dérivable sur $]0,1[$, et par unicité de la dérivée :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} &= \frac{-np^{n-1}(1-p) - (1-p^n).(-1)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{-np^{n-1} + np^n + 1 - p^n}{(1-p)^2} \\ &= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}\end{aligned}$$

b) La variable aléatoire X_n est finie, donc admet une espérance qui vaut :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kp^k(1-p) + np^n = p(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n$$
$$= p(1-p)\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n - np^{n+1}}{1-p}$$
$$= \frac{-p^{n+1} + p}{1-p} = \boxed{\frac{p(1-p^n)}{1-p}}$$

6. a) Montrons en utilisant 3.a) que : $\forall n \in \mathbb{N},\ E({X_{n+1}}^2) = p\big(E({X_n}^2) + 2E(X_n) + 1\big)$.
On sait d'après 3.a) que : $\forall k \in [\![1; n+1]\!],\ P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$. On a donc :

$$E({X_{n+1}}^2) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) = p\sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_n = k-1)$$
$$\overset{[j=k-1]}{=} p\sum_{j=0}^{n}(j+1)^2 P(X_n = j) = p\sum_{j=0}^{n}(j^2 + 2j + 1)P(X_n = j)$$
$$= p[\sum_{j=0}^{n} j^2 P(X_n = j) + \sum_{j=0}^{n} jP(X_n = j) + \sum_{j=0}^{n} P(X_n = j)]$$
$$E(X_{n+1}^2) = p[E({X_n}^2) + E(X_n) + 1]$$

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = E({X_n}^2) + (2n-1).\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = E({X_{n+1}}^2) + (2(n+1)-1)\frac{p^{n+1+1}}{1-p} = p[E({X_n}^2) + 2E(X_n) + 1] + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}$$
$$= pE({X_n}^2) + \frac{2p^2(1-p^n)}{1-p} + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} = pE({X_n}^2) + \frac{(2n-1)p^{n+2} + p^2 + p}{1-p}$$
$$= p[E({X_n}^2) + \frac{(2n-1)p^{n+1}}{1-p}] + \frac{p(1+p)}{1-p} = \boxed{pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique ; on résout alors l'équation :

$$\ell = p.\ell + \frac{p(1+p)}{1-p} \iff \ell = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - \ell = pu_nP\dfrac{p(1+p)}{1-p} - (p\ell + \dfrac{p(1+p)}{1-p}) = p(u_n - \ell)$,
Donc la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison p, et : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = p^n(u_0 - \ell) + \ell$.
Or $u_0 = E({X_0}^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$ car ${X_0}^2 = 0$.

D'où : $\quad u_n = p^n\left(\dfrac{p(1-p+1+p)}{(1-p)^2}\right) + \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{p(1+p-2p^n)}{(1-p)^2}$.

On en déduit :

$$E({X_n}^2) = u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{p[1+p-2p^n-(2n-1)p^n+(2n-1)p^{n+1}]}{(1-p)^2}$$
$$= \frac{p[1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1}]}{(1-p)^2}$$

c) D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X_n) = E({X_n}^2) - (E(X_n))^2 &= \frac{p[1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1}]}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-2p^n+p^{2n})}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p\big(1-(2n+1)p^n+(2n+1)p^{n+1}-p^{2n+1}\big)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\big(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\big)
\end{aligned}$$