Exercices premier semestre

Chapitre 1

1. Equilibre partiel et surplus

Pour $D(p) = 200 – p$; $O(p) = p$

1. Caractérisez l'équilibre et calculez les surplus des agents.

L'équilibre de marché est caractérisé par le prix qui égalise l'offre et la demande.

$200 – p = p$

=> $200 = 2p$

=> $p^* = 100$

En tenant compte de la fonction d'offre,

$q^* = p^* = 100$

Le surplus du consommateur représente une évaluation monétaire de sa satisfaction après l'échange.

Pour le calculer, il nous faut le prix maximum, prix pour lequel la demande de marché s'annule :

pmax : $200 – p = 0$

=> pmax = 200

$Sc^* = [(200 – 100)100]/2$

$Sc^* = 5000$

Le surplus du producteur représente le profit total qu'il réalise après la vente de sa production.

Pour le calculer, il nous faut le prix minimum, prix auquel l'offre s'annule :

pmin : $p = 0$

=> pmin = 0

$Sp^* = [(100 – 0)100]/2$

Sp* = 5000

Le surplus collectif se calcule comme la somme des surplus des consommateurs et des producteurs :

Scoll* = Sc* + Sp*

=> Scoll* = 5000 + 5000

=> Scoll* = 10000

2. Supposons que l'Etat intervienne sur le marché en fixant le prix égal à 50. Calculez les nouveaux surplus et la perte sèche.

Pour calculer les nouveaux surplus, il nous faut les nouvelles quantités d'équilibre.

D(50) = 150

O(50) = 50

L'offre est inférieure à la demande, c'est donc elle qui conduit le marché.

Pour une offre de 50, les consommateurs étaient prêts à payer :

200 – p = 50

=> p = 150

Les consommateurs réalisent donc un surplus sur la différence entre leur prix de réserve et le prix d'équilibre, mais également sur la différence entre le prix d'équilibre pour une quantité de 50 et le prix qu'ils étaient prêts à payer pour cette même quantité.

Sc' = [(200 – 150)50]/2 + (150 – 50)50

=> Sc' = 6250

Sp' = [(50 – 0)50]/2

=> Sp' = 1250

Scoll' = Sc' + Sp'

=> Scoll’ = 6250 + 1250

=> Scoll’ = 7500

La perte sèche se calcule comme la baisse du surplus collectif

ΔScoll = Scoll* - Scoll’

=> ΔScoll = 10000 – 7500

=> ΔScoll = 2500

Les pertes des producteurs n’ont donc pas été compensées par les gains des consommateurs.

L’intervention étatique, en fiant un prix différent du prix d’équilibre, a permis une redistribution du surplus des producteurs aux consommateurs mais a conduit à une diminution du surplus collectif.

2. L’équilibre général

L’échange

Pour 2 agents A et B et 2 biens 1 et 2.

Ui = c1i*c2i

Les dotations initiales en biens 1 et 2 sont respectivement :

WA = (10 ; 30) et WB = (30 ; 10)

Calculez l’équilibre général.

Un équilibre général est un système de prix relatif égalisant l’offre et la demande sur tous les marchés simultanément et permettant aux deux échangistes de maximiser leur utilité après l’échange.

Les préférences des deux agents étant convexes, un équilibre général existe.

C’est donc en maximisant l’utilité des consommateurs sous contrainte de leur budget que l’on déduit la demande de marché, celle-ci représentant la quantité consommée par le consommateur pour tous niveaux de prix

Max $ui = c1i*c2i$

Sc : $p1w1i + p2w2i = p1c1i + p2c2i$

Le TMS2-1 représente la quantité de bien deux qu'il faut pour remplacer une unité de 1 tout en conservant la même satisfaction

$TMSi2\text{-}1 = Um1i / Um2i$

$TMSi2\text{-}1 = c2i/c1i$

Le TMS est décroissant, les biens sont imparfaitement substituables et il existe une solution intérieure.

A l'optimum, il n'existe aucune modification des consommations qui permettent d'accroitre l'utilité.

CO : $TMSi2\text{-}1 = c2i/c1i = p1/p2$

$\Rightarrow c2i = (p1 / p2)\ c1i$

On remplace cette expression dans la contrainte de budget

$\Rightarrow p1w1i + p2w2i = p1c1i + p2(p1 / p2)\ c1i$

$\Rightarrow p1w1i + p2w2i = p1c1i + p1c1i$

$\Rightarrow p1w1i + p2w2i = 2p1c1i$

$\Rightarrow$ $\mathbf{c1i^d = (p1w1i + p2w2i)/2p1}$

Si $c2i = (p1 / p2)\ c1i$ alors $c2i^d = (p1 / p2)\ c1i^d$

$\Rightarrow c2i^d = (p1 / p2)\ [(p1w1i + p2w2i)/2p1]$

$\Rightarrow c2i^d = (1/p2)[\ [(p1w1i + p2w2i)/2]$

$\Rightarrow$ $\mathbf{c2i^d = (p1w1i + p2w2i)/2p2}$

Sachant que les offres de marché sont représentées par les dotations initiales, on aboutit au système d'équation suivant pour caractériser l'équilibre général :

Marché 1 : $c1A^d + c1B^d = w1A + w1B$

Marché 2 : $c2A^d + c2B^d = w2A + w2B$

Le corolaire de la loi de Walras implique que si le marché 1 est à l'équilibre, le deuxième l'est aussi. On peut donc se contenter d'une seule équation pour trouver le système de prix relatifs d'équilibre sachant que s'ils équilibrent un marché, ils équilibrent l'autre.

Prenons par exemple celle du marché 1 :

$(p1w1A + p2w2A)/2p1 + (p1w1B + p2w2B)/2p1 = w1A + w1B$

$\Rightarrow (10p1 + 30p2)/2p1 + (30p1 + 10p2)/2p1 = 40$

$\Rightarrow (40p1 + 40p2)/2p1 = 40$

$\Rightarrow 40p1 + 40p2 = 80p1$

$\Rightarrow 40p2 = 40p1$

$\Rightarrow p2/p1 = 40/40$

$\Rightarrow p2^*/p1^* = 1$

Donc $p1^* = p2^*$

Les quantités d'équilibre sont simplement les quantités échangées pour $p1 = p2$.

On voit bien que, si $p1 = p2$, $c1A = c1B = c2A = c2B$.

Si $p1 = p2$, on remplace p2 par p1 (ou inversement) dans les équations de demande.

$c1A^* = (10p1^* + 30p1^*)/2p1^*$

$\Rightarrow c1A^* = 40p1^*/2p1^*$

Les deux $p1^*$ s'éliminent

$\Rightarrow c1A^* = 20$

Donc $c1A^* = c1B^* = c2A^* = c2B^* = 20$

L'EG est caractérisé par les valeurs suivantes : $[p1^*=p2^* \ ; \ c1A^* = c1B^* = c2A^* = c2B^* = 20]$

La production (cas 1)

Pour u = c_1c_2

$w_1 = 27$ (donc 1 est le facteur de production)

$c_2 = k^{1/2}$ avec k la quantité de bien 1 utilisée en facteur de production

$\theta = 100\%$ (la part du consommateur dans l'entreprise)

Calculez l'EG.

Un équilibre général est un système de prix relatif égalisant l'offre et la demande sur tous les marchés simultanément et permettant aux deux échangistes de maximiser leur utilité après l'échange.

Les préférences des deux agents étant convexes, la productivité marginale de 1 étant décroissante et les rendements d'échelle étant décroissants, un équilibre général existe.

C'est donc en maximisant l'utilité des consommateurs sous contrainte de leur budget que l'on déduit la demande de marché, celle-ci représentant la quantité consommée par le consommateur pour tous niveaux de prix

Max $u = c_1*c_2$

Sc : $p_1w_1 + \Pi = p_1c_1 + p_2c_2$

Le TMS2-1 représente la quantité de bien deux qu'il faut pour remplacer une unité de 1 tout en conservant la même satisfaction

TMS2-1 = Um1 / Um2

TMSi2-1 = c_2/c_1

Le TMS est décroissant, les biens sont imparfaitement substituables et il existe une solution intérieure.

A l'optimum, il n'existe aucune modification des consommations qui permettent d'accroitre l'utilité.

CO : TMS2-1 = $c2/c1 = p1/p2$

=> $c2 = (p1 / p2)\, c1$

On remplace cette expression dans la contrainte de budget

=> $p1w1 + \Pi = p1c1 + p2(p1 / p2)\, c1$

=> $p1w1 + \Pi = p1c1 + p1c1$

=> $p1w1 + \Pi = 2p1c1$

=> $\mathbf{c1^d = (p1w1 + \Pi)/2p1}$

Si $c2 = (p1 / p2)\, c1$ alors $c2^d = (p1 / p2)\, c1^d$

=> $c2^d = (p1 / p2)\, [(p1w1i + \Pi)/2p1]$

=> $c2^d = (1/p2)[\, [(p1w1 + \Pi)/2]$

=> $\mathbf{c2^d = (p1w1 + \Pi)/2p2}$

C'est en maximisant le profit du producteur que l'on obtient la demande de bien 1 comme facteur de production et l'offre de bien 2, celle-ci étant la quantité produite maximisant le profit du producteur pour tous les niveaux de prix.

Max $\Pi = p2c2 - p1k$

Sc : $c2 = k^{1/2}$

Si l'utilisation des facteurs est efficace, la production se trouvera sur la frontière de production, celle-ci représentant la production maximale de tous les biens si on utilise l'intégralité des facteurs de production.

Ici, $w1 = 27$.

Donc, $c1 + k = 27$.

Si $c2 = k^{1/2}$, alors $k = c2^2$

Donc, FP : $c1 + c2^2 = 27$

Le TMT2-1 mesure la quantité de 2 qu'il faut produire si l'on renonce à une unité de 1 tout en utilisant l'intégralité des facteurs de production.

$TMT2\text{-}1 = 1/2c2$

A l'optimum, il n'existe aucune modification de la production qui permettent d'accroitre le profit.

$TMT2\text{-}1 = 1/2c2 = p1/p2$

$\Rightarrow 2c2 = p2/p1$

$\Rightarrow \mathbf{c2^o = p2/2p1}$

Si $k = c2^2$, alors $k^d = c2^{o2}$

$\Rightarrow k^d = (p2/2p1)^2$

$\Rightarrow \mathbf{k^d = p2^2/4p1^2}$

La fonction de profit est donc la suivante :

$\Pi = p2c2^o - p1k^d$

$\Rightarrow \Pi = p2(p2/2p1) - p1(p2^2/4p1^2)$

$\Rightarrow \Pi = p2^2/2p1 - p2^2/4p1$

On met tout au même dénominateur (4p1)

$\Rightarrow \Pi = (2p2^2 - p2^2)/4p1$

$\mathbf{\Rightarrow \Pi = p2^2/4p1}$

On aboutit au système d'équation suivant pour caractériser l'équilibre général :

Marché 1 : $c1^d + k^d = w1A$

Marché 2 : $c2^d = c2^o$

Le corolaire de la loi de Walras implique que si le marché 1 est à l'équilibre, le deuxième l'est aussi. On peut donc se contenter d'une seule équation pour trouver le système de prix relatifs d'équilibre sachant que s'ils équilibrent un marché, ils équilibrent l'autre.

Prenons par exemple celle du marché 2 :

$$\mathbf{(p1w1 + \Pi)/2p2 = p2/2p1}$$

$$\Rightarrow [p1w1 + (p2^2/4p1)]/2p2 = p2/2p1$$

$$\Rightarrow [27p1 + (p2^2/4p1)]/2p2 = p2/2p1$$

$$\Rightarrow [27p1 + (p2^2/4p1)]/2p2 - p2/2p1 = 0$$

On met tout au même dénominateur (2p1p2)

$$\Rightarrow [27p1 + (p2^2/4p1)]*2p1/2p2 - p2*2p2/2p1 = 0$$

$$\Rightarrow (54p1^2 + p2^2/2 - 2p2^2)/2p1p2 = 0$$

$$\Rightarrow 54p1^2 + p2^2/2 - 2p2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (108p1^2 + p2^2 - 4p2^2)/2 = 0$$

$$\Rightarrow (108p1^2 - 3p2^2)/2 = 0$$

$$\Rightarrow 108p1^2 - 3p2^2 = 0$$

$$\Rightarrow 108p1^2 = 3p2^2$$

$$\Rightarrow p2^2/p1^2 = 108/3 = 36$$

$$\Rightarrow p2/p1 = 6$$

Pour simplifier les calculs, on pose p1 comme prix numéraire, c'est-à-dire comme prix par rapport auquel on mesure tous les autres.

On pose donc $p1^* = 1$

Alors, $p2^* = 6$

Pour trouver les quantités d'équilibre, on remplace les prix par leurs valeurs dans les expressions de demande.

$$c1^* = (p1^*27 + \Pi^*)/2p1^*$$

$$\Pi^* = p2^{*2}/4p1^*$$

$$\Rightarrow \Pi^* = 6^2/4*1$$

=> $\Pi^* = 9$

=> $c1^* = (1*27 + 9)/2*1$

=> $c1^* = 18$

=> $c2^* = p2^*/2p1^*$

=> $c2^* = 6/2*1$

=> $c2^* = 3$

=> $k^* = c2^{*2}$

=> $k^* = 3^2$

=> $k^* = 9$

L'EG est donc caractérisé par les valeurs suivantes : [$p2^*/p1^* = 6$; $c1^* = 18$; $c2^* = 3$; $k^* = \Pi^* = 9$].

La production (cas 2)

Pour $u = c1c2$

$L1 + L2 = 27$

E1 : $c1 = L1$

E2 : $c2 = \sqrt{L2}$

$\theta = 100\%$ (la part du consommateur dans l'entreprise)

1. Ecrire la frontière de production.

La frontière de production représente l'ensemble des productions maximales possible en utilisant l'intégralité des facteurs.

L'intégralité des facteurs est représentée dans l'expression :

$L1 + L2 = 27$

On sait déjà que $c1 = L1$

Si $c2 = \sqrt{L2}$, alors $L2 = c2^2$

D'où :

FP : $c1 + c2^2 = 27$

2. Calculez l'EG.

Soit s le prix du travail.

Posons s comme numéraire (prix par rapport auquel sont mesurés les autres prix). Donc $s = 1$.

Un équilibre général est un système de prix relatif égalisant l'offre et la demande sur tous les marchés simultanément et permettant aux deux échangistes de maximiser leur utilité après l'échange.

Les préférences des deux agents étant convexes et les rendements d'échelle étant non croissants, un équilibre général existe.

C'est donc en maximisant l'utilité des consommateurs sous contrainte de leur budget que l'on déduit la demande de marché, celle-ci représentant la quantité consommée par le consommateur pour tous niveaux de prix

Max $u = c1*c2$

Sc : $s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2 = p1c1 + p2c2$

Le TMS2-1 représente la quantité de bien deux qu'il faut pour remplacer une unité de 1 tout en conservant la même satisfaction

$TMS2\text{-}1 = Um1 / Um2$

$TMSi2\text{-}1 = c2/c1$

Le TMS est décroissant, les biens sont imparfaitement substituables et il existe une solution intérieure.

A l’optimum, il n’existe aucune modification des consommations qui permettent d’accroitre l’utilité.

CO : TMS2-1 = $c2/c1 = p1/p2$

=> $c2 = (p1 / p2)\, c1$

On remplace cette expression dans la contrainte de budget

=> $s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2 = p1c1 + p2(p1 / p2)\, c1$

=> $s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2 = p1c1 + p1c1$

=> $s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2 = 2p1c1$

=> $\mathbf{c1^d = [s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2] /2p1}$

Si $c2 = (p1 / p2)\, c1$ alors $c2^d = (p1 / p2)\, c1^d$

=> $c2^d = (p1 / p2)[\,[s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2] /2p1]$

=> $c2^d = (1/p2)[\,[s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2)/2]$

=> $\mathbf{c2^d = [s(L1 + L2) + \Pi1 + \Pi2]/2p2}$

C’est en maximisant le profit du producteur que l’on obtient la demande de travail et l’offre des biens de consommation, celle-ci étant la quantité produite maximisant le profit du producteur pour tous les niveaux de prix.

L’entreprise 1 est un cas particulier.

En effet, les rendements d’échelle pour cette entreprise sont constants.

Les rendements d’échelle désignent l’augmentation de la production lorsque les facteurs de production augmentent simultanément et proportionnellement.

Ici, $c1 = L1$.

Donc toute multiplication de L1 par un facteur $k > 1$ provoque une multiplication de c1 de ce même facteur. Le facteur de production et le produit augmentent de manière proportionnelle.

Lorsque les rendements sont constants, le profit est nul car le prix est égal au coût moyen et l’équilibre de la firme est indéterminé.

Démonstration :

E1 : max $\Pi 1 = p1c1 - sL1$

Sc : $c1 = L1$

Donc, le programme du producteur peut s'écrire :

Max $\Pi 1 = p1c1 - sc1$

A l'optimum, il n'existe aucune modification de la production qui permette d'augmenter le profit.

CO : $p1 = cm1$

=> $\mathbf{p1 = s}$

Nous n'obtenons donc aucune fonction d'offre pour le bien 1. En conséquence, il est impossible de déterminer une fonction de demande pour L1.

Si l'on remplace s par p1 dans l'expression du profit, nous obtenons :

$\Pi 1 = p1c1 - p1c1$

Donc $\mathbf{\Pi 1 = 0}$

Il est en revanche possible de déterminer la fonction d'offre et la fonction de demande de travail pour l'entreprise 2 puisque les rendements d'échelle pour cette entreprise sont décroissants (une augmentation simultanée et proportionnelle des facteurs entraine une augmentation moins que proportionnelle du produit).

Max $\Pi 2 = p2c2 - sL2$

Sc : $c2 = \sqrt{L2}$

Si l'utilisation des facteurs est efficace, la production se trouvera sur la frontière de production.

Ici, FP : $c1 + c2^2 = 27$

Le TMT2-1 mesure la quantité de 2 qu'il faut produire si l'on renonce à une unité de 1 tout en utilisant l'intégralité des facteurs de production.

$TMT2\text{-}1 = 1/2c2$

A l'optimum, il n'existe aucune modification de la production qui permettent d'accroitre le profit.

$TMT2\text{-}1 = 1/2c2 = p1/p2$

$\Rightarrow 2c2 = p2/p1$

$\Rightarrow$ $\mathbf{c2^o = p2/2p1}$

Si $L2 = c2^2$, alors $L2^d = c2^{o2}$

$\Rightarrow L2^d = (p2/2p1)^2$

$\Rightarrow$ $\mathbf{L2^d = p2^2/4p1^2}$

La fonction de profit est donc la suivante :

$\Pi2 = p2c2^o - sL2^d$

On sait que $s = p1$. Donc :

$\Pi2 = p2(p2/2p1) - p1(p2^2/4p1^2)$

$\Rightarrow \Pi2 = p2^2/2p1 - p2^2/4p1$

On met tout au même dénominateur (4p1)

$\Rightarrow \Pi2 = (2p2^2 - p2^2)/4p1$

$\mathbf{\Rightarrow \Pi2 = p2^2/4p1}$

On aboutit au système d'équation suivant pour caractériser l'équilibre général :

Marché 1 : $c1^d = c1°$

Marché 2 : $c2^d = c2^o$

Marché L : $L1^d + L2^d = 27$

Deux équations sur les trois sont indéterminées puisqu'il nous manque c1° et $L1^d$. Nous commençons donc avec l'équation du marché 2. Nous savons déjà que $p1 = s$ et, puisque s est numéraire :

$p1^*/s^* = 1 \Rightarrow p1^* = s^* = 1$

Nous avons déjà déterminé deux des trois prix de l'EG. Nous pouvons donc réécrire l'équation du marché 2 de la manière suivante :

$[s(L1^d + L2^d) + \Pi 1 + \Pi 2]/2p2 = p2/2p1$

$\Rightarrow [1x(L1^{d\,+}(p2^2/4x1^2)) + 0 + (p2^2/4x1)] / 2p2 = p2/2x1$

$\Rightarrow [(L1^{d\,+}(p2^2/4)) + (p2^2/4)] / 2p2 = p2/2$

$\Rightarrow (L1^d + (p2^2/2)) / 2p2 = p2/2$

$\Rightarrow (L1^d + (p2^2/2)) / 2p2 - p2/2 = 0$

On met tout au même dénominateur (2p2).

$\Rightarrow (L1^d + (p2^2/2) - p2^2) / 2p2 = 0$

$\Rightarrow (L1^d + (p2^2/2) - p2^2) = 0$

Il est donc possible de déterminer la fonction de demande de L1 :

$\Rightarrow L1^d + (p2^2 - 2p2^2)/2 = 0$

$\Rightarrow L1^d - p2^2/2 = 0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{L1^d = p2^2/2}$

L'équation du marché du travail devient donc déterminée et s'écrit :

$p2^2/2 + p2^2/4 = 27$

On met tout au même dénominateur (4).

$\Rightarrow 3p2^2/4 = 27$

$\Rightarrow 3p2^2 = 108$

$\Rightarrow p2^2 = 36$

$\Rightarrow p2 = \sqrt{36}$

$\Rightarrow p2^* = 6$

Nous avons donc les trois prix d'EG ($p1^* = s^* = 1$ et $p2^* = 6$). Nous pouvons donc déterminer les quantités d'équilibre.

Sur le marché du travail :

$L1^* = p2^{*2}/2 = 6^2/2$

=> $L1^* = 18$

Si $L1^* + L2^* = 27$

=> $L2^* = 27 – L1^*$

=> $L2^* = 27 – 18$

=> $L2^* = 9$

Sur le marché des biens de consommation, pour calculer les quantités, il nous faut le profit de l'entreprise 2 :

$\Pi2^* = p2^{*2}/4p1^*$

=> $\Pi2^* = 6^2/4$

=> $\Pi2^* = 9$

Alors :

$c1^* = [s^*(L1^* + L2^*) + \Pi1^* + \Pi2^*] / 2p1^*$

=> $c1^* = (1x27 + 0 + 9) / 2$

=> $c1^* = 18$

Si $c2 = \sqrt{L2}$, alors $c2^* = \sqrt{L2^*}$

=> $c2^* = \sqrt{9}$

=> $c2^* = 3$

L'EG est donc caractérisé par les valeurs suivantes : [$p1^* = s^* = 1$; $p2^* = 6$; $c1^* = 18$; $c2^* = 3$; $L1^* = 18$; $\Pi1^* = 0$; $L2^* = \Pi2^* = 9$].

La production (cas 3)

Pour 2 biens 1 et 2 et deux facteurs de production K et L.

Pour s le prix du travail et r le prix du capital.

E1 : $c1 = K1^{3/4}L1^{1/4}$

E2 : $c2 = K2^{3/4}L2^{1/4}$

$L1 + L2 = 100$

$K1 + K2 = 100$

1. Déterminer la frontière de production et le TMT_{2-1}.

La frontière de production représente les productions maximales réalisables en utilisant l'intégralité des facteurs.

Seulement, ces productions maximales sont réalisables pour différentes combinaisons de K et L pour chaque entreprise. Il faut donc trouver cette combinaison optimale avant de pouvoir écrire la FP.

A l'optimum, il n'existe aucune modification de la répartition de K et L qui permette d'augmenter le profit.

CO : $TMST^{i}_{K-L} = Pml^{i}/Pmk^{i} = s/r$

$PmL^{i} = ¼(Ki^{3/4}Li^{(1/4-1)})$

$\Rightarrow ¼(Ki^{3/4}Li^{-3/4})$

$\Rightarrow$ **$PmL^{i} = Ki^{3/4}/4\ Li^{3/4}$**

$PmKi = ¾(Ki^{(3/4-1)}L1^{1/4})$

$\Rightarrow ¾(Ki^{-1/4}Li^{1/4})$

$\Rightarrow$ **$PmKi = 3L1^{1/4}/4Ki^{1/4}$**

$TMST^i_{K-L} = Pml^i/Pmk^i = (Ki^{3/4}/4\ Li^{3/4}) / (3L1i^{/4}/4Ki^{1/4})$

$\Rightarrow (Ki^{3/4}/4\ Li^{3/4})\ (4Ki^{1/4}/\ 3Li^{1/4})$

$\Rightarrow (4Ki^{3/4}Ki^{1/4}) / (12\ Li^{3/4}\ Li^{1/4})$

$\Rightarrow Ki^{3/4}Ki^{1/4}/3\ Li^{3/4}\ Li^{1/4}$

$\Rightarrow$ **$TMST^i_{K-L} = Ki/3L1$**

Si les deux TMST sont égaux au rapport des prix des facteurs, ils sont égaux entre eux :

$TMST^1_{K-L} = TMST^2_{K-L}$

=> K1/3L1 = K2/3L2

=> K1/K2 = 3L1/3L2

=> K1/K2 = L1/L2

On sait que L1 + L2 = K1 + K2 = 100.

D’où :

L1 = 100 – L2

K1 = 100 – K2

=> (100 – K2)/K2 = (100 – L2)/L2

=> [(100 – K2)/K2] – [(100 – L2)/L2] = 0

On met tout au même dénominateur (K2L2) :

=> [(100 – K2)L2 – (100 – L2)K2] / K2L2 = 0

=> (100 – K2)L2 – (100 – L2)K2 = 0

=> 100L2 – K2L2 – 100K2 + L2K2 = 0

=> 100L2 – 100K2 = 0

=> 100L2 = 100K2

=> **L2 = K2**

A l'optimum, la firme 2 utilise autant de capital que de travail.

Par symétrie :

L1 = K1

Donc Li = Ki

Si on remplace cette expression dans la fonction de production, on aboutit à

$ci = Ki^{3/4}Li^{1/4}$

$\Rightarrow ci = Ki^{3/4}Ki^{1/4}$

$\Rightarrow ci = Ki$

Donc :

c1 = K1 et c2 = K2

Si K1 + K2 = 100

Alors

FP : c1 + c2 = 100

Le TMT2-1 mesure la quantité de 2 qu'il faut produire si l'on renonce à une unité de 1 tout en utilisant l'intégralité des facteurs de production.

TMT2-1 = 1

2. Pour u = c1c2 ; θ = 100% (la part du consommateur dans l'entreprise) et s = 1, calculer l'EG.

Un équilibre général est un système de prix relatif égalisant l'offre et la demande sur tous les marchés simultanément et permettant aux deux échangistes de maximiser leur utilité après l'échange.

Les préférences des deux agents étant convexes, les productivités marginales étant décroissantes et les rendements d'échelle étant non croissants, un équilibre général existe.

C'est donc en maximisant l'utilité des consommateurs sous contrainte de leur budget que l'on déduit la demande de marché, celle-ci représentant la quantité consommée par le consommateur pour tous niveaux de prix

Max u = $c1*c2$

Sc : $s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2 = p1c1 + p2c2$

Le TMS2-1 représente la quantité de bien deux qu'il faut pour remplacer une unité de 1 tout en conservant la même satisfaction

TMS2-1 = Um1 / Um2

TMSi2-1 = $c2/c1$

Le TMS est décroissant, les biens sont imparfaitement substituables et il existe une solution intérieure.

A l'optimum, il n'existe aucune modification des consommations qui permettent d'accroitre l'utilité.

CO : TMS2-1 = $c2/c1 = p1/p2$

=> $c2 = (p1 / p2)\, c1$

On remplace cette expression dans la contrainte de budget

=> $s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2 = p1c1 + p2(p1 / p2)\, c1$

=> $s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2 = p1c1 + p1c1$

=> $s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2 = 2p1c1$

=> $\mathbf{c1^d = [s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2] /2p1}$

Si $c2 = (p1 / p2)\, c1$ alors $c2^d = (p1 / p2)\, c1^d$

=> $c2^d = (p1 / p2)[\, [s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2] /2p1]$

=> $c2^d = (1/p2)[[\, s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2)/2]$

=> $\mathbf{c2^d = [s(L1 + L2) + r(K1 + K2) + \Pi1 + \Pi2]/2p2}$

C'est en maximisant le profit du producteur que l'on obtient la demande de travail et l'offre des biens de consommation, celle-ci étant la quantité produite maximisant le profit du producteur pour tous les niveaux de prix.

max Πi = pici – sLi – rKi

Sc : ci = $Ki^{3/4}Li^{1/4}$

Si l'utilisation des facteurs est efficace, la production se trouvera sur la frontière de production.

A l'optimum, il n'existe aucune modification de la production qui permettant d'accroitre le profit.

CO : TMT2-1 = 1 = p1/p2

=> p2/p1 = 1

=> p1* = p2*

Si p1* = p2* alors, c1* = c2*

On sait que ci = Ki et que Ki = L1.

Donc c1* = K1* = L1* et c2* = K2* = L2*.

Il nous manque les profits pour déduire les quantités d'équilibre.

Πi* = pi*ci* - s*Li* - r*Ki*

=> Πi* = pi*ci* - Li* - r*Ki*

=> Πi* = pi*ci* - ci* - r*ci*

Si l'entreprise maximise son profit, alors :

CO : pi* = cmi*

=> pi* = 1 + r*

=> r* = pi – 1

Donc : Πi* = pi*ci* - ci* - (pi – 1)ci*

=> $\Pi i^* = pi^*ci^* - ci^* - pici^* - ci^*$

=> $\Pi i^* = 0$

Donc $\Pi 1^* = \Pi 2^* = 0$

Alors, puisque $c1^* = c2^*$,

$ci^* = [s^*(L1^* + L2^*) + r^*(K1^* + K2^*) + \Pi 1^* + \Pi 2^*] /2pi^*$

=> $ci^* = (1x100 + (pi^* – 1)x100 + 0 + 0) /2pi^*$

=> $ci^* = (100 + 100pi^* - 100) / 2pi^*$

=> $ci^* = (100pi^*) / 2pi^*$

=> $ci^*= 50$.

Donc : $c1^* = c2^* = K1^* = K2^* = L1^* = L2^* = 50$

Si $TMST^{i}_{K-L} = Ki/3Li= s/r$

Alors $s^*/r^* = Ki^*/3Li^*$

=> $1/r^* = 50 / 3x50$

=> $1/r^* = 50/150 = 1/3$

=> $r^* = 3$

Si $r^* = pi^* - 1$, alors :

$3 = pi^* - 1$

=> $pi^* = 4$

Donc : $p1^* = p2^* = 4$

L'EG est donc caractérisé par les valeurs suivantes : [= $s^* = 1$; $r^* = 3$; $p1^* = p2^* = 4$; $c1^* = c2^* = K1^* = K2^* = L1^* = L2^* = 50$].

4. L'optimum

L'échange

Pour $u_A = c_{1A}c_{2A}$ et $u_B = c_{1B}c_{2B}$

$c_{1A} + c_{1B} = 100$

$c_{2A} + c_{2B} = 100$

Calculer la courbe des contrats.

La courbe des contrats définit l'ensemble des optima de Pareto atteignables à partir des répartitions des dotations initiales, c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels il est impossible d'augmenter la satisfaction d'un agent sans diminuer celle de l'autre.

A l'optimum, les TMS de tous les agents sont égaux entre eux :

$TMS^A_{2-1} = TMS^B_{2-1}$

Le TMS_{2-1} désigne la quantité de bien 2 à laquelle on renonce pour consommer une unité de bien 1 en plus et garder le même niveau de satisfaction.

=> $TMS^i_{2-1} = Um^i_1/Um^i_2 = \mathbf{c_{2i}/c_{1i}}$

La courbe des contrats est donc caractérisée par l'équation suivante :

CC : $c_{2A}/c_{1A} = c_{2B}/c_{1B}$

Avec :

$c_{1A} = 100 – c_{1B}$

$c_{2A} = 100 – c_{2B}$

=> $(100 – c_{2B}) / (100 – c_{1B}) = c_{2B}/c_{1B}$

=> $100 – c_{2B} = (c_{2B}/c_{1B}) (100 – c_{1B})$

=> $100 - c2B = (100c2B - c1Bc2B) / c1B$

=> $100 - c2B - (100c2B - c1Bc2B) / c1B = 0$

On met tout au même dénominateur (c1B) :

=> $(100c1B - c2Bc1B - 100c2B + c1Bc2B) / c1B = 0$

=> $100c1B - c2Bc1B - 100c2B + c1Bc2B = 0$

=> $100c1B - 100c2B = 0$

=> $100c1B = 100c2B$

=> $c1B = c2B$

Par symétrie :

$c1A = c2A$

La courbe des contrats est donc caractérisée, pour les deux agents, par l'ensemble des répartitions des consommations pour lesquelles chacun consomme autant de bien 1 que de bien 2.

La production (cas 1)

Pour $u = c1c2$

$c1 = k$ (c1 est le facteur de production)

$w2 = 100$

Calculer le plan de production optimal.

Le plan de production optimal se trouve sur la frontière de production, celle-ci définit l'ensemble des plans de production pour lesquels il est impossible d'augmenter la production de bien 1 sans diminuer celle de bien 2.

A l'optimum, le TMS de l'agent est égal au TMT.

Le TMS2-1 désigne la quantité de bien 2 à laquelle on renonce pour consommer une unité de bien 1 en plus et garder le même niveau de satisfaction.

Le TMT2-1 désigne la quantité de bien 2 à laquelle il faut renoncer pour produire une unité de bien 1 en plus en utilisant l'intégralité des facteurs de production.

CO : TMS2-1 = TMT2-1

TMS2-1 = c2/c1

Pour trouver le TMT, il faut trouver la frontière de production :

Si w2 = 100, alors c2 + k = 100.

On sait que c1 = k.

Donc :

FP : c1 + c2 = 100

=> **TMT2-1 = 1**

Donc, à l'optimum :

c2/c1 = 1

=> c2 = c1

En remplaçant c2 par c1 dans la FP, on obtient :

c1 + c1 = 100

=> 2c1 = 100

=> c1 = 50.

Si à l'optimum c1 = c2, alors c1 = c2 = 50.

Le plan optimal de production est caractérisé par la répartition des productions suivante : c1 = c2 = 50.

La production (cas 2)

Pour $u = c_1c_2$

$c_i = \sqrt{L_i}$

$L_1 + L_2 = 50$

Calculer le plan de production optimal.

Le plan de production optimal se trouve sur la frontière de production, celle-ci définit l'ensemble des plans de production pour lesquels il est impossible d'augmenter la production de bien 1 sans diminuer celle de bien 2.

A l'optimum, le TMS de l'agent est égal au TMT.

Le TMS_{2-1} désigne la quantité de bien 2 à laquelle on renonce pour consommer une unité de bien 1 en plus et garder le même niveau de satisfaction.

Le TMT_{2-1} désigne la quantité de bien 2 à laquelle il faut renoncer pour produire une unité de bien 1 en plus en utilisant l'intégralité des facteurs de production.

CO : $TMS_{2-1} = TMT_{2-1}$

$TMS_{2-1} = c_2/c_1$

Pour trouver le TMT, il faut trouver la frontière de production :

Si $c_i = \sqrt{L_i}$ alors $L_i = c_i^2$.

Si $L_1 + L_2 = 50$, alors :

FP : $c_1^2 + c_2^2 = 50$

=> **$TMT_{2-1} = c_1/c_2$**

Donc, à l'optimum :

$c_2/c_1 = c_1/c_2$

=> $c_2 = c_1^2/c_2$

=> $c_2^2 = c_1^2$

Donc à l'optimum, **$c_1 = c_2$.**

En remplaçant $c2^2$ par $c1^2$ dans la FP, on obtient :

$c1^2 + c1^2 = 50$

=> $2c1^2 = 50$

=> $c1^2 = 25$

=> $c1 = 5$.

Si à l'optimum $c1 = c2$, alors $c1 = c2 = 5$.

Le plan optimal de production est caractérisé par la répartition des productions suivante : $c1 = c2 = 5$.

La production (cas 2)

Pour $u = c1c2$

$ci = Ki^{1/2} Li^{1/2}$

$L1 + L2 = 100$

$K1 + K2 = 100$

Calculer la courbe des contrats des facteurs de production.

La courbe des contrats des facteurs de production désigne l'ensemble des répartitions de capital et de travail pour lesquelles on ne peut produire avec une unité de travail en plus sans renoncer à du capital.

A l'optimum, les TMSTK-L des deux entreprises sont égaux entre eux.

Le TMSTK-L désigne la quantité de capital à laquelle il faut renoncer si l'on veut utiliser une unité de travail en plus et garder le même niveau de production (ce niveau sera le plan optimal de production).

$TMSTK\text{-}L = PmLi/PmKi = (1/2Ki^{1/2}Li^{-1/2}) / (1/2Ki^{-1/2}Li^{1/2}) = (Ki^{1/2}/2Li^{1/2}) / (Li^{1/2}/2Ki^{1/2})$

=> $(Ki^{1/2}/2Li^{1/2}) (2Ki^{1/2}/Li^{1/2})$

=> **TMSTK-L = Ki/Li**

Donc, à l'optimum : K1/L1 = K2/L2

Avec

K1 = 100 – K2

L1 = 100 – L2

=> (100 – K2) / (100 – L2) = K2/L2

=> 100 – K2 = (K2/L2) (100 – L2)

=> 100 – K2 = (100K2 – K2L2)/L2

=> (100 – K2) - (100K2 – K2L2)/L2 = 0

On met tout au même dénominateur (L2)

=> (100L2 – K2L2 – 100K2 + K2L2)/L2 = 0

=> 100L2 – K2L2 – 100K2 + K2L2 = 0

=> 100L2 – 100K2 = 0

=> 100L2 = 100K2

=> L2 = K2

Par symétrie : L1 = K1.

La courbe des contrats des facteurs de production est donc caractérisée, pour les deux entreprises, par l'ensemble des répartitions des facteurs pour lesquelles chacun utilise autant de capital que de travail.

Partiel janvier 2018

Soit une économie comprenant deux biens, notés x et y et deux agents notés A et B.

Si TMSAy-x = TMSBy-x < TMTy-x

Expliquez le mécanisme d'ajustement.

A l'optimum de Pareto, il n'existe aucune modification de la production qui permettrait d'augmenter l'utilité des consommateurs tout en utilisant l'intégralité des facteurs de production.

Donc $TMSAy-x = TMSBy-x = TMTy-x$

$\Rightarrow Umxi/Umyi = Cmx/Cmy$

Si $Umxi/Umyi < Cmx/Cmy$, alors $Umxi/cmx < Umyi/Cmy$.

Un euro supplémentaire dépensé en production rapporte plus de satisfaction si on le dépense dans la production de y que dans la production de x. L'utilité des consommateurs peut donc encore augmenter. Ainsi, on augmente marginalement la production de y et on diminue marginalement la production de x.

6. Le dilemme du prisonnier

Paul et Pierre se demandent de manière séparée s'ils doivent pêcher de manière raisonnée afin de respecter la reproduction des ressources maritimes. Si les 2 pratiquent une pêche raisonnée, leurs gains sont égaux à 100. S'ils pêchent davantage, ils obtiennent un gain de 50 au détriment de l'autre qui subit une perte de 50. En cas de surpêche des deux, les gains individuels diminuent de 20.

1. Construire la matrice de gain.

La matrice des gains représente les gains dont bénéficient les joueurs pour chaque combinaison de stratégies choisies.

Pierre			
Paul		Pêche raisonnée	Surpêche
	Pêche raisonnée	(100, 100)	(50, 150)
	Surpêche	(150, 50)	(80, 80)

2. Caractérisez l'équilibre de Nash. Commentez.

A l'équilibre de Nash, il n'existe aucune déviation profitable. Chaque joueur a choisi sa meilleure réponse pour une stratégie donnée de l'autre.

Si Paul surpêche, Pierre gagne 50 pour une pêche raisonnée et 80 pour une surpêche.

Si Paul pêche de manière raisonnée, Pierre gagne 100 pour une pêche raisonnée et 150 pour une surpêche.

Quelle que soit la stratégie choisie par Paul, Pierre a intérêt à sur-pêcher. Symétriquement pour Paul.

L'équilibre de Nash est atteint dans le cas où les deux sur-pêchent et obtiennent les gains (80, 80).

Cette situation n'est pas un optimum de Pareto puisqu'en pratiquant une pêche raisonnée tous les deux, ils pourraient chacun augmenter leur gain sans diminuer celui de l'autre.

3. L'Etat met en place des quotas et des contrôles aléatoires par la douane pour punir la surpêche. La probabilité de contrôle est égale à q et l'amande en cas de non-respect de la réglementation est de a.

a) Pour quelles valeurs de a et q la pêche raisonnée est-elle une stratégie d'équilibre ?

Si Pierre pratique une pêche raisonnée, Paul gagne 50 pour la surpêche (il passe de 100 à 150). Si Pierre surpêche, Paul gagne 30 pour la surpêche (il passe de 50 à 80). Donc Paul peut gagner au maximum 50 en pratiquant la surpêche et de même pour Paul.

Donc, pour inciter les deux à ne pas sur-pêcher, il faut que l'amande pondérée par la probabilité d'être contrôlé soit suffisamment élevée pour compenser le gain maximal.

D'où : $aq > 50$

b) Pour quelles valeurs de a et de q la pêche raisonnée est-elle une stratégie dominante ?

Une stratégie est dominante si elle est optimale quelle-que soit la stratégie choisie par l'autre.

Ici, la pêche raisonnée est une stratégie dominante pour $aq > 50$.

Chapitre 2

1. Externalités et optimum

Pour $CT1 = 0.5q1^2$ et $CT2 = 0.5q2^2 + 0.5q1^2$

Pour D^{-1} : $p = 350 – 0.5q$

$q = q1 + q2$

1. Caractérisez l'équilibre de CPP (p*, q*, surplus).

Chaque entreprise cherche à maximiser son profit. Ici, l'entreprise 1 émet une externalité négative de production.

Pour les deux entreprises :

Max $\Pi 1 = pq1 – 0.5q1^2$

Max $\Pi 2 = pq2 – 0.5q2^2 - 0.5q1^2$

A l'optimum, il n'existe aucune modification de la production qui permette d'augmenter le profit.

CO1 : $p = Cm1 = q1$

CO2 : $p = Cm2 = q2$

Pour trouver l'équilibre, il faut la fonction d'offre :

$q° = q1 + q2 = p + p = 2p$

$O^{\circ -1}$: $p = 0.5q$

A l'équilibre, l'offre est égale à la demande :

$0.5q = 350 – 0.5q$

=> $q^* = 350$

$p^* = 0.5q^* = 0.5x350$

=> $p^* = 175$

Si $q1 = q2 = p$

=> $q1^* = q2^* = 175$

Le surplus du consommateur représente une évaluation monétaire de sa satisfaction après l'achat. Pour le calculer, il nous faut le prix de réserve, pris pour lequel la demande s'annule.

$pmax = 350 – 0.5x0$

pmax = 350

$Sc^* = [(350 – 50)350]/2$

=> $Sc^* = 30625$

Le surplus des producteurs représente leurs profits (étant donné qu'il n'y a pas de coûts fixes).

$\Pi1^* = 175 \text{ x } 175 – 0.5 \text{ x } 175^2 = 15312.5$

$\Pi2^* = 175 \text{ x } 175 – 0.5 \text{ x } 175^2 - 0.5 \text{ x } 175^2 = 0$

$Sp^* = 15312.5$

Le surplus collectif se calcule comme la somme du surplus des consommateurs et des producteurs.

$Scoll^* = 30625 + 15312.5$

=> $Scoll^* = 45937.5$

L'équilibre de CPP est donc caractérisé par les valeurs suivantes : $p^* = q1^* = q2^* = 175$, $q^* = 350$, $Sc^* = 30625$, $Sp^* = 15312.5$, $Scoll^* = 45937.5$.

2. Caractérisez l'optimum social de ce marché.

A l'optimum, l'entreprise responsable de l'externalité en tient compte dans son programme de maximisation.

Elle ne maximise plus son profit en fonction du cout marginal privé, mais du cout marginal social.

Cms = Cmp + Cme avec Cme le coût marginal de l'externalité (ici, supporté par l'entreprise 2).

Cm1s = Cm1 + Cme

Cme = q1

Donc, Cm1s = 2q1

CO1 : p = Cm1s = 2q1

CO2 : p = Cm2 = q2

D'où, q1 = 0.5p

q = q1 + q2 = p + 0.5p = 1.5p

O^{-1} : p = 2/3(q)

A l'équilibre, l'offre est égale à la demande :

2/3(q) = 350 – 1/2(q)

=> (2/3 + 1/2) q = 350

On met le membre de gauche au même dénominateur (6) :

7/6 (q) = 350

=> q = 350 x 6/7

=> $q^{opt} = 300$

$p^{opt} = 2/3 \times 300$

=> $p^{opt} = 200$

$q2^{opt} = p^{opt} = 200$

$q1^{opt} = 0.5p^{opt} = 100$

$Sc^{opt} = [(350 - 200)300]/2$

$Sc^{opt} = 22500$

$\Pi 1^{opt} = 200 \times 100 - 0.5 \times 100^2 = 15000$

$\Pi 2^{opt} = 200 \times 100 - 0.5 \times 200^2 - 0.5 \times 100^2 = 15000$

$SP^{opt} = 30000$

$Scoll^{opt} = 52500$

L'optimum social est donc caractérisé par les valeurs suivantes : p = q2 = 200, q1 = 100 q = 300, Sc = 22500, Sp = 30000, Scoll = 52500.

A l'équilibre de CPP, la firme 1 surproduit par rapport à l'optimum. L'équilibre de CPP engendre donc une perte sèche, calculée comme la différence des deux surplus collectifs.

$\Delta Scoll = 52500 - 45937.5$

=> $\Delta Scoll = 6562.5$

La première situation est donc bien sous-optimale.

2. Logique interventionniste

Pour $CT1 = 0.5q1^2$ et $CT2 = 0.5q2^2 + 0.5q1^2$

Pour D^{-1} : $p = 350 - 0.5q$

$q = q1 + q2$

1. L'Etat décide de taxer la firme émettrice d'une externalité à l'unité. Caractérisez la taxe optimale et l'optimum social.

L'entreprise 1 émet une externalité de production négative. Elle surproduit par rapport à l'optimum.

A l'optimum, l'entreprise responsable de l'externalité en tient compte dans son programme de maximisation.

Elle ne maximise plus son profit en fonction du cout marginal privé, mais du cout marginal social.

Cms = Cmp + Cme avec Cme le coût marginal de l'externalité (ici, supporté par l'entreprise 2).

Cm1s = Cm1 + Cme

Pour que l'entreprise tienne compte du Cms, la taxe doit couvrir la valeur du Cme.

Pour les deux entreprises :

Max $\Pi 1 = pq1 - 0.5q1^2 - tq1$

Max $\Pi 2 = pq2 - 0.5q2^2 - 0.5q1^2$

Pour **t = Cme = q1**

CO1 : p = Cms = 2q1

CO2 : p = Cm2 = q2

q = q1 + q2 avec q1 = 0.5p

=> **q = p + 0.5p = 1.5p**

Pour trouver l'équilibre, il faut la fonction d'offre :

$O^{\circ -1}$: p = (2/3)q

A l'équilibre, l'offre est égale à la demande :

2/3(q) = 350 – 1/2(q)

=> (2/3 + 1/2) q = 350

On met le membre de gauche au même dénominateur (6) :

7/6 (q) = 350

=> q = 350 x 6/7

=> $q^{opt} = 300$

p^{opt} = 2/3 x 300

=> $p^{opt} = 200$

$q2^{opt} = p^{opt} = 200$

$q1^{opt} = 0.5p^{opt} = 100$

$t = q1^{opt} = 100$

Le surplus du consommateur représente une évaluation monétaire de sa satisfaction après l'achat. Pour le calculer, il nous faut le prix de réserve, pris pour lequel la demande s'annule.

pmax = 350 – 0.5x0

pmax = 350

$Sc^{opt} = [(350 – 200)300]/2$

$Sc^{opt} = 22500$

Le surplus des producteurs représente leurs profits (étant donné qu'il n'y a pas de coûts fixes).

$\Pi1^{opt} = 200 \times 100 – 0.5 \times 100^2 - 100 \times 100 = 5000$

$\Pi2^{opt} = 200 \times 100 – 0.5 \times 200^2 - 0.5 \times 100^2 = 15000$

$SP^{opt} = 20000$

Le surplus collectif se calcule comme la somme du surplus des consommateurs et des producteurs.

$Scoll^{opt} = 42500$

Puisque l'Etat prélève une taxe, il dispose lui aussi d'un surplus (ses recettes fiscales).

Se = 100 x 100

=> Se = 10000

Le surplus global recouvre le surplus collectif et le surplus de l'Etat.

Sg = 52500.

L'optimum social est donc caractérisé par les valeurs suivantes : p = q2 = 200, q1 = 100 q = 300, Sc = 22500, Sp = 20000, Scoll = 42500, Se = 10000, Sg = 52500

2. Calculez les transferts forfaitaires de l'Etat et son nouveau surplus.

L'Etat peut décider d'utiliser des transferts forfaitaires pour neutraliser don intervention.

Pour ça, il faut les valeurs de l'équilibre de CPP.

L'équilibre de CPP est donc caractérisé par les valeurs suivantes : $p^* = q1^* = q2^* = 175$, $q^* = 350$, $Sc^* = 30625$, $Sp^* = 15312.5$, $Scoll^* = 45937.5$ (cf. exercice précédent).

IFc = 2250 – 30625 = - 8125

IF1 = 5000 – 15312.5 = - 10312.5

IF2 = 15000 – 0 = 15000

L'Etat prélève donc à l'entreprise 2 pour transférer aux consommateurs et à l'entreprise 1. La différence entre les deux (ce qu'il prélève et ce qu'il transfère) est son surplus :

$Se = 10000 + 15000 – 8125 – 10312.5$

$Se = 6562.5$

Les surplus sont redevenus ceux de la concurrence, le surplus global est toujours le même.

3. L'Etat décide d'annuler la taxe et de subventionner à la place. Calculez la subvention optimale, l'optimum social et les transferts forfaitaires.

A l'optimum, l'entreprise 1 produit le niveau de production socialement optimal. L'Etat doit donc la rémunérer pour l'inciter à réduire sa production. L'entreprise 1 doit donc maximiser son profit en fonction de son coût marginal social :

$Cms = Cmp + Cme$ avec Cme le coût marginal de l'externalité (ici, supporté par l'entreprise 2).

$Cm1s = Cm1 + Cme$

Pour que l'entreprise tienne compte du Cms, la subvention doit couvrir la valeur du Cme.

Pour les deux entreprises :

$Max\ \Pi1 = pq1 – 0.5q1^2 + s(q1^* - q1)$

Max $\Pi 2 = pq2 - 0.5q2^2 - 0.5q1^2$

Pour **$s = Cme = q1$**

CO1 : $p = Cms = 2q1$

CO2 : $p = Cm2 = q2$

$q = q1 + q2$ avec $q1 = 0.5p$

=> **$q = p + 0.5p = 1.5p$**

Pour trouver l'équilibre, il faut la fonction d'offre :

$O^{\circ -1}$: $p = (2/3)q$

A l'équilibre, l'offre est égale à la demande :

$2/3(q) = 350 - 1/2(q)$

=> $(2/3 + 1/2)\, q = 350$

On met le membre de gauche au même dénominateur (6) :

$7/6\ (q) = 350$

=> $q = 350 \times 6/7$

=> $q^{opt} = 300$

$p^{opt} = 2/3 \times 300$

=> $p^{opt} = 200$

$q2^{opt} = p^{opt} = 200$

$q1^{opt} = 0.5p^{opt} = 100$

$t = q1^{opt} = 100$

$Sc^{opt} = [(350 - 200)300]/2$

$Sc^{opt} = 22500$

Le surplus des producteurs représente leurs profits (étant donné qu'il n'y a pas de coûts fixes).

$\Pi 1^{opt} = 200 \text{ x } 100 – 0.5 \text{ x } 100^2 + 100 \text{ x } (175 – 100) = 22500$

$\Pi 2^{opt} = 200 \text{ x } 100 – 0.5 \text{ x } 200^2 - 0.5 \text{ x } 100^2 = 15000$

$SP^{opt} = 37500$

$Scoll^{opt} = 60000$

Puisque l'Etat verse une subvention, il dispose lui aussi d'un surplus (qui sera négatif).

Se = - [100 x (175 – 100)]

=> Se = - 7500

Sg = 52500.

L'optimum social est donc caractérisé par les valeurs suivantes : p = q2 = 200, q1 = 100 q = 300, Sc = 22500, Sp = 37500, Scoll = 60000, Se = - 7500, Sg = 52500

L'Etat peut décider d'utiliser des transferts forfaitaires pour neutraliser don intervention.

IFc = 2250 – 30625 = - 8125

IF1 = 22500 – 15312.5 = 7187.5

IF2 = 15000 – 0 = 15000

L'Etat prélève donc aux deux entreprises pour transférer aux consommateurs. La différence entre les deux (ce qu'il prélève et ce qu'il transfère) est son surplus :

Se = 15000 + 7187.5 – 7500 – 8125

Se = 6562.5

Les surplus sont redevenus ceux de la concurrence, le surplus global est toujours le même.

3. Logique transformatrice

Fusion (partiel 2018)

Pour $CT1 = q1^2$ et $CT2 = q2^2 + 8q1$

Pour (demande) $p = 96 – q$, $q = q1 + q2$

1. Après avoir analysé la situation, déterminez l'équilibre de CPP.

L'entreprise 1 émet une externalité négative. Elle augmente les coûts de sa concurrente. Sans prendre ça en compte, Sans prendre en compte les effets externes en concurrence, l'entreprise 1 aura tendance à **surproduire** par rapport à la situation parétienne ou les effets externes sont considérés.

A l'équilibre concurrentiel, les effets externes ne sont pas pris en compte. Les entreprises maximisent leur profit en ne considérant que leur cout marginal privé :

CO1 : $p = Cm1 = 2q1$

CO2 : $p = Cm2 = 2q2$

Donc : $q1 = q2 = 0.5p$

=> $\mathbf{q = 0.5p + 0.5p = p}$

Pour trouver l'équilibre, il faut la fonction d'offre :

$\mathbf{p = q}$

A l'équilibre, l'offre est égale à la demande :

$q = 96 – q$

=> $2q = 96$

=> $q^* = 48$

Si $p = q$, $p^* = 48$

Si $q1 = q2 = 0.5p$

=> $q1^* = q2^* = 24$

Le surplus du consommateur représente une évaluation monétaire de sa satisfaction après l'achat. Pour le calculer, il nous faut le prix de réserve, pris pour lequel la demande s'annule.

$pmax = 96 – 0$

$\mathbf{pmax = 96}$

$Sc^{*} = [(96 – 48)48]/2$

$Sc^{*} = 1152$

Le surplus des producteurs représente leurs profits (étant donné qu'il n'y a pas de coûts fixes).

$\Pi1^{*} = 48 \times 24 – 24^2 = 576$

$\Pi2^{*} = 48 \times 24 – 24^2 - 8 \times 24 = 384$

$SP^{*} = 960$

Le surplus collectif se calcule comme la somme du surplus des consommateurs et des producteurs.

$Scoll^{*} = 2112$

L'équilibre de CPP est donc caractérisé par les valeurs suivantes : q1 = q2 = 24, q = p = 48, Sc = 1152, Sp = 960, Scoll = 2112.

2. L'entreprise 2 menace de porter plainte contre l'entreprise 1 si celle-ci ne l'indemnise pas. Elle lui propose de fusionner pour construire une entité unique avec un comportement concurrentiel sur le marché.

Sans faire de calcul, analysez cette proposition.

Si fusion il y a, cela signifie, pour Πj le profit joint, a la part de ce profit qui revient à E1 et (1 – a) la part qui revient E2, que :

$a\,\Pi j > \Pi 1$

$(1 – a)\,\Pi j > \Pi 2$

Donc, le profit des deux entreprises a augmenté. Si on internalise l'effet externe par la fusion, on passe non seulement à une situation optimale socialement (qui maximise Scoll) mais également Pareto optimale (on a augmenté les profits des deux).

3. Calculez l'optimum social pour ce marché.

A l'optimum de Pareto, les effets externes sont pris en compte. Les firmes maximisent leur profit en considérant leur cout marginal social tel que Cms = Cmp + Cme.

Pour Cme = 8

Après la fusion, la firme maximise le profit joint :

Max $\Pi j = pq1 - CT1 + pq2 - CT2$

CO1 : $p = Cms = 2q1 + 8$

CO2 : $p = Cm2 = 2q2$

$\Rightarrow 2q1 = p - 8$

$\Rightarrow q1 = 0.5p - 4$ et $q2 = 0.5p$

$q = q1 + q2 = p - 4$

O^{-1} : $p = q + 4$

A l'équilibre, l'offre est égale à la demande :

$q + 4 = 96 - q$

$\Rightarrow 2q = 92$

$\Rightarrow q^{opt} = 46$

$p^{opt} = q^{opt} + 4 = 50$

$q1^{opt} = 0.5\ p^{opt} - 4 = 0.5 \times 50 - 4 = 21$

$q1^{opt} = 0.5 \times p^{opt} = 25$

$\Pi j = 50 \times 46 - 21^2 - 25^2 - 8 \times 21$

$\Pi j = 1066$

$Sc^{opt} = [(96 - 50)46]/2$

$Sc^{opt} = 1058$

$Scoll^{opt} = 2124$

4. E1 est opposée à la fusion et propose d'indemniser sa concurrente tels que les profits de concurrence soient égaux.

Cette solution est-elle souhaitable pour les deux entreprises, notamment comparé à la fusion ?

On sait que, en CPP :

$\Pi1^* + \Pi2^* = 960$

Donc, suite à cet arrangement :

$\Pi1 = \Pi2 = 480$

On sait qu'à l'équilibre de CPP : $\Pi1^* = 576$ et $\Pi2 = 384$.

Après l'arrangement, E1 perd 96 (576 – 480) et E2 gagne 96 (480 – 384).

E1 transfère donc 96 à E2.

Après la fusion :

$\Pi1f = 50 \times 21 - 21^2 = 609$

$\Pi2f = 1066 - 609 = 457$

Après fusion (et par rapport à l'arrangement) E1 gagne 129 (cad 609 – 480) et E2 perd 23 (cad 480 – 457).

Cette situation n'est donc pas souhaitable par rapport à la fusion. Après fusion, le gain de E1 (129) est supérieur au gain de E2 après arrangement (96) et la perte de E2 après fusion (23) est inférieure à la perte de E1 après arrangement (96).

Droits de propriété (partiel 2015 en partie)

Pout $CT1 = q1^2 + 10q1 + 15q2$ et $CT2 = q2^2 + 10q2$

Soit p = 40.

1. La firme 1 décide de faire appel pour qu'un droit de propriété échangeable soit établi. Analysez cette solution selon l'attribution des droits à polluer et déterminez le prix de ce droit à polluer.

La création d'un marché de droits à polluer est une chance pour la firme 1 pour augmenter son profit. D'après le théorème de Coase, que les droits soient attribués à la firme 1 ou à la firme 2, on obtient le niveau optimal de production. Seule l'affectation des couts et des recettes correspondant aux transactions sera différente.

Le cout marginal social de la pollution de la firme 2 étant constant quel que soit sa production, il définit le prix d'équilibre du marché des droits qui sera égale à 15 par unité de production dans les deux cas envisagés.

=> pe = 15.

2. Calculez les quantités d'équilibre et les surplus si les droits sont attribués à E1.

A l'optimum de Pareto, les effets externes sont pris en compte. Les firmes maximisent leur profit en considérant leur cout marginal social tel que Cms = Cmp + Cme.

Pour les deux entreprises :

Max $\Pi 1 = pq1 - q1^2 - 10q1 - 15q2 + peq2$

Max $\Pi 2 = pq2 - q2^2 - 10q2 - peq2$

CO1 : $p = Cm1 = 2q1 + 10$

CO2 : $p = Cms = 2q2 + 10 + pe = 2q2 + 10 + 15 = 2q2 - 25$

Si $p = 40$:

$40 = 2q1 + 10 \Rightarrow 2q1 = 30$

$40 = 2q2 + 25 \Rightarrow 2q2 = 15$

$\Rightarrow q1^{opt} = 15$

$\Rightarrow q2^{opt} = 7.5$

$\Pi 1 = 40 \times 15 - 15^2 - 10 \times 15 - 15 \times 7.5 + 15 \times 7.5 = 225$

$\Pi 2 = 40 \times 7.5 - 7.5^2 - 10 \times 7.5 - 15 \times 7.5 = 56.25$

$Sp^{opt} = 281.25$

3. Calculez les quantités d'équilibre et les surplus si les droits sont attribués à E2.

Pour les deux entreprises :

Max $\Pi 1 = pq1 - q1^2 - 10q1 - 15q2 + pe(q2^* - q2)$

Max $\Pi 2 = pq2 - q2^2 - 10q2 - pe(q2^* - q2)$

CO1 : $p = Cm1 = 2q1 + 10$

CO2 : $p = Cms = 2q2 + 10 + 15 = 2q2 + 10 + 15 = 2q2 - 25$

$\Rightarrow q1^{opt} = 15$

$\Rightarrow q2^{opt} = 7.5$

$q2^*$ représente la quantité produite par l'entreprise 2 en CPP.

A l'optimum, en CPP, E2 maximise son profit en fonction de son coût marginal privé :

CO : $p = cm2 = 2q2 + 10$

Si $p = 40$:

$40 = 2q2 + 10$

=> $2q2 = 30$

=> **$q2^* = 15$**

$\Pi1 = 40 \times 15 - 15^2 - 10 \times 15 - 15 \times 7.5 - 15 \times (15 - 7.5) = 0$

$\Pi2 = 40 \times 7.5 - 7.5^2 - 10 \times 7.5 + 15 \times (15 - 7.5) = 281.25$

$Sp^{opt} = 281.25$

Ni les quantités d'équilibre, ni le surplus n'a changé, seule la répartition du surplus a été modifiée (baisse du profit de E1 et hausse du profit de E2). Le théorème de Coase est validé.

Partiel 2019

Pour $CTu (X) = X^2$ avec X la quantité produite par l'usine U du bien X. U émet une quantité de pollution notée S, telle que $S = X$.

$CTE (Y, S) = Y^2 + 0.5S$ avec Y la quantité produite par l'entreprise E du bien Y.

Pour $px = 40$ et $py = 10$.

1. Analyser la situation sans faire de calculs.

U émet une externalité négative de production. Elle surproduit donc par rapport à l'optimum social.

2. Déterminez le profit joint des deux entreprises.

A l'optimum de Pareto, les effets externes sont pris en compte. Les firmes maximisent leur profit en considérant leur cout marginal social tel que $Cms = Cmp + Cme$.

Max $\Pi j = pxqx + pyqy - X^2 - Y^2 - 0.5S$

Si $S = X$:

Max $\Pi j = pxqx + pyqy - X^2 - Y^2 - 0.5X$

COU : $px = Cms$ => $40 = 2X + 0.5$

COE : py = CmE => 10 = 2Y

=> 2X = 39.5 => X = 19.75

=> Y = 5

Si S = X, alors S = 19.75.

Πj = 40 x 19.75 + 10 x 5 – 19.75^2 - 5^2 - 0.5 x 19.75

Πj = 415

3. Les deux entreprises décident de maximiser indépendamment leurs profits. Calculez ΠU et ΠE et comparez.

Chaque entreprise cherche à maximiser son profit en fonction de son coût marginal privé.

Pour les deux entreprises :

Max ΠU = pxqx – X^2

Max ΠE = pyqy – Y^2 - 0.5S

A l'optimum, il n'existe aucune modification de la production qui permette d'augmenter le profit.

COU : px = Cmu = 2X => 40 = 2X

COE : py = Cmy = 2Y => 10 = 2Y

X* = 20 et Y* = 5

Le surplus des producteurs représente leurs profits (étant donné qu'il n'y a pas de coûts fixes).

ΠU* = 40 x 20 – 20^2 = 400

ΠE* = 10 x 5 – 5^2 - 0.5 x 20 = 15

Sp* = 415

Ici, le profit joint et la somme des profits concurrentiels sont les mêmes. Mais l'usine U surproduit par rapport à l'optimum.

4. L'Etat impose une taxe unitaire.

a) Quelle est sa valeur ?

A l'optimum, l'entreprise responsable de l'externalité en tient compte dans son programme de maximisation.

Elle ne maximise plus son profit en fonction du cout marginal privé, mais du cout marginal social.

Cms = Cmp + Cme avec Cme le coût marginal de l'externalité (ici, supporté par l'entreprise E).

Cm1s = Cm1 + Cme

Pour que l'entreprise tienne compte du Cms, la taxe doit couvrir la valeur du Cme.

Ici, Cme = 0.5.

Donc $t = 0.5$.

b) Quel est le revenu de l'Etat ?

Le revenu de l'Etat (surplus de l'Etat) est l'ensemble de ses recettes fiscales.

La taxe universitaire est de 0.5 et le niveau socialement optimal d'externalités est S = X = 19.75.

Donc :

Se = 0.5 x 19.75

Se = 10 (arrondi à l'unité supérieure)

c. Cette politique est-elle Pareto améliorante ?

Pour que cette politique soit Pareto améliorante, il faudrait qu'elle permette une augmenter du profit d'au moins une des deux entreprises sans diminuer celui de l'autre.

Sachant que t = 0.5 et connaissant les prix et les niveaux optimaux de production :

$\Pi U^* = 40 \times 19.75 - 20^2 - 0.5 \times 19.75 = 390$ (arrondi à l'unité supérieure)

$\Pi E^* = 10 \times 5 – 5^2 - 0.5 \times 19.75 = 15$ (arrondi à l'unité supérieure)

D'où :

$Sp^* = 405$

$Se = 10$

Le surplus global est donc :

$Sg = 415$

Cette politique n'est pas Pareto améliorante puisqu'elle diminue le profit de l'usine U.

5. On crée un marché des droits à polluer. E est propriétaire des droits vendus au prix q. Quel est le prix d'équilibre ? Quels sont les profits ? Cette politique est-elle Pareto améliorante ?

L'usine U doit donc acheter des droits à E pour émettre son externalité S.

A l'optimum, l'usine U maximise son profit en fonction du coût marginal social.

D'où : $q = Cme = 0.5$

Max $\Pi U = pxqx – X^2 - qS$

Max $\Pi E = pyqy – Y^2 - 0.5S + qS$

Avec $S = X$.

COU : $px = Cmu = 2X + q \Rightarrow 40 = 2X + 0.5 \Rightarrow 2X = 39$

COE : $py = Cmy = 2Y \Rightarrow 10 = 2Y$

$\Rightarrow$ $X = 19.75$ et $Y = 5$

$\Pi U^* = 40 \times 19.75 – 20^2 - 0.5 \times 19.75 = 390$ (arrondi à l'unité supérieure)

$\Pi E^* = 10 \times 5 – 5^2 - 0.5 \times 19.75 + 0.5 \times 19.75 = 25$

Cette politique n'est pas Pareto améliorante puisqu'elle diminue le profit de l'usine U.

6. Si U possède les droits et ne peut polluer que pour Smax = 20. Quel est la valeur de q ? Quels sont les profits ? La situation est-elle Pareto améliorante ?

Pour la même raison que précédemment :

q = Cme = 0.5

Max $\Pi U = pxqx - X^2 + q\,(Smax - S)$

Max $\Pi E = pyqy - Y^2 - 0.5S - q\,(Smax - S)$

Avec S = X.

COU : px = Cmu = 2X + q => 40 = 2X + 0.5 => 2X = 39

COE : py = Cmy = 2Y => 10 = 2Y

=> X = 19.75 et Y = 5

$\Pi U^* = 40 \times 19.75 - 20^2 + 0.5 \times (20 - 19.75) = 390$ (arrondi à l'unité supérieure)

$\Pi E^* = 10 \times 5 - 5^2 - 0.5 \times 19.75 - 0.5 \times (20 - 19.75) = 15$

Cette politique n'est pas Pareto améliorante puisqu'elle diminue le profit de l'usine U.

7. En comparant les différentes solutions, quels sont vos commentaires sur le niveau de pollution et les effets redistributifs ?

Toutes les solutions mènent au niveau socialement optimal de pollution. Seule la répartition des revenus change d'une solution à l'autre.

Chapitre 3

3. La production optimale

Partiel 2016

Une économie comprend deux biens notés 1 et 2 et deux agents notés A et B. Le bien 1 est un bien collectif et le bien 2 est un bien marchand.

Pour :

TMSA2-1 = 10

TMSB2-1 = 15

TMT2-1 = 20

Montrez qu'il existe une modification du plan de production Pareto améliorante.

A l'optimum, il n'existe aucune modification du plan de production qui permette d'augmenter l'utilité des agents. La somme des TMS des agents est donc égale au TMT. C'est la condition de Bowen – Lindhal – Samuelson (BLS).

CO : TMSA2-1 + TMSB2-1 = TMT2-1

=> (UmA1 + UmB1) / (UmA2 + UmB2) = Cm1 / Cm2

=> (UmA1 + UmB1) / Cm1 = (UmA2 + UmB2) / Cm2

Un euro supplémentaire dépensé dans la production rapporte à la collectivité autant de satisfaction qu'il soit dépensé dans la production du bien 1 que du bien 2.

Ici : TMSA2-1 + TMSB2-1 = 25 > TMT2-1 = 15

Donc : (UmA1 + UmB1) / Cm1 > (UmA2 + UmB2) / Cm2

Un euro supplémentaire dépensé dans la production rapporte à la collectivité plus de satisfaction s'il soit dépensé dans la production du bien 1.

Il faut donc augmenter la production du bien 1 et diminuer celle du bien 2.

Partiel 2018

Pour deux biens M (marchand) et C (collectif).

$C = 2Lc$

$M = 2Lm$

$Lc + Lm = 50$

Pour trois consommateurs (1, 2 et 3) dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$u_i = M_i + 2^{(i-1)} \ln(C)$

1. Calculez la frontière de production.

La frontière de production représente l'ensemble des productions maximales possible en utilisant l'intégralité des facteurs.

L'intégralité des facteurs est représentée dans l'expression :

$Lc + Lm = 50$

Si $C = 2Lc$, alors $Lc = 0.5C$

Si $M = 2Lm$, alors $Lm = 0.5M$

Donc : $0.5C + 0.5M = 50$

En factorisant : $0.5 (C + M) = 50$

=> FP : $C + M = 100$

2. Caractérisez le plan optimal de production.

A l'optimum, il n'existe aucune modification du plan de production qui permette d'augmenter l'utilité des agents. La somme des TMS des agents est donc égale au TMT. C'est la condition de Bowen – Lindhal – Samuelson (BLS).

CO : TMS1M-C + TMS2M-C + TMS3M-C = TMTM-C

Le TMT représente la quantité de bien marchand à laquelle il faut renoncer pour produire une unité de bien collectif supplémentaire.

Compte tenu de la FP :

TMTM-C = 1

Le TMS représente la quantité de M à laquelle il faut renoncer pour consommer une unité supplémentaire de C et garder le même niveau de satisfaction.

TMSM-C = UmC / UmM

UmC = $2^{(i-1)}$ (1/C)

UmM = 1

TMSM-C = $2^{(i-1)}$ (1/C) / 1 = $2^{(i-1)}$ (1/C) = $\mathbf{2^{(i-1)} / C}$

Pour i = 1, 2 ou 3

CO : [$2^{(1-1)}$ / C] + [$2^{(2-1)}$ / C] + [$2^{(3-1)}$ / C] = 1

=> 1/C + 2/C + 4/C = 1

=> 7/C = 1

=> 1/C = 1/7

=> C* = 7

Si C + M = 100 (frontière de production)

Alors M = 100 – C* = 100 – 7

=> M* = 93

Le plan optimal de production est caractérisé par C* = 7 et M* = 93.

3. Le financement

Prix individualisés (partiel 2019)

Une économie comporte à l'origine un seul bien, dont la quantité est égale à 100 qui peut être consommée en quantité cA ou utilisé en facteur en quantité kB. Ce bien permet de produire une quantité q du bien B.

$q = 2\sqrt{kB}$

Cette quantité produite est consommée en quantité cB. Si elle est consommée en totalité : cB = q.

1. Calculez la frontière de production.

La frontière de production représente l'ensemble des productions maximales possible en utilisant l'intégralité des facteurs.

Si le bien A est utilisé en totalité, alors :

$cA + kB = 100$

Si $q = 2\sqrt{kB} \Rightarrow \sqrt{kB} = 0.5q \Rightarrow kB = \frac{1}{4}(q^2)$

Pour $q = cB \Rightarrow kB = \frac{1}{4}(cB^2)$

D'où :

FP : $cA + cB^2/4 = 100$

2. Soit pA = 1 et le bien B un bien collectif. Déterminez l'équilibre de prix individualisés.

Pour $ui = cAi + 2(i + 2)^2 \ln(cB)$ et cB = 10.

Pour deux individus notés 1 et 2, chaque individu maximise son utilité en fonction des prix individualisés (pBi).

A l'optimum, il n'existe aucune modification des consommations qui augmentent l'utilité.

CO : TMSiB-A = pA/pBi

Le TMS représente la quantité de B à laquelle il faut renoncer pour consommer une unité supplémentaire de A et garder le même niveau de satisfaction.

$TMSi_{B-A} = UmA / UmB$

$UmA = 1$

$UmB = 2(i + 2)^2/cB$

$TMS_{B-A} = 1 / [2(i + 2)^2/cB] = cB / 2(i + 2)^2$

Donc :

CO : $cB / 2(i + 2)^2 = p1/p2i = 1/p2i$

=> $2(i + 2)^2/cB = p2i$

D'où (pour i égal 1 ou 2 et cB = 10) :

$pB1 = 2(1 + 2)^2/10 = (2 \times 9)/10$

$pB2 = 2(2 + 2)^2/10 = (2 \times 16)/10$

=> $p21 = 1.8$ et $p22 = 3.2$

Ainsi, à l'équilibre de prix individualités et compte tenu des préférences des deux agents, l'agent A accepte de financer le bien collectif à hauteur de 1.8 et B à hauteur de 3.2.

Souscription volontaire (partiel 2015)

Soit un bien pouvant être consommé en quantité X et utilisé comme facteur de production en quantité k pour concevoir un bien collectif en quantité g.

$g = k$

Soit $px = pg = 1$.

Pour trois agents dont les dotations en bien x sont respectivement :

$w1 = 2, w2 = 4, w3 = 6$.

Avec la frontière de production :

FP : $x + g = 12$

Leurs préférences sont modélisées par la fonction d'utilité suivante :

$ui = xi + i(1 + g)^{1/2}$

Calculez l'équilibre de souscription volontaire avec ti la contribution de l'agent i et commentez.

A l'équilibre de souscription volontaire, chaque agent maximise son utilité sous contrainte de son budget en fonction de sa contribution, en prenant celle des autres comme donnée.

Max $ui = xi + i(1 + g)^{1/2}$

Sc : $wi = pxxi + ti$

$t1 + t2 + t3 = pgg$

$tj = tj\_$

$ti > 0$

en intégrant ces contrainte dans le programme de maximisation (pour $pg = px\ 1$), on obtient :

Max $ui = wi - ti + i(1 + t1 + t2 + t3)^{1/2}$

Sc : $ti > 0$

Avec $xi = wi – ti$

A l'optimum, il n'existe aucune modification de ti qui permette d'augmenter l'utilité : la dérivé de l'utilité est nulle en ce point :

$Umti = -1 + i[1/2(1 + \sum ti)^{1/2}] = 0$

$-1 + i / [2(1 + \sum ti)^{1/2}] = 0$

$=> i / [2(1 + \sum ti)^{1/2}] = 1$

$=> 2(1 + \sum ti)^{1/2} = i$

$=> 4 (1 + \sum ti) = i^2$

$=> 4 + 4(\sum ti) = i^2$

$\Rightarrow 4(\sum ti) = i^2 - 4$

$\Rightarrow \sum ti = i^2/4 - 1$

Donc :

$t1 + t2 + t3 = i^2/4 - 1$

Pour t1 (i = 1)

$t1 = ¼ - 1 - t2 - t3$

Pour t2 (i = 2)

$t2 = 2^2/4 - 1 – t1 - t3 = -1 – 1 – t1 – t3$

$t2 = - t1 – t3$

Pour t3 (i = 3)

$t2 = 3^2/4 - 1 – t1 – t2 = 9/4 – 1 – t1 – t2$

$t2 = 5/4 – t1 – t2$

Ces trois conditions doivent être respectées en même temps. Or, si les agents sont rationnels, ils ont intérêt à se comporter en passagers clandestins : laisser celui qui a la plus forte préférence financer le bien public et ne pas y contribuer sachant que, puisque le bien est public, une fois qu'il est produit, ils pourront le consommer aussi. Donc, sur trois agents, deux n'ont pas intérêt à contribuer au financement du bien collectif.

Soit t2 = 0 et t3 = 0 alors t1 = -3/4 ce qui est impossible (ti > 0).

Soit t1 = 0 et t3 = 0 alors t2 = 0 ce qui est impossible (aucun financement).

Soit t1 = 0 et t2 = 0 alors t3 = 5/4 ce qui est cohérent avec les contraintes.

Donc, à l'équilibre de souscription volontaire t1 = t2 = 0 et t3 = 5/4.

Puisque deux des trois agents sont passagers clandestins, cette production est sous-optimale.

A l'optimum, il n'existe aucune modification du plan de production qui permette d'augmenter l'utilité des agents. La somme des TMS des agents est donc égale au TMT. C'est la condition de Bowen – Lindhal – Samuelson (BLS).

CO : TMS1M-C + TMS2M-C + TMS3M-C = TMTM-C

Le TMT représente la quantité de bien marchand à laquelle il faut renoncer pour produire une unité de bien collectif supplémentaire.

Compte tenu de la FP :

TMTx-g = 1

Le TMS représente la quantité de x à laquelle il faut renoncer pour consommer une unité supplémentaire de g et garder le même niveau de satisfaction.

TMSix-g = Umg / Umx

Umg = i x $[1 / (2(1 + g)^{1/2})] = i / (2(1 + g)^{1/2})$

Umx = 1

TMSix-g = $[i / (2(1 + g)^{1/2})] / 1 = i / (2(1 + g)^{1/2})$

D'où :

TMS1x-g = $1/ (2(1 + g)^{1/2})$

TMS2x-g = $2/ (2(1 + g)^{1/2})$

TMS3x-g = $3/ (2(1 + g)^{1/2})$

Donc :

CO : $1/ (2(1 + g)^{1/2}) + 2/ (2(1 + g)^{1/2}) + 3/ (2(1 + g)^{1/2}) = 1$

$\Rightarrow 6 / (2(1 + g)^{1/2}) = 1$

$\Rightarrow (2(1 + g)^{1/2}) = 6 \Rightarrow (1 + g)^{1/2} = 3 \Rightarrow 1 + g = 9$

=> **g* = 8**

Or, avec équilibre de souscription volontaire, du fait du comportement de passagers clandestins des agents 1 et 2, g = 5/4 < g*.

A l'équilibre de souscription volontaire, la production de bien collectif est inférieure à sa production optimale.

Vote de Bowen (partiel 2015 suite)

L'agent 2 se fait élire comme maire et impose ses choix à tous. Commentez cette situation.

La question est de savoir si les électeurs sont favorables à ce choix.

Si chacun choisit un projet de production (quantité et financement) du bien collectif, quel serait le projet désigné par les votes ?

D'après le théorème de Black, si les préférences sont ordonnées et unimodales (ce qu'elles sont ici), le résultat du vote est déterminé par l'électeur médian. Ici, l'agent 2 est l'électeur médian.

Démonstration :

L'agent cherche à maximiser son utilité en fonction de sa contribution et sous la contrainte que les contributions de tous sont égales :

Max $ui = xi + i(1 + g)^{1/2}$

Sc : $wi = pxxi + ti$

$t1 = t2 = t3$

$3ti = pgg$

$ti > 0$

En intégrant les contraintes dans le programme et pour $px = pg = 1$:

Max $ui = wi - ti + i(1 + 3ti)^{1/2}$

Sc : $ti > 0$

A l'optimum, il n'existe aucune modification de ti qui permette d'augmenter l'utilité : la dérivé de l'utilité est nulle en ce point :

$Umti = -1 + i\ [1/2(1 + 3ti)^{1/2}] \times 3 = 0$

$\Rightarrow -1 + 3i / [2(1 + 3ti)^{1/2}] = 0$

$\Rightarrow 3i / [2(1 + 3ti)^{1/2}] = 1$

$\Rightarrow 2(1 + 3ti)^{1/2} = 3i$

$\Rightarrow 4 (1 + 3ti) = 9i^2$

$\Rightarrow 1 + 3ti = 9i^2/4$

$\Rightarrow 3ti = 9i^2/4 - 1 = (9i^2 - 4) / 4$

$\Rightarrow$ **$ti = (9i^2 - 4) / 12$**

Si le projet de 2 est choisi, alors i = 2 :

$t2 = (9 \times 2^2)/12 = 8/3$

Donc $t1 = t2 = t3 = 8/3$

Ce projet est également le projet optimal (8/3 x 3 = 8 = production optimale, cf. exercice précédent) car 2 est également l'électeur moyen ((1 + 2 + 3)/3 = 2).