Projet d'Algorithme Stochastique: Monte Carlo
Calcul des grecques par la méthode Malliavin

NAHAPETYAN Knarik et PELLETIER Paul

ISF Apprentissage

Université Paris Dauphine

11 avril 2019

Table des matières

Introduction

Note au lecteur ou lectrice :
Bonjour, dans ce projet nous avons décidé d'admettre certains résultats sans les démontrer et certains ont été démonté dans Annexe. Dans la partie théorique nous avons essayé d'introduire les notions les plus importantes pour ne pas s'éloigner du sujet et pour que le compte rendu soit plus lisible.
Nous vous souhaitons désormais tous les deux une bonne lecture !

La construction d'un modèle théorique pour une évaluation fiable du prix des options est un défi majeur pour la finance. Une fois le modèle construit, il doit être calibré, c'est-à-dire que l'on va ajuster ses paramètres pour qu'il donne les mêmes prix que le marché. Il faut donc construire un portefeuille de couverture contre les risques représentés par les variations des paramètres du modèle. Le calcul des sensibilités du prix des options (appelés "grecques" car traditionnelement désignés par des lettres gracques) est cruciale pour construire ce portefeuille de couverture.

Les grecques sont delta, gamma, vega, etc ... ici nous nous concentrerons principalement sur le calcul du delta. Le delta de l'option indique la variation de prix de l'option par rapport à la variable du sous-jacent. Dans le modèle Black-Scholes, ce terme correspond à la stratégie de réplication (delta hedging). Le gamma de l'option détermine la convexité du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent. Il représente également la sensibilité du delta par rapport aux variations du prix du sous-jacent, donc la sensibilité de la stratégie de couverture par rapport aux variations du sous jacent.

En génerale le calcul des grecques par des méthodes de Monte Carlo est problématique : la non-régularité du payoff de l'option entaîne que la variance de l'estimateur de différences finies est très grande. Cependant même si en pratique la plupart de market-makers approximent un pay-off digital par une stratégie basée sur des Call/Put vanilles pour pricer/hedger leur position, l'erreur d'approximation comise est soit payée par la contrepartie acheteuse soit payée par le market-maker lui même.
L'objectif de ce projet est d'étudier une nouvelle approche pour le calcul des grecques : l'approche par le calcul de Malliavin. Ce calcul permet, par des méthodes de Monte Carlo, d'estimer les grecques par une seule espérance, celle du produit du payoff par un poids indépendant du payoff. Il s'agit en somme détendre la notion de dérivée aux processus temporels continus puis par une "astuce" mathématique appelée "relation de dualité" simplifier le problème primal (calcul d'espérance d'une dérivvée) en un problème dual beaucoup plus simple à mettre en oeuvre (simple calcul d'une espèrence).

Dans un premier temps nous allons donner une introduction élémentaire au calcul de Malliavin qui nous permettra de déterminer les poids et donc les greques par cette nouvelle méthode. Une fois la théorie exposée nous allons passer à l'application : nous avons choisi deux options une avec un payoff regulièr (call vanille) et une autre avec un payoff irrégulièr (call digital). Nous allons principalement nous focaliser sur l'application du calcul de Malliavin au modèle Black-Scholes.

Les simulations proposées ont été réalisées sur Python en utilisant le générateur de nombres pseudo-aléatoires de la bibliothéque numpy. (numpy.random.normal())

1 Calcul Malliavin

Soient $(H, \langle .|. \rangle)$ un espace de Hilbert et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité complet. Soit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un brownien assocé à cet espace de probabilité.
Avec $H = L^2([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \mathrm{d}t, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$.

1.1 Notions de base pour le calcul Malliavin

Commençons par définir les concepts d'espace de Wiener, dérivé de Malliavin et son adjoint.

Définition. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynômiale. On appelle polynôme de Wiener une variable aléatoire du type $f(W(h^1), \cdots, W(h^n))$, avec $h^j \in L^2([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \mathrm{d}t, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$, pour $j \in [\![1, n]\!]$.*

Définition. *Si $f(W(h^1), \cdots, W(h^n))$ est un polynôme de Wiener, on définit sa dérivée de Malliavin comme le processus stochastique d-dimensionnel :*

$$Df(W(h^1), \cdots, W(h^n)) = (D_t f(W(h^1), \cdots, W(h^n)), t \in [0,T])$$

en posant :

$$D_t f(W(h^1), \cdots, W(h^n)) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(W(h^1), \cdots, W(h^n)) h_j^i(t) \right)_{1 \leq i \leq d}$$

Alors :

$$Df(W(h^1), \cdots, W(h^n)) \in L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}, \mathrm{d}t \otimes P, \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

Définition. *On note $D^{1,2}$ le domaine de l'opérateur D. On munit $D^{1,2}$ de la forme :*

$$\|F\|_{1,2} = \left[E(|F|^2) + \int_0^T E(\|D_t F\|_{\mathbb{R}^d}^2) \mathrm{d}t \right]^{\frac{1}{2}}$$

On admet les résultats suivants :

- $D^{1,2}$ est un sous-espace dense de $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.
- $D^{1,2}$ muni de la norme $\|.\|_{1,2}$ est un espace de Hilbert.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable à dérivées bornées. Soit $(F^1, \cdots, F^m)$ un vecteur aléatoire tel que :

$$\forall i \ F^i \in D^{1,2}$$

Alors :

$$\varphi(F^1, \cdots, F^m) \in D^{1,2}$$

et

$$D(F^1, \cdots, F^m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(F^1, \cdots, F^m) DF^i$$

Définition. *On appelle intégrale de Skohorod, notée δ, l'opérateur adjoint de D. δ est un opérateur non borné de $L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}, \mathrm{d}t \otimes P, \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ vers $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ de domaine noté Dom(δ), tel que pour tout processus u de $L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}, \mathrm{d}t \otimes P, \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ on ait :*

- *u appartient à $Dom(\delta)$ si et seulement si il existe une constante c telle que $\forall F \in D^{1,2}$*

$$\left| E(\int_0^T \langle D_t F | U_t \rangle_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}t) \right| \leq c E(F^2)^{\frac{1}{2}}$$

- *$\delta(u)$ est définie par la relation de dualité :*
  $\forall F \in D^{1,2}$

$$E(F\delta(u)) = E(\int_0^T \langle D_t F | U_t \rangle_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}t)$$

1.2 Application aux grecques

Dans cette partie nous allons étudier le cas général qui sera appliquer dans la partie suivante pour le calcul des poids.

On considére un processus $(X_t, 0 \leq t \leq T)$, dont la dynamique est la suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1}$$

avec $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathcal{G}l(p, \mathbb{R})$.

On introduit le processus des variations premières $(Y_t, 0 \leq t \leq T)$, associé au processus X_t. Sa dynamique est donnée par :

$$dY_t = b_2'(t, X_t)Y_t dt + \sum_{i=1}^{p} \sigma_2'^{\,i}(t, X_t)Y_t dW_t^i$$

alors $\forall t \in [0, T]$

$$X_t \in D^{1,2}$$

et $\forall s, t \in [0, T]$

$$D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) 1_{s \leq t} \qquad (2)\,^1$$

Remarque. *Dans le cas d'une diffusion de type Black-Scholes et pour p=1 on a :*

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \quad X_0 = x$$

$$dY_t = rY_t dt + \sigma Y_t dW_t \quad Y_0 = 1$$

$$Y_t = \frac{X_t}{x} \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Maintenant nous disposons de plusieurs outils pour appliquer le calcul des dérivées Malliavin pour déterminer les expressions des greques.

En bref, on définit la dérivée de Malliavin sur les polynômes de Weiner. En appliquant un résultat de densité analogue au Théorème de Stone-Weierstrass (densité des polynômes dans l'ensemble des fonctions continues sur un ségment ici étant à horizon temporel fini l'analogie fonctionne) afin de prolonger la dérivée de Malliavin dans l'espace des variables aléatoires de carré intégrable. Cette dérivée de Malliavin est elle aussi analogue à la dérivée faible sur $H1$. L'espace de Sobolev $1-2$ (ensemble des fonction faiblement dérivables et de dérivée faible de carré intégrable).

1. La démonstration de l'équation (2) est donnée en annexe

1.3 Calcul des poids

On note $P(t,x)$ le prix de notre actif contingent à la date t pour une valeur initiale de l'actif de x, et $P(x)$ sa valeur à la date 0. Il est de maturité T et son payoff s'exprime comme une fonction des valeurs du sous-jacent à différentes dates $f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})$ avec les conventions $t_0=0$ et $t_m=T$. on suppose que le taux d'intéret noté r ne dépend pas de X, soit $r(s,X_s)=r(s)$.
Soit Q la probabilité risque neutre alors nous avons

$$P(x) = E_x^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r(s)ds} f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m}))$$

Les sensibilités ou grecques : Le delta est défini comme la sensibilité du prix de l'option par rapport à la valeur initiale du sous-jacent, le gamma correspond à la dérivée seconde :

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Nous allons les évaluer par le calcul de Malliavin

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r(s))ds} f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})\pi(\Delta))$$

$$\gamma = E_x^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r(s)ds} f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})\pi(\gamma))$$

Les poids des grecques : On détaille le calcule pour le delta. Posons $F=f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})$, on raisonne sur un payoff continûment différentiable et à dérivées bornées. On cherche π tel que :

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x[F] = E_x[F\times\pi]$$

on admet qu'on peut permuter espérance et dérivation

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x[F] = E_x[\frac{\partial}{\partial x}F]$$

En s'appliquant sur la partie précédente nous avons :

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}[\frac{\partial e^{-\int_0^T r(s)ds} f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})}{\partial x}]$$

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(s)ds}\sum_{i=0}^{m}\partial_i f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})\frac{\partial X_{t_i}}{\partial x}]$$

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(s)ds}\sum_{i=0}^{m}\partial_i f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})Y_{t_i}] \qquad (3)$$

Maintenant on cherche un poids π qui puisse s'exprimer comme une intégrale de Skorokhod : $\pi=\delta(w)$

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(s))ds} f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})\delta(w)]$$

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}[\int_0^T D_s[e^{-\int_0^T r(s))ds} f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})w(s)]ds]$$

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(s)ds}\sum_{i=0}^{m}\partial_i f(X_{t_1},\cdots,X_{t_m}))\int_0^T D_s X t_i w(s)ds]$$

D'après l'équation 2 de la partie précédente on a

$$\Delta = E_x^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=0}^{m} \partial_i f(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m}) \int_0^T Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) 1_{s \le t_i} w(s) ds] \qquad (4)$$

D'après les équations (3) et (4) on obtient :

$$E_x^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=0}^{m} \partial_i f(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m})(Y_{t_i} - \int_0^T Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) 1_{s \le t_i} w(s) ds)] = 0$$

Donc $\forall i = 1, \cdots, m$

$$Y_{t_i} - \int_0^T Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) 1_{s \le t_i} w(s) ds = 0$$

Avant de donner les solutions de cette équation introduisons l'ensemble

$$T_m = \left\{ a \in L^2[0, T]; \int_0^{t_i} a(t) dt = 1; \; \forall i = 1 \cdots, m \right\}$$

les générateurs w suivants mènent à des poids admissibles :

$$w = a(t) \frac{Y_t}{\sigma(t, X_t)}$$

Remarque. *Si le sous-jacent suit une diffusion de type Black-Scholes et on s'intéresse à une option type européenne, en prenant $a(t) = \frac{1}{T}$ on obtient :*

$$\delta(w^{delta}) = \int_0^T \frac{1}{T} \frac{X_t}{x \sigma X_t} dW_t = \frac{W_T}{x \sigma T}$$

En remarquant que gamma est la dérivée de delta on obtient le poids de gamma :

$$\delta(w^{gamma}) = \delta(w^{delta} \delta(w^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x} w^{delta})$$ [1]

$$\delta(w^{gamma}) = \frac{1}{x^2 \sigma^2 T^2} \delta(W_T) - \frac{W_T}{x^2 \sigma T}$$

Finalement

$$\delta(w^{gamma}) = \frac{1}{x^2 \sigma T} (\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

1. La démonstration de cette égalité est donnée en annexe

2 Application au modèle Black - Scholes

Dans cette partie nous allons faire la comparaison des méthodes Malliavin - Différences Finies sur deux types d'options : l'option européenne et l'option binaire.
Pour nos simulations nous avons choisi $S_0 = 100$, $K = 100$, $b = 0.05$, $\sigma = 0.20$, $T = 1$, $r = 0,05$. Nous utilisons 5000 simulations.

2.1 Option européenne

Premièrement nous allons comparer les deux méthodes sur l'option dont le payoff est régulier. Il s'agit d'un call vanille sur un sous-jacent S_t et de strike K. Son payoff à maturité est donné par

$$(S_T - K)_+$$

Ci-dessous les graphiques des estimations de delta et de gamma pour l'option européenne par les deux méthodes.

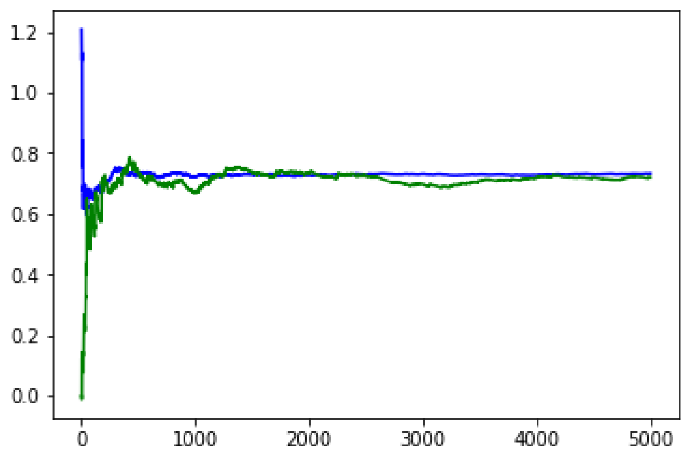

Figure 1 – L'estimation de delta par le calcul Malliavan en vert et par différences finis en bleu

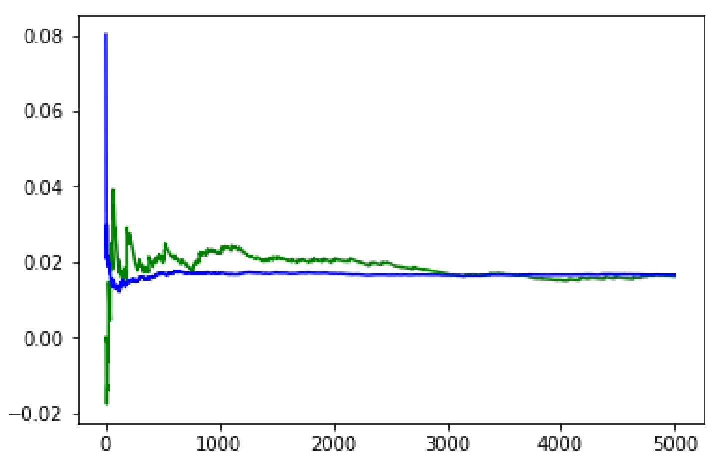

Figure 2 – L'estimation de gamma par le calcul Malliavan en vert et par différences finis en bleu

Le calcul de Malliavin semble peu adapté pour un payoff réguliers. On constate en effet sur les *Figure* 1 et

Figure 2 que l'estimateur de Malliavin oscille plus autour de la valeur théorique que les estimateurs des différences finies. Cette thérorie est confirmé par les résulatats présentés dans le tableau ci-dessous.

Tests / Variables	Différences Finies	Malliavin
Delta	0.737	0.7313
Variance de Delta	0.285	2.61
Gamma	0.019	0.01333
Variance de Gamma	0.0107	0.0175

La variance de estimateur de delta par la méthode Malliavin est 9 fois plus grande que la variance dans le cas de différences finis.

2.2 Option binaire

Nous allons maintenant examiner ce qui se passe lorsque ce payoff devient irrégulier et présente une discontinuité. Si la méthode d'estimation par différence finies est très sensible aux discontinuités, le poids de Malliavin ne dépend pas de la nature du payoff, qu'il soit continu ou discontinu. Donc on attend que la méthode de Malliavin se révéle avantageuse pour les options à payoff discontinus.
Il s'agit ici d'un call digitale sur un sous-jacent S_t et de strike K. On rappelle que le payoff d'une telle option à maturité est le suivant :

$$\mathbb{1}_{(S_T-K)_+}$$

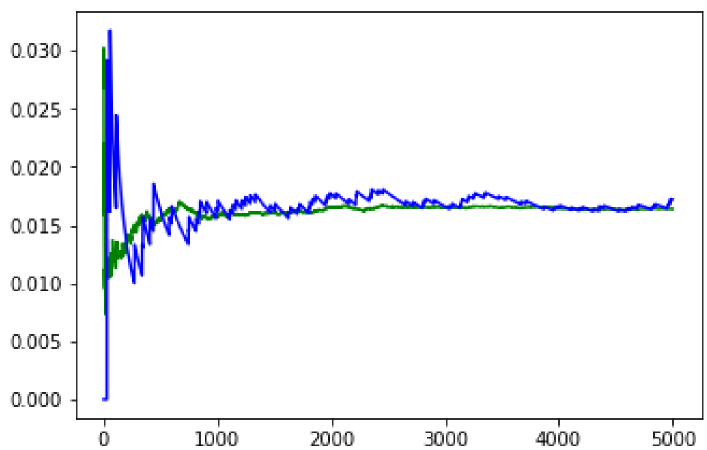

FIGURE 3 – L'estimation de delta par le calcul Malliavan en vert et par différences finis en bleu

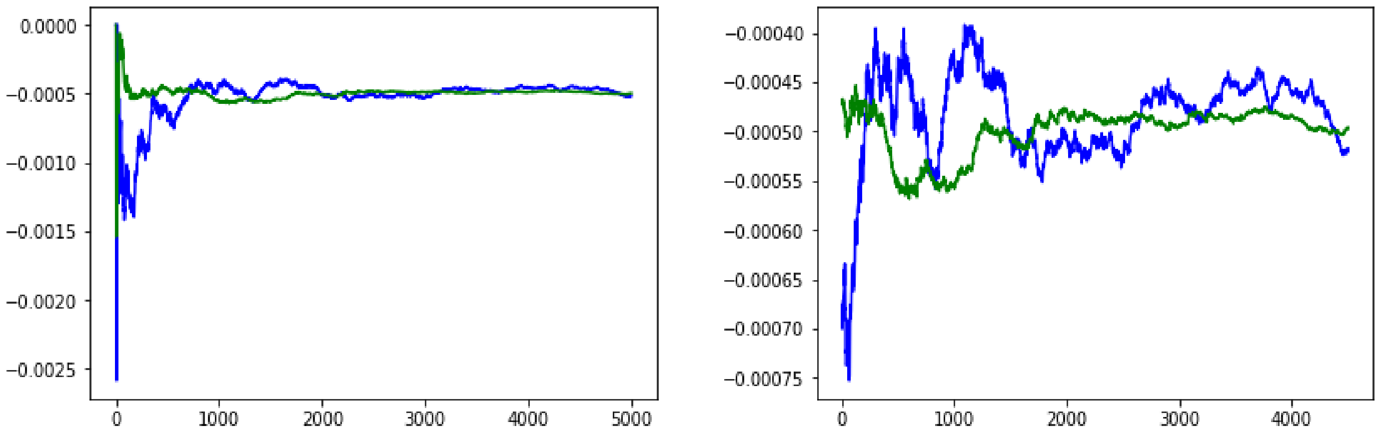

FIGURE 4 – L'estimation de gamma par le calcul Malliavan en vert et par différences finis en bleu (à gauche) et le zoom de cet estimateur en enlevant les 500 premières itération de l'algorithme étant beaucoup trop perturbées

Cette fois-ci on constate, à l'aide des deux graphiques que les estimateurs obtenus par le calcul Malliavin sont plus proches de la valeur théorique et les estimateurs des différences finies oscillent beaucoup autour de cette valeur. L'impact pénalisant de l'irrégularité du payyoff est confirmé par le tableau ci-dessous.

Tests / Variables	Différences Finies	Malliavin
Delta	0.01719	0.01650
Variance de Delta	0.0152	7.5×10^{-4}
Gamma	-0.00090	-0.00050
Variance de Gamma	0.0306	4.4×10^{-6}

Les variances des estimateurs de delta et de gamma par la méthode Malliavin sont respectivement 20 et 7000 fois plus petites par rapport aux variances des estimateurs dans le cas de différences finis.
Donc cette méthode semble bien adaptée aux options qui ont des payoffs discontinus.

Conclusion

Nous arrivons au bout de notre étude, il est donc temps de faire le point sur les méthodes essayées dans les deux cas différents.

Tout d'abord, nous avons pu constater la faible effcacité du calcul de Malliavin dans l'évaluation des coeffcients de sensibilité d'une option dont le payoff est régulier. Le calcul de Malliavin est peu adapté puisque les résultats obtenus avec les différences finies sont beaucoup plus précis, et quasiment tout aussi rapides.
Dans le cas du payoff irrégulier la méthode de Malliavin permet d'obtenir une bonne précision sur le calcul des Grecques contrairement au méthode des différences finis.

A travers ce projet nous avons appris une nouvelle méthode pour améliorer les techniques de pricing et de hedging des options dont le payoff est irrégulier. La partie théorique du calcul Malliavin a été une découverte pour nous. Et à notre grande surprise il s'agit d'une méthode assez peu utilisée en pratique. En effet sur des produits de pay-off non différentiable cette méthode donne des prix "trop justes" donc des prix trop conservateurs. Sachant que la méthode est très complexe déjà à comprendre, rajoutons en plus le fait qu'elle ne soit pas très connue il est normal que les market-makers préferent de ne pas l'utiliser.

3 Références

[1] Laurent NGUYEN, *Application du Calcul de Malliavin à la Finance*, Rapport de Stage DEA de Probabilités et Finance, 1999.

[2] Frédéric Cosmao, Frédéric Dupuy et Antoine Guillon, Le Calcul de Malliavin Appliqué à la Finance,Rapport de Stage, 2002.

4 Annexe

Nous allons montrer la démonstration de l'équation 2 : $D_s X_t = Y_t Y_s^{-1}\sigma(s, X_s)1_{s\leq t}$. Prenons $p = 1$

Preuve. *Rappelons les dynamiques des processus* (X_t) *et* (Y_t)

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1}$$

por $p = 1$

$$dY_t = (b_2(t, X_t)dt + \sigma_2(t, X_t)dW_t)Y_t \qquad Y_0 = 1$$

donc

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

Or

$$Y_t = \frac{\partial X_t}{\partial x}$$

En différenciant cette expression au sens de Malliavin puis en utilisant les propriétés de commutation on obtient, en remarquant que le processus (X_t) *est adapté :*

$$D_s X_t = D_s(\int_0^t b(u, X_u)du) + D_S(\int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u)$$

$$D_s X_t = \sigma(s, X_S) + \int_s^t D_s b(u, X_u)du + \int_s^t D_s\sigma(u, X_u)dW_u$$

$$D_s X_t = \sigma(s, X_S) + \int_s^t b_2^{'}(u, X_u)D_s X_u du + \int_s^t \sigma_2^{'}(u, X_u)D_s X_u dW_u$$

Notons $Z_t = D_s X_t$ *; le processus Zt vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = b_2^{'}(t, X_t)dt + \sigma_2^{'}(t, X_t)dW_t$$

avec $Z_s = \sigma(s, X_s)$. *Les processus* (Z_t) *et* (Y_t) *vérifient donc la même équation différentielle stochastique mais pour des conditions initiales différentes :* $Z_s = \sigma(s, X_s)$ *et* $Y_s = Y_s$. *Par ailleurs, le processus* (X_t) *étant adapté, on a* $Z_t = 0$ *pour* $t \leq s$. *Il existe donc une constante* λ *telle que* $Z_t = \lambda Y_t 1_{s\leq t}$. *Cette constante est très facilement déterminée à l'aide des conditions initiales à la date s. Finalement, on obtient bien :*

$$D_s X_t = Y_t Y_s^{-1}\sigma(s, X_s)1_{s\leq t}$$

Nous allons montrer l'égalité suivante :

$$\delta(w^{gamma}) = \delta(w^{delta}\delta(w^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x}w^{delta})$$

Preuve. *Nous donnons ici l'esprit de la démonstration qui fonctionne comme dans le cas du delta. Nous supposons que f est deux fois continûment dérivable et que ses dérivées première et deuxième sont bornées. Pour faciliter les notations on pose* $F = f(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m})$

$$\gamma = \frac{\partial}{x}[\frac{\partial}{\partial x}E_x(F)]$$

$$\gamma = \frac{\partial}{x}[E_x(F.\delta(w_x^{delta})]$$

$$\gamma = E_x[\frac{\partial}{x}F.\delta(w_x^{delta})] + E_x[F.\frac{\partial}{x}\delta(w_x^{delta})]$$

En appliquant la convergence dominée, on peut permuter l'opérateur δ et la différentielle par rapport à x :

$$\gamma = E_x[F(\delta(w_x^{delta})\delta(w_x^{delta}) + \delta(\frac{\partial}{\partial x}w_x^{delta})]$$

$$\gamma = E_x[F\delta(w^{delta}\delta(w^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x}w^{delta})]$$

Or le poids de gamma est défini par la formule

$$\gamma = E_x[F\delta(w^{gamma})]$$

Donc

$$\delta(w^{gamma}) = \delta(w^{delta}\delta(w^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x}w^{delta})$$